在后续章节中会遇到含有许多量词的命题. 原则上, 反复运用上面讨论的规则, 就能理解它的含义, 写出它的否定. 总之, 论证具有复杂量词串的命题可以想象成与恶魔的博弈. 每次存在量词出现时是你出手, 每次全称量词出现时则轮到恶魔出手. 在存在量词的作用范围内你尽量选择好的变量让事情变好, 而恶魔则全力把事情搞糟. 如果你有一个策略打败恶魔, 那么这个命题就成立, 一个命题的直接证明是具体给出一个打败恶魔的策略. 除了直接证明, 命题还允许间接证明, 它通过*反证法*证明这样的策略的存在性. 如果可能, 在接下来的章节我们尽可能采用直接证明, 也就是说给出一个具体的策略.

从便于理解的角度来说, 通常人们表述数学命题时把量词写在最前面, 也就是说, 命题的假设应该写在前面, 结论放在后面. 但是在现实世界里, 人类的语言允许用多种方式表达同一个意思, 这提供了自由发挥的余地. 读者可以通过反复练习, 培养发现隐藏量词的洞察力.

14.1.2 无限集合

象逻辑学一样, 集合论也在数学中有着基本的重要性, 这一节我们讨论集合的一些基本性质. 记号$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$和$\mathbb{Q}$分别表示自然数、整数和有理数 [1].

设A, B为两个集合. $A \to B$的一一映射(或称一一对应)是指一个映射, 它既是单射, 又是满射. 一一映射（对应）又称为双射.

利用一一映射, 我们可以定义有限集合与无限集合. 如果存在自然数n, 使得A与集合$\{1, 2, \cdots, n\}$之间有一一对应, 称A为*有限集合*; 如果这样的n不存在, 则称A为*无限集合*. 自然数集合 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$和整数集合$\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \cdots\}$是熟知的无限集合.

自然数集合 $\mathbb{N}$ 有个有趣的性质, 就是$\mathbb{N}$可以和它的真子集一一对应. 比如, 从偶数集合$E = \{2, 4, 6, \cdots\}$到$\mathbb{N}$的一个一一对应, $x \mapsto x/2$. 更一般地我们有如下定义:

定义 14.1.1 *称两个集合A, B有相同的基数, 是指存在$A \to B$的一一对应. 称集合A比集合B具有更大的基数, 是指存在$A \to B$的满射, 但不存在A, B之间的一一对应. 一个与自然数集合 $\mathbb{N}$有相同基数的集合称为可数集合.*

为了表述的方便, 我们把有限或者可数集合统称为*至多可数集合*. 无限集合可能和它的真子集具有相同的基数, 有限集合则不能. 一个可数集合中的元素可以排成一列写为: $u_1, u_2, u_3, \cdots$, 通常这样排列只是为了方便表示一个到$\mathbb{N}$ 的一一对应, 它的先后顺序并不反映元素间有什么关系.

性质 14.1.2 *如果存在从$\mathbb{N}$到无限集合U的满射f, 则U为可数集合. 特别地, $\mathbb{N}$的无限真子集是可数集.*

证明 首先证明任意$\mathbb{N}$的非空子集A都有最小元. 事实上, 取A的一个数n, 那么它的

[1] 自然数集通常有正整数集或者正整数集加上零两种约定. 为方便起见, 这里我们约定自然数集是正整数集.

最小元就是有限集合 $A \cap \{1, 2, \cdots, n\}$ 的最小元.

