§14.4 实直线的拓扑

正如§14.2节开始提到, 几何上把实数系对应到数轴, 实数的完备性保证了对应是一一映射. 在本节中我们研究实数在几何上定性的性质, 这就是*拓扑*一词的意思. 这一节的许多概念今后会在数学更广泛的范围里重新出现, 因此借助实数, 首先建立起对这些概念的直观认识, 以便将来在更一般的范畴里理解它们.

14.4.1 开集与闭集

在实数域$\mathbb{R}$中, 不等式$a < b$称为严格不等式, $a \leqslant b$称为不严格不等式. 在上述有关实数构造和极限的讨论中, 大多数时候不加区分严格不等式和不严格不等式, 不会造成本质的区别. 比如在极限的定义里, 我们可以要求$|x_k - x| < \varepsilon$, 也可以要求$|x_k - x| \leqslant \varepsilon$. 但是, 在另一些情形它们的区别是本质性的, 比如取极限保持不严格不等式, 但不保持严格不等式.

给定两个实数$a < b$, 由严格的不等式$a < x < b$决定的集合是开区间 $(a,\ b)$; 由不严格的不等式$a \leqslant x \leqslant b$决定的集合是闭区间$[a,\ b]$. 对于开区间, 我们还允许$a = -\infty$或$b = +\infty$. 开区间与闭区间本质的不同在于开区间中的每一点都被开区间中的其他点包围, 而闭区间的端点不具有这个性质. 开区间和闭区间的不同点，在$\mathbb{R}$一般子集合上的反映, 就是下面要介绍的概念：开集与闭集.

定义 14.4.1 *实数$\mathbb{R}$中的一个子集合A称为是开集, 如果A满足如下性质：$\forall x \in A$, 存在开区间 (a, b) 使得$x \in (a, b) \subset A$.*

开区间是开集, 闭区间$[a, b]$不是开集, 因为a不在任何包含于闭区间的开区间中. 空集是开集, 因为它里面没有任何点. 有限或者无限个开区间的并集还是开集, 因为并集里的任意点都属于某个开区间. 所以对开集而言, 在集合的“并”和“交”两个基本运算下有

性质 14.4.2

1. 任意个开集的并集是开集, 从而无限个开集的并还是开集.

2. 两个开集的交集是开集, 从而有限个开集的交集是开集.

证明 依照开集的定义, 性质1是显然的.

设A, B为开集, 且$A \cap B \neq \emptyset$. 给定$x \in A \cap B$, 存在含x的开区间(a, b), (a', b'), 它们分别包含于A, B. 那么x在开区间$(a, b) \cap (a', b')$ 里, 此区间包含于$A \cap B$. □

需要注意的是, 无限多个开集的交可以不是开集, 例如

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\Big(-\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\Big) = \{0\}, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty}\Big(0,\ \frac{1}{n}\Big) = \emptyset.$$

我们可以证明每个开集都可以写成一族开区间的并集. 事实上如果A是开集, 那么任意$x \in A$, 存在一个开区间I_x使得$x \in I_x \subset A$, 从而

$$A = \bigcup_{x \in A} I_x.$$

下述定理描述了实数域开集的结构.

定理 14.4.3 (开集的结构定理) $\mathbb{R}$的每个开集都可以表示成至多可数个两两不交的开区间的并, 而且构成该开集的这些开区间, 在不考虑次序的意义下唯一.

证明 首先注意一个事实, 两个有交的开区间, 它们的并集还是开区间. 设A是开集, 一个开区间$(a,\ b)$称为是A的极大区间是指: $(a,\ b) \subset A$, 同时, 任何包含于A中的开区间, 如果与$(a,\ b)$有交, 那么一定包含于$(a,\ b)$. 或者说$(a,\ b)$是极大开区间当且仅当不存在以它为真子集的开区间包含于A.

对任意$x \in A$, 存在开区间$I_x \subset A$且$x \in I_x$, 这样的开区间I_x不唯一. 将包含于A中、且包含点x的开区间全体合并, 它们的并集记为

$$J_x = \bigcup_{x \in I_x \subset A} I_x.$$

可以证明 J_x是一个区间(习题), 并且是A的包含点x的极大开区间. 而且, 当$x \neq y$时, J_x与J_y要么相等、要么无交. 因为任意两个极大开区间没有交, 所以A 可以表示为一族两两不交的开区间的并.

