§14.2 实数的定义

正如我们在 §14.1.3 中讨论的那样, 有理数构成的数系具有一些很好的性质. 简而言之, 一是有理数在加法、乘法运算以及它们的逆运算下是封闭的, 因此是满足定义14.1.10 所定义的数域; 二是有理数是一个有序域（定义14.1.11）; 三是有理数具有一种“稠密性”（性质14.1.9）.

然而, 有理数系仍然不尽完美. 一是从几何角度上看, 如果把有理数对应到数轴上的点（这样的点称为有理点）, 虽然“稠密性”表明有理点在数轴上是稠密的, 但有理数（有理点）之间仍然有很多“空隙”, 典型的例子是单位正方形对角线长度对应数轴上的点不是有理点. 或者说有理数对应的有理点在直线上不是“连续”的, 我们将看到, 这些空隙的“数量”甚至远远“多于”有理点.

二是从极限角度看, 存在由有理数构成的数列（称为有理数列）, 它的极限却不是有理数, 或者说, 数轴上有理点列并不以有理点为其聚点. 例如我们在第一册所讨论的有理数列

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ n=1,2,\cdots,$$

它的极限 e 不是有理数. 通过递推公式

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right),\ n=1,2,\cdots$$

取 x_1 为大于零的有理数, 可得到一个有理数列$x_1, x_2, x_3, \cdots$. 它的极限$\sqrt{2}$ 也不是有理数 . 这些例子不是偶然的, 它表明有理数系在极限运算下是不封闭的.

因此, 有必要对有理数进行扩充, 正如从整数扩充到有理数一样. 我们希望扩充的数系（称为实数系）既能继承有理数所有算术运算的性质(满足定义14.1.10 和定义14.1.11中的性质), 又能与实轴上的点一一对应(具有“连续性”), 或者说在极限运算下保持封闭(具有“完备性”).

14.2.1 实数的定义

前面已经提到, 收敛的有理数列的极限未必是有理数. 正是因为这个原因, 给我们提供了利用收敛的有理数列去构造新的数的可能.

以$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$ 为例, 取 $x_1 = 1$, 经过反复迭代, 就得到一列越来越趋近于$\sqrt{2}$ 的有理数列. 但如果试图通过同样的方法, 用有理数来“逼近”所有的“实数”, 碰到一个逻辑上的漏洞是我们还没有严格定义什么是”实数“, 尽管数轴上提供的观察非常直观.

大家知道数列收敛与数列是Cauchy 列（即满足 Cauchy 收敛准则的数列）是等价的. Cauchy 收敛准则的特点是在不借助外在信息的情况下, 仅根据数列自身内在性态来

判断数列的收敛性, 虽然该准则并不能告诉我们数列收敛到何处.

然而当我们还没有严格定义“实数”之前, 这种等价性并不是显然的, 它涉及到了实数构造的本质. 为此我们局限在有理数范围内重新回顾 Cauchy 列的定义.

定义 14.2.1 *一个有理数列$\{x_n\}$称为是有理数Cauchy列, 如果对任意$n \in \mathbb{N}$, 存在依赖于n的正整数$N = N(n)$使得对所有$k, l \geqslant N$,*

$$|x_k - x_l| < \frac{1}{n}.$$

这里我们用$1/n$ 代替常用的“任意正数ε”, 是因为逻辑上我们除了有理数, 还没有定义其它数. 下面的性质即使在有理数范围内仍然是成立的.

性质 14.2.2 *有理数 Cauchy 列 $\{x_n\}$ 一定是有界的. 即存在一个有理数 M, 使得*

$$|x_n| \leqslant M,\ n = 1, 2, \cdots$$

证明 取 $n = 1$, 则存在 N_0, 当 $k \geqslant N_0$ 时, 有

$$|x_k - x_{N_0}| < 1,$$

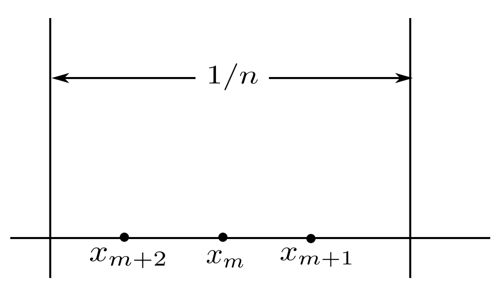
即 $|x_k| < 1 + |x_{N_0}|,\ k \geqslant N_0$, 记

$$M = \max\{|x_1|, \cdots, |x_{N_0-1}|, 1 + |x_{N_0}|\},$$

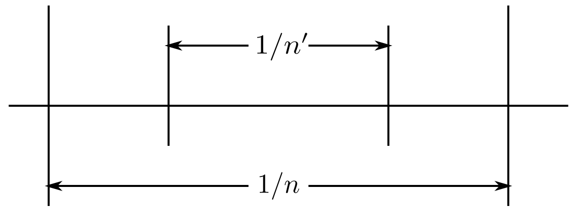
显然 M 是有理数, 则 $|x_k| \leqslant M,\ k = 1, 2, \cdots$. □

现在, 我们借助“数轴是连续的”这一直观, 给出一个有理数Cauchy 列收敛到一个“数”大致描述.