下面我们构造U中所有元素的一个不重复排列. 令

$$y_1 = f(1),$$

并记$j_1 = 1$. 因为f为满射且U是无限集, 集合$E_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq y_1\}$不是空集. 设$E_1$的最小元为$j_2$, 令

$$y_2 = f(j_2).$$

此时我们有$j_2 > j_1$, $y_2 \neq y_1$, 且数$1, 2, \cdots, j_2$在f下的像为y_1或者y_2. 再令

$$y_3 = f(j_3),$$

这里j_3是非空集合$f^{-1}(U \backslash \{y_1, y_2\})$的最小元. 显然$j_3 > j_2$, y_1, y_2, y_3两两不等, 且$f(\{j_1, j_2, j_3\}) = \{y_1, y_2, y_3\}$. 重复此操作, 因为$U$是无限集合, 这个操作不会在有限步终止, 我们得到一个严格递增的自然数列 $j_1 < j_2 < j_3 < \cdots$ 和一个U中元素的不重复排列$y_1, y_2, y_3, \cdots$. 由于f是满射, 此排列没有遗漏U中的元素, 即

$$U = f(\mathbb{N}) = \{y_1, y_2, y_3, \cdots\}.$$

如果V为$\mathbb{N}$的无限子集. 取定一个V中的元素n, 定义映射$g : \mathbb{N} \to V$如下: 当$m \in V$时, $g(m) = m$; 当$m \notin V$时, $g(m) = n$. 显然$f : \mathbb{N} \to V$是满射. 由前面的结论可知V为可数集. □

性质 14.1.3 可数个可数集合的并是可数集. 特别, 有限个可数集合的并是可数集合.

证明 设$A_1, A_2, \cdots$为可数个可数集. 记A_1的元素为$a_{11}, a_{12}, \cdots$, A_2的为 $a_{21}, a_{22}, \cdots$, 一般地记A_k的元素为$a_{k1}, a_{k2}, \cdots$. 那么并集$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$里的所有元素可以表示为如下无穷矩阵,

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

把纸面沿顺时针方向旋转45°, 我们可以把矩阵看成一个大三角形,沿着箭头我们得到元素的一个排列

$$\begin{array}{c} a_{11} \to \\ \to a_{21} \to a_{12} \to \\ \to a_{31} \to a_{22} \to a_{13} \to \\ \cdots \quad \cdots \end{array}$$

它给出了$\mathbb{N}$到并集的一个满射, 但不一定是单射, 因为矩阵中可能含有重复的元素. $\square$

集合A, B的直积$A \times B$(或者笛卡尔积)定义为

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

类似地可以定义有限个集合的直积, 而可数个集合$A_1, A_2, \cdots$的直积的定义为

$$\prod_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \times A_2 \times \cdots = \{(x_1, x_2, \cdots) : x_n \in A_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

类似于性质14.1.3 的证明, 我们可得到如下命题

性质 14.1.4 有限个可数集合的直积也是可数集.

一个自然的问题是: 是否所有的无限集合都有相同的基数?

考虑一个无限集合A, 从中取一个元素x_1, 又从$A\backslash\{x_1\}$中取一个元素x_2, 一直继续这个操作得到 A中两两不同的一列元素$x_1, x_2, \cdots$, 或者说得到一个单射$f : \mathbb{N} \to A$. 如果f不是满射, 那么我们可以进而构造一个满射$g : A \to \mathbb{N}$如下:

$$\begin{cases} g(x) = f^{-1}(x), & x \in f(N), \\ g(x) = 1, & x \notin f(N). \end{cases}$$

这说明，对于无限集合A, 一定存在$A \to \mathbb{N}$ 的满射. 由定义14.1.1, 如果存在$A \to \mathbb{N}$ 的一一对应, 那么A与$\mathbb{N}$有相同的基数; 如果不存在, A的基数大于$\mathbb{N}$的基数. 总之, A的基数不小于$\mathbb{N}$的基数. 换句话说,不存在基数比$\mathbb{N}$小的无限集合.

定义 14.1.5 无限集合称为不可数, 是指不存在它与$\mathbb{N}$之间的一一对应. 换而言之, 它有比$\mathbb{N}$更大的基数.