两两不交开区间可能是有限个, 亦可能是无限个. 比如集合$(1/2,\ 1) \cup (1/4,\ 1/2) \cup (1/8,\ 1/4) \cup \cdots$. 但是两两不交的开区间构成集合的基数至多为可数无限. 因为从每个开区间中可以取一个有理数, 就得到了一个该集合到$\mathbb{Q}$一个子集的一一对应. □

包含点x的开集称为点x的邻域. 点x一个简单的邻域是 $(x - \varepsilon,\ x + \varepsilon)$. 利用邻域, 可以重新定义数列极限如下.

定义 14.4.4 称数列$\{x_n\}$收敛到实数x, 如果对x的任意邻域A, 存在正整数N使得对任意$n > N$, $x_n \in A$.

容易验证, 该定义和原来极限的定义是等价的, 这是因为

$$\lim_{j \to \infty} x_j = x$$

等价于 对任意$\varepsilon > 0$, 存在正整数N使得对$j \geqslant N$, $x_j \in (x - \varepsilon,\ x + \varepsilon)$. 更重要的是, 用开集定义极限不需要实数距离的概念, 它具有更普遍的意义. 稍后我们也将用开集定义函数的连续性.

下面我们讨论闭集的概念. 闭集的"闭"字意味着这个集合具有某种封闭性. 直观的说, 闭集中收敛数列的极限依然在该集合中. 为更好地理解闭集, 我们先引进集合聚点的概念, 它与数列的极限点有着微妙的不同.

定义 14.4.5 设B是一个$\mathbb{R}$的子集. 实数x称为B的聚点, 是指每个x的邻域中含有B中无限多个点.

这里我们不考虑$\pm\infty$作为集合的聚点. 下述命题, 给出了聚点的一些等价描述.

性质 14.4.6 设$B \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, 则下列条件等价:

1. x是B的聚点;

2. x的任意开邻域都包含有B的不同于x的点;

3. 集合B中有一个数列$\{x_n\}$, $x_n \neq x$ $(\forall n)$, 且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

证明 依照聚点的定义, $1 \Rightarrow 2$和$3 \Rightarrow 1$显然, 我们只需证明$2 \Rightarrow 3$.

设$x_1 \in B$是邻域 $(x-1, x+1)$中异于x的点, $x_2 \in B$是邻域$(x-\delta_2, x+\delta_2)$中异于x的点, 其中$\delta_2 = \min\{\frac{1}{2}, |x-x_1|\}$, $n \geqslant 3$时, 归纳定义点x_n, $x_n \in B$是邻域$(x-\delta_n, x+\delta_n)$ 中异于x的点, 其中

$$\delta_n = \min\{\frac{1}{n}, |x-x_{n-1}|\}.$$

则数列 $\{x_n\}$满足: $x_n \neq x$, 且

$$|x-x_n| < \frac{1}{n}$$

对任何 n 成立, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. □

一个集合的聚点, 可以是自身的点, 也可以不是自身的点. 例如有限开区间$(a,\ b)$, 它的聚点集合是闭区间$[a,\ b]$; 集合$\{1, 1/2, 1/3, \cdots\}$ 只有聚点0. 整数集合$\mathbb{Z}$ 没有聚点.

考虑一个数列$\{x_n\}$和它的附属集合$\{x_1,\ x_2,\ \cdots\}$. 数列的极限点一般不同于附属集合的聚点. 最简单的例子是常数列, 它有一个极限点, 但是它的附属集合是独点集, 没有聚点; 但是附属集合的聚点一定是原数列的极限点, 这是因为, 如果x是集合$\{x_1, x_2, \cdots\}$的聚点, 那么对任意$k \in \mathbb{N}$, 邻域$(x-1/k,\ x+1/k)$中存在一点x_{n_k}, 由此可以得到数列$\{x_n\}$的一个子列收敛到x.

定义 14.4.7 称一个集合为闭集, 是指它含有自身所有的聚点.

没有聚点的集合, 如空集$\emptyset$或有限集合, 自动成为闭集. 闭区间$[a,\, b]$是闭集, 非空的开区间$(a,\, b)$当a或b为实数时不是闭集, 因为端点是聚点. 但是, 实直线$\mathbb{R} = (-\infty,\ +\infty)$, 以及$(-\infty,\ a]$和$[b,\ +\infty)$都是闭集.