设$x_1, x_2, x_3, \cdots$是一个有理数Cauchy列, 要找出一个“数”x 为该数列的极限. 假设我们要在精度$1/n$之内确定x, 由 Cauchy 列的定义, 存在$m = m(n)$使得所有x_m以后的项彼此之间相差至多为$1/2n$. 如果把所有x_k, $k \geqslant m$都在数轴上标出, 那么它们都落在一个宽度至多为$1/n$的线段里面, 同时所求的极限一定在这个线段里面.



再取一个比n大的自然数n', 相应地存在m', 使得第m'项以后的数彼此之间相差至多为$1/n'$. 换句话说, 如果我们越往数列的远处去, 得到的能包含远处所有的项的线段就越短, 如下图.



考虑所有的n, 我们就得到一列线段$\{L_n\}$, 长度为$1/n$, 且$L_{n+1} \subset L_n$(称之为闭区间套), 且要找的极限$x \in L_n$. 因此, $x \in \cap_{n=1}^{\infty} L_n$. 如果交集$\cap_{n=1}^{\infty} L_n$为空, 那么就表示数轴里有一个"空洞", 这与基本几何公理中的连续公理[4]矛盾. 另一方面, 对任意n, 落在线段L_n中的项x_m与x的误差在$1/n$ 之内, 既数列$\{x_n\}$收敛到x. □

上述直观“证明”, 蕴含着一个事实, 数轴上的任意点x, 都可以有一列有理点列$\{x_n\}$ 来无限逼近, 或者说 *数轴上任一点对应的“数”都是一个有理数 Cauchy 列的极限*. 因此, 我们要定义的实数集合, 它应该由有理数Cauchy列的极限构成, 特别是有理数也可以看成是有理数 Cauchy 列的极限, 例如对有理数 r, 它是 $r, r, \cdots, r, \cdots$ 的极限. 如果有理数Cauchy列的极限不是有理数, 那么这个有理数Cauchy列就定义了一个新数—-“无理数”.

然而, 不同的有理数Cauchy 列可能逼近同一个“数”, 为此我们引进下列“等价”的概念.

设$\mathfrak{R}$是全体有理数Cauchy列构成的集合, 在此集合中定义等价关系:

定义 14.2.3　*设$\{x_n\}, \{y_n\}$是两个有理数Cauchy列, 如果对任意$n \in \mathbb{N}$, 存在$N \in \mathbb{N}$使得对任意$k \geqslant N$,*

$$|x_k - y_k| < \frac{1}{n},$$

则称这两个有理数列是等价的, 记为$\{x_n\} \sim \{y_n\}$.

我们需要验证"$\sim$"是等价关系.

引理 14.2.4　*上述定义的有理数Cauchy列等价, 满足自反性, 对称性和传递性, 从而是集合$\mathfrak{R}$上的等价关系.*

证明　自反性和对称性是显然的, 只需证明传递性. 设$\{x_k\}$, $\{y_k\}$与$\{z_k\}$为有理数Cauchy列, 且

$$\{x_k\} \sim \{y_k\},\ \{y_k\} \sim \{z_k\}.$$

要证明$\{x_k\}$与$\{z_k\}$等价, 只须证: 对任意的$1/n$ ($n \in \mathbb{N}$), 存在正整数N使得对任意$k \geqslant N$, 下列不等式成立

$$|x_k - z_k| < \frac{1}{n}.$$

[4]参见江泽涵，朱鼎勋译: 希尔伯特几何基础, 北京大学出版社.

对于任意的 $1/n$:

由$\{x_k\} \sim \{y_k\}$ 可知: 存在 N_1 使得$|x_k - y_k| < 1/2n$ $(\forall k \geqslant N_1)$;

由 $\{y_k\} \sim \{z_k\}$ 可知: 存在N_2使得$|y_k - z_k| < 1/2n$ $(\forall k \geqslant N_2)$.

取$N = \max(N_1, N_2)$, 并利用三角不等式, 对任意 $k \geqslant N$,都有

$$\begin{aligned} |x_k - z_k| &= |(x_k - y_k) + (y_k - z_k)| \leqslant |x_k - y_k| + |y_k - z_k| \\ &< \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

即 $\{x_k\} \sim \{z_k\}$, 这样我们就证明了传递性. □

定义 14.2.5 设 $\mathbb{R} = \mathfrak{R}/\sim$ 是有理数 *Cauchy* 列集合$\mathfrak{R}$在上述等价关系之下的全体等价类构成的集合. 我们将看到, 它满足实数公理系统（即定义*14.1.10* 和定义*14.1.11*）, 因此称$\mathbb{R}$为实数集合, 它的元素 x是某个有理数 *Cauchy* 列$\{x_n\}$ 的等价类, 称为实数. 数列$\{x_n\}$称为实数x的代表元, 记为$x \sim \{x_n\}$. 我们还称等价类x中的任意有理数*Cauchy*列收敛于x或以x为极限.