下面我们将构造一个不可数集合. 要超越可数集合的范畴, 我们需要引入一个新的概念：集合的幂集. 一个非空集合A的幂集2^A是它的所有子集构成的集合, 即

$$2^A = \{X \mid X \subset A\}.$$

这里使用记号2^A的原因在于, 如果用$\mathcal{P} = \{f : A \to \{0,1\}\}$表示从集合$A$到集合$\{0, 1\}$映射的全体, 则集合$2^A$与集合$\mathcal{P}$一一对应. 事实上, 给定$X \subset A$, 定义映射$f_X : A \to \{0, 1\}$为

$$f_X(a) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } a \in X \\ 0 & \text{如果 } a \notin X \end{cases}$$

容易验证对应$X \to f_X$是2^A到$\mathcal{P}$的双射. 函数f_X又称作子集合X的特征函数.

定理 14.1.6 (Cantor **康**托) $2^{\mathbb{N}}$ 是不可数集合.

证明 (反证) 假设$2^{\mathbb{N}}$可数. 设$U_1, U_2, \cdots$是$2^{\mathbb{N}}$的元素的一个排列, 即$\mathbb{N}$的所有子集都出现在里面. 为得到矛盾, 我们将造出一个$\mathbb{N}$的子集V, 它不在排列中. 事实上, 令

$$V = \{k \in \mathbb{N} \mid k \notin U_k\}.$$

或者说, 一个自然数$k \in V$当且仅当$k \notin U_k$. V的定义虽然依赖于上面特定的排列方式$U_1, U_2, \cdots$, 但是可以发现对任意的k, $V \neq U_k$. 这是因为对每一个$k \in \mathbb{N}$, V和U_k中, 只有一个包含k, 而另一个不包含k. □

注记: Cantor 的定理说$2^{\mathbb{N}}$的基数比$\mathbb{N}$的基数大, 这引出一个自然的问题, 是否存在一个集合, 它的基数比$\mathbb{N}$的基数大, 但比 $2^{\mathbb{N}}$的基数小? 著名的Cantor连续统假设说不存在这样的集合. Kurt Gödel 与 Paul Cohen 的工作说明以上问题不可能有答案. 他们分别构造了两个集合论的"模型", 在这两个模型里普通的集合论公理都成立, 但是连续统假设在一个里成立, 在另一个里不成立.

幸运的是, 在数学分析里这些涉及集合论本源的问题不会出现. 在本书里我们只考虑从自然数出发通过有限个步骤构造的集合, 比如我们会遇到数的集合的集合, 数的集合的集合的集合, 等等.

14.1.3 有理数系

我们首先定义等价关系, 它是非常基本的数学概念, 是众多数学构造的源泉.

设A是一个非空集合.

定义 14.1.7 *A中元素之间的关系$\sim$称为等价关系是指它满足下述三个条件:*

自反性 *如果$a \in A$, 则$a \sim a$,*

对称性 *如果$a \sim b$, 则 $b \sim a$,*

传递性 *如果$a \sim b$, 并且$b \sim c$, 则 $a \sim c$.*

A的子集合$[a] = \{b \in A \mid a \sim b\}$称为$a$的等价类, 它是与$a$等价的所有元素的集合, 等价类中的元素称为它的代表元. 由自反性可知, $a \in [a]$. 记$A/\!\sim$为A上的等价类全体的集合

$$A/\!\sim\, = \{[a] \mid a \in A\}.$$

性质 14.1.8 *设$a, a' \in A$, 那么$[a]$和$[a']$要么不交, 要么相等. 从而$A/\!\sim$是等价类的无交并.*

证明 如果存在$b \in [a] \cap [a']$, 那么$a \sim b$且$a' \sim b$, 由对称性和传递性知道 $a \sim a'$. 对任意$c \in [a]$, 由于$a \sim c$, 由传递性同样有$a' \sim c$. 于是$c \in [a']$, 从而$[a] \subseteq [a']$. 从证明的对称性知 $[a'] \subseteq [a]$, 于是$[a] = [a']$. □