实数的定义虽然抽象, 本质上只是为了语言上的方便. 依照引理14.2.4, 我们可以认为一个特定的有理数Cauchy列确定一个实数, 并把等价的Cauchy列当成同一个实数不同的表示. 最简单的例子是 "0" , 它是 Cauchy列 $0, 0, \cdots$ 的极限, 而与 $0, 0, \cdots$ 等价的 Cauchy 列 $1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$ 是 "0" 的不同表示. 两个不同的有理数 r, s 分别是 Cauchy 列 $r, r, \cdots$ 与 $s, s, \cdots$ 的极限. 由Archimedes公理, 存在$n_0 \in \mathbb{N}$使得$|r - s| > 1/n_0$, 因此 Cauchy 列 $r, r, \cdots$ 与 $s, s, \cdots$ 不等价.

例 14.2.1 证明: 单调递增的有界有理数列是有理数Cauchy列.

证明 设$\{x_n\}$单调递增的有界有理数列, 不妨设它的通项都大于0. 任意固定一个$n \in \mathbb{N}$, 则数列$nx_1, nx_2, \cdots$ 也是单调递增的有界数列. 设集合E是数列$nx_1, nx_2, \cdots$的所有正整数上界, 那么E有最小正整数m_0, $m_0 - 1$不是原数列的上界, 所以存在$N \in \mathbb{N}$, $nx_N > m_0 - 1$. 由单调性, $k, \ l > N$时,

$$m_0 - 1 < nx_k \leqslant m_0, \quad m_0 - 1 < nx_l \leqslant m_0,$$

因此$|x_k - x_l| < \dfrac{1}{n}$.

例 14.2.2 下列两个有理数列

$$\begin{aligned} e_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \ n = 1, 2, \cdots, \\ s_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \ n = 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

是 Cauchy 列, 而且相互等价, 所在的等价类记为 e, 因此也称等价类 e 中任意有理数列, 如 $\{e_n\}$ 和 $\{s_n\}$, 都收敛于 e .

证明 根据第一册讨论的结果, $\{e_n\}$, $\{s_n\}$ 都是单调增有界数列且 $2 < e_n < s_n < 3$, 因此都是Cauchy 列. 当 $n \geqslant 3$ 时, 将 e_n 按二项式展开得

$$e_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

因为

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \geqslant 1 - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{n} = 1 - \frac{k(k-1)}{2n}$$

因此有

$$0 < s_n - e_n \leqslant \frac{1}{2n} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} \leqslant \frac{3}{2n}$$

对任意的 n, 取 $N > \frac{3}{2}n$, 则当 $k > N$ 时, 有

$$|s_k - e_k| < \frac{1}{n}$$

所以两者互相等价. □

14.2.2 实数的算术

下面我们需要把$\mathbb{Q}$上的算术扩充到定义14.2.5 中定义的集合 $\mathbb{R}$上, 也就是要验证 $\mathbb{R}$ 满足实数公理系统中的加法公理、乘法公理和序公理. 具体做法是对有理数 Cauchy 列的每一项分别定义相应的运算, 并仔细验证这些定义都有意义.

引理 14.2.6 *设$x, y \in \mathbb{R}$, 且$x \sim \{x_n\}$, $y \sim \{y_n\}$*

1. 有理数列$\{x_n + y_n\}$和$\{x_n \cdot y_n\}$都是Cauchy列;

2. 如果有理数列$\{x'_n\}$与$\{x_n\}$等价, $\{y'_n\}$与$\{y_n\}$等价, 那么 $\{x'_n + y'_n\}$与$\{x_n + y_n\}$等价, $\{x'_n \cdot y'_n\}$与$\{x_n \cdot y_n\}$等价.

证明 因为$\{x_n\}$和$\{y_n\}$是 Cauchy列, 所以 $\forall\, n$, 存在N_1使得对任意j, $k \geqslant N_1$ 有$|x_j - x_k| < 1/2n$; 存在N_2使得对任意 j, $k \geqslant N_2$有 $|y_j - y_k| < 1/2n$.

取$N = \max(N_1, N_2)$,那么对任意j, $k \geqslant N$, 都有

$$\begin{aligned} |(x_j + y_j) - (x_k + y_k)| &= |(x_j - x_k) + (y_j - y_k)| \\ &\leqslant |x_j - x_k| + |y_j - y_k| \\ &< \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

所以$\{x_n + y_n\}$是Cauchy列.

再由假设的等价性有, $\forall\, 1/n$, 存在N_1使得对任意 $k \geqslant N_1$有 $|x_k - x'_k| < 1/2n$; 存在N_2使得对任意$k \geqslant N_2$有 $|y_k - y'_k| < 1/2n$.

取$N=\max(N_1,\,N_2)$就可以得到对任意$k\geqslant N$,

$$\begin{aligned}|(x_k+y_k)-(x'_k+y'_k)|&=|(x_k-x'_k)+(y_k-y'_k)|\\&\leqslant|x_k-x'_k|+|y_k-y'_k|\\&<\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{n},\end{aligned}$$

因此$\{x_n+y_n\}\sim\{x'_n+y'_n\}$.

有关乘法运算的相应结论可以类似地证明, 但需要用到 Cauchy 列的有界性（即性质14.2.2）, 请读者自行完成. □

引理14.2.6保证了如下定义的合理性.

定义 14.2.7 *设实数x, y的代表元分别为有理数 Cauchy 列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$, 那么实数 $x+y$定义为有理数 Cauchy 列$\{x_n+y_n\}$代表的等价类, 实数$x\cdot y$定义为有理数Cauchy列$\{x_n\cdot y_n\}$代表的等价类.*

定理 14.2.8 *在上述定义的加法和乘法之下, 实数集合$\mathbb{R}$成为一个域.*

显然, 加法0元素是数列$0,0,0,\cdots$的等价类, 乘法单位元素1是数列$1,1,1,\cdots$的等价类. 如果实数x的代表元是$\{x_n\}$, 则它的加法逆元$-x$的代表元是$\{-x_n\}$. 因此有关域的公理（定义14.1.10）都容易验证, 除了关于逆元的有关公理尚待证明.

我们需要证明:“每个非零实数x都有乘法逆元x^{-1}, 使得$x^{-1}\cdot x=1$”. 为此首先须证明

引理 14.2.9 *设x是非零实数. 那么存在$n_0\in\mathbb{N}$满足: 对代表x的任意 Cauchy 列$\{x_n\}$, 都存在N使得对任意$k\geqslant N$, $|x_k|\geqslant 1/n_0$.这里的N依赖于给定的 Cauchy 列, 而下界$1/n_0$只依赖于x, 不依赖于给定的 Cauchy 列.*

证明 设 $\{x_n\}$ 是代表x的一个有理数Cauchy 列.

命题“$\{x_n\}$等价于数列$\{0,0,0,\cdots\}$”写成量词的形式为:

$\forall\, n$, $\exists\, N$使得$\forall j\geqslant N$都有

$$|x_j|<\frac{1}{n}.$$

它的否定命题“$\{x_n\}$不等价于数列$\{0,0,0,\cdots\}$”可以表述为:

$\exists\, n_1$使得$\forall\, N\in\mathbb{N}$, $\exists\, j\geqslant N$, 满足

$$|x_j|\geqslant\frac{1}{n_1}.$$

或者说, 如果有理数列$\{x_n\}$代表非零实数x, 则有无限个j使得$|x_j|\geqslant 1/n_1$成立. 但是, $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 所以对误差$1/2n_1$, 存在N 使得对所有 $j,k\geqslant N$, 下列不等式成立

$$|x_j-x_k|<\frac{1}{2n_1}.$$

选定一个$j \geqslant N$满足$|x_j| \geqslant 1/n_1$, 则对任意 $k \geqslant N$,

$$|x_k| \geqslant |x_j| - |x_j - x_k| \geqslant \frac{1}{n_1} - \frac{1}{2n_1} = \frac{1}{2n_1} > \frac{1}{n_0}.$$

这里 $n_0 = 4n_1$. 设 $\{x'_n\}$ 是任意一个与$\{x_n\}$等价的 Cauchy 列. 对误差$1/4n_1$应用 Cauchy 列等价的定义, 存在 $N'(\geqslant N)$ 使得

$$|x_k - x'_k| \leqslant \frac{1}{4n_0}$$

对所有 $k \geqslant N'$成立. 因此, 对任意 $k \geqslant N'$,有

$$|x'_j| \geqslant |x_j| - |x_j - x'_j| \geqslant \frac{1}{2n_1} - \frac{1}{4n_1} = \frac{1}{4n_1} = \frac{1}{n_0}.$$

当然对 $\{x_n\}$, 也有$|x_k| \geqslant 1/n_0$, 对 $k \geqslant N' \geqslant N$ 成立. □

定理14.2.8的证明 设$\{x_n\}$代表$x \neq 0$. 根据上述引理, 该数列中至多有限项为零, 把那些为零的项用1代替后得到一个和原数列等价的 Cauchy 列, 将新数列仍然记为$\{x_n\}$. 通过对该数列的每一项取逆, 得到新的有理数列$\{1/x_n\}$, 由引理可知存在N, $\forall j \geqslant N$, $|x_j| \geqslant 1/n_0$, 所以当$k, l \geqslant N$时有

$$\left|\frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_l}\right| = \frac{|x_k - x_l|}{|x_k \cdot x_l|} \leqslant |x_k - x_l|\, n_0^2$$

由此容易看出它是 Cauchy 列. 令x^{-1}为数列$\{1/x_n\}$代表的实数, 那么$x^{-1} \cdot x$ 的一个代表元是数列$1, 1, 1, \cdots$, 即 $x^{-1} \cdot x = 1$. □

下面我们讨论实数的序. 上一章我们通过正数, 在有理数域$\mathbb{Q}$上定义序, 为了在$\mathbb{R}$上定义序, 首先给出$\mathbb{R}$上正数的定义.

定义 14.2.10 *一个实数 x 称作是正的, 记为$x > 0$, 如果对x的一个代表元 $\{x_n\}$, 存在 m, $N \in \mathbb{N}$, 使得对所有 $j \geqslant N$都有 $x_j \geqslant 1/m$.*

由引理14.2.9可知实数是“正的”的定义与代表元选取无关. 如果 $-x$是正的, 则称实数x称为是负的, 记为 $x < 0$; 如果$x \in \mathbb{Q}$, 那么根据有理数的Archimedes公理, 这些定义与有理数的相应定义一致.

设x是一个非零实数, 由引理14.2.9, 存在自然数m, 使得对x的任意代表元$\{x_n\}$, 当j充分大时都有$|x_j| > 1/m$. 但这些有理数的符号不可能一直在变, 因为每次改变符号会造成它们之间至少为$2/m$的差别, 与Cauchy准则相悖. 这意味着j充分大后$x_j \geqslant 1/m$或$x_j \leqslant -1/m$两者之一恒成立. 由此可得

定理 14.2.11 *任意实数或为正, 或为负, 或为零. 两个正实数的和与积均是正实数.*

证明 依照定义, 一个有理数Cauchy例$\{x_n\}$如果是正实数或者负实数的代表元, 那么它不与常数列$0, 0, \cdots$等价. 反之, 如果$\{x_n\}$与 $0, 0, \cdots$等价, 依定义可知, 对任意$n \in \mathbb{N}$,

存在自然数N使得对任意$k \geqslant N$, $|x_k| < 1/n$成立, 这说明$\{x_n\}$既不是正实数也不是负实数的代表元. 这就证明了定理的第一个结论. 另外, 容易验证两个正数的和积均为正, 因为两个正下界的和与积给出新的正下界. □

定义 14.2.12 (序的定义) 设x, y是两个实数, 如果 $x - y > 0$, 称$x > y$, 并且定义x的绝对值为

$$|x| = \begin{cases} x & x > 0, \\ 0 & x = 0, \\ -x & x < 0. \end{cases}$$

引理 14.2.13 设有理数 *Cauchy* 列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$分别定义了实数x, y. 如果存在$N \in \mathbb{N}$ 使得对任意 $k \geqslant N$都有$x_k \leqslant y_k$, 那么$x \leqslant y$.

证明 (反证) 假设$x > y$, 则$x - y$为正. 由正数的定义, 存在$n \in \mathbb{N}$ 使得k充分大时$x_k - y_k \geqslant 1/n$, 矛盾. □

这里需要提请注意的是, 即使引理中的条件为严格的不等号, 我们也只能得到不严格不等号. 比如, $1/n > 0$, 但是 Cauchy 列$1, 1/2, 1/3, \cdots$也以0极限, 但是$0 > 0$不成立.

下面我们讨论有理数在实数中的稠密性, 即; 对任意实数x, 在它的任意小邻域内, 都有一个有理数.

定理 14.2.14 (有理数的稠密性) 对任意实数x以及任意给定的误差$1/n$ $(n \in \mathbb{N})$, 存在一个有理数r满足

$$|x - r| \leqslant \frac{1}{n}.$$

证明 设有理数Cauchy列$\{x_n\}$是实数x的代表元. 对于给定的$1/n$, 由 Cauchy 准则, 存在 N 使得当 $j, k \geqslant N$时$|x_k - x_j| < 1/n$. 取$r = x_N$, 则对 $\forall k \geqslant N$, 有

$$|x_k - r| < \frac{1}{n}, \text{ 或 } -\frac{1}{n} < x_k - r < \frac{1}{n}.$$

显然, 有理数Cauchy 列 $\{x_n - r\}$ 是 $x - r$ 的代表元, 取有理数Cauchy 列$\{y_n\}$ 分别为 $y_n = 1/n$ 和 $y_n = -1/n$, 则它们分别是 $1/n$ 和 $-1/n$ 的代表元. 由引理14.2.13知

$$-\frac{1}{n} \leqslant x - r \leqslant \frac{1}{n}.$$

□

关于稠密性有更一般的定义: 设B是实数集合A的子集. 称B在A中稠密, 是指任给$a \in A$, 任给误差$1/n$, 存在$b \in B$使得$|a - b| < 1/n$.

例 14.2.3 设λ是无理数, 证明集合$A = \{m + n\lambda \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$在实数集$\mathbb{R}$稠密.

证明 集合A有如下性质: 对任意整数 l 和任意的a, $b \in A$, 有$la \in A$, $a \pm b \in A$.

记 $n_k = -[k\lambda]$, 这里 $[x]$ 表示 x 的整数部分, 因此 $x_k = n_k + k\lambda \in A$ 表示 $k\lambda$ 的小数部分.

任给$1/n$, $n \in \mathbb{N}$, 考虑A的子集合

$$B = \{x_k = n_k + k\lambda \mid \ k = 1, 2, \cdots, n+1.\},$$

由于 λ是无理数, 所以B中的元素两两不等,而且$x_k \neq 0$. 因此有$0 < x_k < 1, k = 1, \cdots, n+1$. 这样就推出在这 $n+1$ 个数 $x_1, \cdots, x_{n+1}$ 中必有两个, 记为 x_i, x_j, 满足

$$0 < \xi = x_j - x_i < \frac{1}{n}.$$

将$\mathbb{R}$分解为如下一列区间的并,

$$\mathbb{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} [m\xi, \ (m+1)\xi],$$

可以看出, $\forall x \in \mathbb{R}$, 存在$m \in \mathbb{Z}$, 满足$|x - m\xi| \leqslant 1/n$. 显然 $m\xi \in A$, 这样就证明了 A 在 $\mathbb{R}$ 中的稠密性.

□

最后我们讨论一些实数的不等式. 最基本的不等式是

定理 14.2.15 （三角不等式）对任意实数 x 和 y都有

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

证明 首先注意一个事实, 如果有理数Cauchy列$\{x_n\}$是实数x的代表元, 则由有理数的三角不等式可知$\{|x_n|\}$也是有理数Cauchy列. 我们首先证明, $\{|x_n|\}$是实数$|x|$ 的代表元. 如果$x > 0$, 结论显然成立; 如果$x = 0$, 则$\{x_n\} \sim 0$可得$\{|x_n|\} \sim 0$; 如果$x < 0$, 由引理14.2.9, 当n充分大时$x_n < 0$, 因此$\{|x_n|\}$是$-x = |x|$的代表元.

设$\{x_n\}$与$\{y_n\}$分别是代表x与y的有理数 Cauchy 列. Cauchy 列$\{|x_n + y_n|\}$与$\{|x_n| + |y_n|\}$分别代表$|x + y|$与$|x| + |y|$. 利用$\mathbb{Q}$上的三角不等式, $|x_k + y_k| \leqslant |x_k| + |y_k|$, 再由引理14.2.13, 定理得证. □

定理 14.2.16 （*Archimedes*公理）对任意正实数 x, 存在自然数N满足 $x \geqslant 1/N$.

证明 由定义, 对代表正数x的 Cauchy 列$\{x_n\}$, 存在N, $m \in \mathbb{N}$使得$x_j \geqslant 1/N$ 对任意 $j \geqslant m$成立. 由引理14.2.13知$x \geqslant 1/N$. □

上述Archimedes公理事实上等价于如下结论, 如果实数x满足：对任意$n \in \mathbb{N}$, $|x| < 1/n$, 则$x = 0$.

下述几个例子, 都是分析中常见的不等式.

§14.5 实数系的其它等价形式*

本章最后我们简要介绍两个实数系的等价定义形式: 无限十进小数展开与 Dedekind 分割.

14.5.1 无限十进小数

我们先考虑实数的无限十进小数展开, 简称无限小数展开.

小数是形如

$$\begin{aligned} a &= a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots \\ &= a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}+\cdots \end{aligned}$$

的数, 其中$a_0\in\mathbb{Z}$, $a_i\in\{0,1,2,\cdots,9\}$ $(i\geqslant 1)$. 如果存在$N\in\mathbb{N}$使得$i\geqslant N$时$a_i=0$, 称a是有限小数. 小数可视为特殊的有理数Cauchy列

$$x_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{10^k},\quad n=0,1,2\cdots,$$

所以它代表了一个实数, 也称作是实数的（无限）小数表示. 事实上, 每个实数都有无限小数表示.

定理 14.5.1 *设$x\in\mathbb{R}$, 则存在定义x的有理数Cauchy列*

$$x_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{10^k},\quad n=0,1,2\cdots,$$

其中$a_0\in\mathbb{Z}$, $a_i\in\{0,1,2,\cdots,9\}$ $(i\geqslant 1)$.

证明 我们只对$x>0$证明, 如果$x<0$, 由定义$-x(>0)$的十进制小数Cauchy列可以得到定义x的十进制小数Cauchy列.

函数$[x]$定义为不大于x的整数集合中的最大数, 称为x的整数部分. 利用Archimedes公理容易证明$[x]$存在唯一. $\{x\}=x-[x]$称为x的小数部分, 它满足$0\leqslant\{x\}<1$.

对于任意正实数x, 定义

$$x_n=\frac{[10^nx]}{10^n},\ n=0,1,2,\cdots.$$

当$n\geqslant 1$时, 因为

$$0\leqslant 10^nx-[10^nx]<1,$$

所以

$$0\leqslant 10^{n+1}x-10\,[10^nx]<10,$$

这意味着

$$0\leqslant[10^{n+1}x]-10\,[10^nx]<10.$$

因此整数$a_{n+1}=[10^{n+1}x]-10\,[10^n x]\in\{0,1,\cdots,9\}$. 由此可得

$$x_{n+1}=x_n+\frac{[10^{n+1}x]-10\,[10^n x]}{10^{n+1}}=x_n+\frac{a_{n+1}}{10^{n+1}}.$$

由上述递推关系得

$$x_n=\frac{[10^n x]}{10^n}=x_0+\frac{a_1}{10}+\cdots+\frac{a_n}{10^n},\ n=0,1,\cdots,$$

显然

$$|x_{n+p}-x_n|\leqslant\frac{1}{10^{n+1}}$$

$$0\leqslant x-x_n<\frac{1}{10^n},$$

因此 $\{x_n\}$是Cauchy列, 并且 $\{x_n\}$的极限是x. □

我们已经证明, 任意实数都有小数表示. 事实上任意有理数可以表示为有限小数或者无限循环小数（练习）, 无理数是指无限不循环小数. 用无限小数定义实数的益处是与直观一致, 易于理解. 它的困难之处在于如何在无限小数系统上定义算术和序, 因为需要处理无限带来的困难. 读者可以把这些作为练习仔细研究.

另外, 也可以将有限小数表示为无限小数, 例如：$1=0.99\cdots$, $0.315=0.31499\cdots$. 可以证明, 在上述定理证明中构造的数列, 不会出现某项之后的a_i全部等于9的情形.

14.5.2 Dedekind 分割

Dedekind分割是Dedekind提出的实数定义的方法. 它用有理数集的分割定义实数. Dedekind 分割完全依赖于有理数上的顺序. 它的主要思想是一个实数x把有理数分成两部分: 大于x的部分和小于x的部分, 用小于x的部分来定义实数x.

定义 14.5.2 *称有理数集α是一个分割, 如果它满足*

1. α非空, 并且$\alpha\neq\mathbb{Q}$;

2. 若有理数$a\in\alpha$, 有理数$b<a$, 则$b\in\alpha$;

3. α内没有最大的有理数, 既：如果$a\in\alpha$, 则存在有理数$b>a$, $b\in\alpha$.

两个分割称为相等, 如果对应的有理数集相等. 如果a是一个有理数, 它可以定义一个分割 $a^*=\{b\in\mathbb{Q}\mid b<a\}$, 这样的分割又称为有理分割.

注记 *设一个有理数$p\notin\alpha$, 如果有理数$q>p$, 则$q\notin\alpha$. 分割α余集$\alpha^c=\mathbb{Q}\backslash\alpha$中的有理数也称为分割$\alpha$ 的上数. 这是因为若 $p\in\alpha^c$, 则$p>a$, $\forall a\in\alpha$.*

将分割的全体记为$\mathcal{R}$, 我们要在它上面定义算术和序, 并说明它和实数系$\mathbb{R}$一致.

下属命题定义了分割的加法, 证明留作练习.

性质 14.5.3 *设α, β是两个分割,*

1. 有理数集$\{a+b \mid a\in\alpha,\ b\in\beta\}$是一个分割, 定义为$\alpha$与$\beta$的和, 记为 $\alpha+\beta$;

2. 0^*是分割加法的0元, 既$\alpha+0^*=\alpha$;

3. 分割的加法满足结合律.

设α和β是两个分割, 如果α是β的子集, 称分割β大于或等于α, 记为 $\alpha \leqslant \beta$; 如果α是β的真子集, 称β大于α, 记为$\alpha<\beta$. 分割α称为正的(非负的), 如果$\alpha>0^*$($\alpha \geqslant 0^*$).

性质 14.5.4 *设α, β是两个分割, 则$\alpha<\beta$, $\alpha>\beta$, $\alpha=\beta$ 三者之一成立.*

证明 $\alpha=\beta$等价于: $\forall a\in\alpha$, $a\in\beta$, 同时$\forall b\in\beta$, $b\in\alpha$. 因此, 若$\alpha\neq\beta$, 存在α中的有理数a不属于β, 或者β中的有理数b不属于 α, 这等价于$\alpha>\beta$, 或者$\beta>\alpha$.

下属命题定义了分割的加法逆元.

性质 14.5.5 *设α是一个分割, 定义$\beta=\{-b \mid 存在 c\in\alpha^c=\mathbb{Q}\backslash\alpha,\ b>c\}$, 则$\beta$是一个分割, 且$\alpha+\beta=0^*$. 记$\beta=-\alpha$.*

证明 首先, α是$\mathbb{Q}$的真子集推出β非空、且是$\mathbb{Q}$的真子集. 由β的定义可以看出, 如果$b\in\beta$, $b_1<b$, 则$-b_1>-b\in\alpha^c$, 这说明$b\in\beta$. β内没有最大有理数也可以同样验证.

下面验证$\alpha+\beta=0^*$. 设$c=a+b\in\alpha+\beta$, 其中$a\in\alpha$, $b\in\beta$. 注意到 $\alpha^c=\{x\in\mathbb{Q} \mid x>a,\ \forall a\in\alpha\}$, 因为$-b\in\alpha^c$, 所以$c=a+b<0$. 这推出$\alpha+\beta\leqslant 0^*$. 此外, 任取一个$d\in 0^*$, 则$-d>0$. 取$a\in\alpha$, 数列$a$, $a-d$, $a-2d$, $\cdots$中, 必有一项$a-Nd$满足: $a-Nd\in\alpha$, $a-(N+1)d\in\alpha^c$. 因此不妨设$a-d\in\alpha^c$, 再取$a'\in\alpha$, $a'>a$, 则$a'-d>a-d$, 所以$-(a'-d)\in\beta$, 由此可得

$$a'+[-(a'-d)]=d\in\alpha+\beta,$$

这意味着$0^*\leqslant\alpha+\beta$. 所以$\alpha+\beta=0^*$. □

定义 14.5.6 *分割α的绝对值$|\alpha|$定义为*

$$|\alpha|=\begin{cases}\alpha, & 若\alpha\geqslant 0;\\ -\alpha, & 若\alpha<0.\end{cases}$$

显然$|\alpha|\geqslant 0$, 并且$|\alpha|=0$当且仅当$\alpha=0$.

我们接着讨论分割的乘法运算.

性质 14.5.7 *设分割$\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$, 定义有理数集*

$$\gamma=\{r\in\mathbb{Q} \mid r<0,\ 或者存在 a\in\alpha,\ b\in\beta,\ a,b\geqslant 0\ 且\ r=ab\}.$$

则γ是一个分割, 记为$\gamma=\alpha\beta$.

命题的证明留做习题. 由此可以定义任意两个分割的乘法.

定义 14.5.8 设α, β是两个分割, 它们的积$\alpha\beta$定义为:

$$\alpha\beta = \begin{cases} -|\alpha||\beta|, & 若\ \alpha > 0,\ \beta \leqslant 0, \\ -|\alpha||\beta|, & 若\ \alpha \leqslant 0,\ \beta > 0, \\ |\alpha||\beta|, & 若\ \alpha < 0,\ \beta < 0. \end{cases}$$

下述命题定义了乘法的逆元.

性质 14.5.9 设分割$\alpha > 0$, 定义有理数集

$$\beta = \{b \in \mathbb{Q} \mid b \leqslant 0,\ 或者存在\ c \in \alpha^c,\ \frac{1}{b} > c\},$$

则β是一个分割, $\beta > 0$且$\alpha\beta = 1^*$. β称为α 的逆, 记为$\beta = \alpha^{-1}$.

如果$\alpha < 0$, 它的逆定义为$-(-\alpha)^{-1}$. 至此, 我们已经在分割集合$\mathcal{R}$上定义了序、加法和乘法运算, 定义了0元和逆元. 可以验证, 1^*是乘法的单位元, $\mathcal{R}$满足有关域定义的所有公理, 它是一个有序域.

以下我们讨论$\mathcal{R}$与利用有理Cauchy列等价类定义的实数系$\mathbb{R}$的一致性. 对于$\alpha \in \mathcal{R}$, 对应

$$\alpha \to x_\alpha = \sup\{a \mid a \in \alpha\} = \sup \alpha$$

是$\mathcal{R}$到$\mathbb{R}$的单射, 它有逆映射

$$\mathbb{R} \ni x \to \alpha_x = \{a \in \mathbb{Q} \mid a < x\} \in \mathcal{R}.$$

这里还需要验证, α_x是一个分割.

上述一一对应, 保持域的公理（或称为域的同构）. 我们只证明如下两条基本性质, 余下的留作练习.

定理 14.5.10 设α, β是两个分割, 则

1. $\sup(\alpha + \beta) = \sup \alpha + \sup \beta$,

2. $\sup(\alpha\beta) = \sup \alpha \sup \beta$.

证明 1. 由分割加法的定义容易看出, $\sup(\alpha + \beta) \leqslant \sup \alpha + \sup \beta$. 任意固定$b \in \beta$, 则

$$\sup(\alpha + \beta) \geqslant \sup\{a + b \mid a \in \alpha\} = \sup(\alpha + b) = \sup \alpha + b.$$

由b的任意性可得$\sup(\alpha + \beta) = \sup \alpha + \sup \beta$.

2. 根据分割乘法的定义, 只需对α, $\beta > 0$证明结论. 显然

$$\sup(\alpha\beta) = \sup\{ab \mid a \in \alpha,\ b \in \beta 且\ a > 0,\ b > 0\}.$$

因此$\sup(\alpha\beta) \leqslant \sup\alpha\sup\beta$. 固定$b \in \beta$, $b > 0$, 则

$$\sup(\alpha\beta) \geqslant \sup\{ab \mid a \in \alpha,\ a > 0\} = b\sup\{a \in \alpha \mid a > 0\} = b\sup\alpha.$$

由b的任意性可得, $\sup(\alpha\beta) \geqslant \sup\alpha\sup\beta$. □

Dedekind 分割给出了实数系的第三种等价形式. 它的优点在于用到的集合理论比较少, 它只涉及到有理数集合和它的子集. 相比较而言, 有理数Cauchy 完备化的方法要处理Cauchy 列的等价类的集合, 为了定义一个实数就要用到有理数的集合的集合. 用Cauchy 完备化的方式定义实数系, 优点在于它具有普遍性, 在进一步学习分析学的过程中, 这种优越性将会逐步显现.

习题14.5

1. 设一个有理数a不能表示为有限小数, 证明它的无限小数表示一定是循环的, 即

$$a = a.a_1 \cdots a_N a_{N+1} \cdots a_{N+k} a_{N+1} \cdots a_{N+k} \cdots.$$

2. 证明性质14.5.3.
3. 证明性质14.5.7.
4. 证明性质14.5.9.
5. 证明：对任意分割α, $\alpha 1^* = \alpha$.
6. 设A是$\mathbb{R}$的子集, α_x是A中每个元素x对应的 Dedekind 分割. 证明这些α_x的并集是一个 Dedekind 分割或者是整个有理数集合$\mathbb{Q}$.
7. 设x, y是正实数. 证明α_{xy}是所有非正有理数和所有形如ab的数的集合, 其中$0 < a \in \alpha_x$, $0 < b \in \alpha_y$.
8. 设x, y是实数. 证明$x \leqslant y$当且仅当$\alpha_x \subset \alpha_y$.
9. 称实数x是代数数, 是指它是某个整系数多项式方程的解. 若实数y不是代数数, 则称之为超越数. 证明如下命题.

   a. 设x_0是一个无理数代数数, 并且$P(x)$是满足$P(x_0) = 0$, 且具有最低次数的整系数多项式, 设其次数为n. 存在正数A, 对于区间$[x_0 - 1,\ x_0 + 1]$中的任意有理数p/q, 其中p 为整数, q为正整数, 成立 Louville 不等式

$$\left|\frac{p}{q} - x_0\right| \geqslant \frac{A}{q^n}.$$

   b. 证明$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}}$是超越数.

   c. 证明所有的代数数构成可数集合, 从而所有超越数的集合不可数.