如果B为$\mathbb{R}$的子集, 记$B^c = \{x \in \mathbb{R} : x \notin B\}$为$B$的余集. 大多数实数的子集, 比如$[0,\, 1)$和$\{0\} \cup (1,\, 2)$, 既不是开集也不是闭集. 开集与闭集的关系见如下定理.

定理 14.4.8 一个集合B为闭集当且仅当它的余集B^c为开集.

证明 由性质14.4.6可知, $x \in \mathbb{R}$不是集合B的聚点当且仅当存在x的一个开邻

域A_x满足

$$\Big(A_x \setminus \{x\}\Big) \bigcap B = \emptyset.$$

如果B是闭集, $\forall x \in B^c$, 存在它的开邻域A_x与B无交, 即$A_x \subset B^c$, 这说明B^c是开集.

反之, 如果B^c是开集, $\forall x \in B^c$, 存在它的一个开邻域$A_x \subset B^c$, 由A_x与B无交可知, x不是B的聚点, 这说明B的所有聚点都属于B, 所以B是闭集. □

性质 14.4.9 *有限个闭集的并集是闭集; 任意个闭集的交集是闭集.*

证明 这是集合运算的de Morgan定律

$$\bigcap_{i\in I} A_i^c = \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c, \quad \bigcup_{i\in I} A^c = \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c$$

的直接推论. □

例 14.4.1 设A, B是两个实数集合, 定义集合的差

$$B\backslash A = \{x \in B \mid x \notin A\}.$$

证明：如果B是闭集, A是开集, 则$B\backslash A$是闭集.

证明 设x是$B\backslash A$的聚点, 则它一定是B的聚点, 所以$x \in B$. 如果$x \in A$, 则存在它的一个邻域$A_x \subset A$, 这推出$A_x \cap (B\backslash A) = \emptyset$, 与$x$是$B\backslash A$的聚点矛盾. 这说明$x \notin A$, 因此$x \in B\backslash A$.

开集与闭集自然引出如下两个概念.

点x称为集合A的内点, 是指A包含一个x的邻域. A内点的集合称为A的 内部, 记作A°. 集合A的闭包定义为A与它的聚点集的并, 记为$\overline{A}$. 例如, $A = [a,\ b)$ $(a, b \in \mathbb{R})$, 则$A^\circ = (a,\ b)$, $\overline{A} = [a,\ b]$.

性质 14.4.10 *设A是$\mathbb{R}$的子集合.*

1. A°是开集, 而且是包含于A的最大开集;

2. $\overline{A}$是闭集, 而且是包含A的最小闭集.

证明 1. 事实上, $\forall x \in A^\circ$, 存在 x的开邻域 $U_x \subset A$. 这样U_x里的每点都具有与x相同的性质, 即$U_x \subset A^\circ$. 所以

$$A^\circ = \bigcup_{x\in A^\circ} U_x,$$

这说明A°是开集. 又因为开集的内部是它自身, 所以任意包含于A的开集都是A°的子集.

2. 为证明$\overline{A}$是闭集, 我们只需要证明, 把A的聚点添进A之后, 不会产生新的聚点. 设x是$\overline{A}$的聚点, 要证明它也是A的聚点. $\overline{A}$中存在点列$\{x_n\}$ $(x_n \neq x,\ \forall n)$收敛到x, 因此$\varepsilon_n = |x_n - x|$趋于0.

我们构造一个A中的数列$\{x'_n\}$如下：如果$x_n \in A$, 令$x'_n = x_n$；如果$x_n \in \overline{A}\backslash A$, 因为邻域$(x_n - \varepsilon_n,\ x_n + \varepsilon_n)$中一定有$A$的无限多点, 所以可取$x'_n \in A \cap (x_n - \varepsilon_n,\ x_n + \varepsilon_n)$. 新数列$\{x'_n\}$满足

$$|x'_n - x| \leqslant |x'_n - x_n| + |x_n - x| < 2\varepsilon_n,$$

这说明A中的数列$\{x'_n\}(x'_n \neq x)$收敛到x, 所以它也是A的聚点.

如果B是包含A的闭集, 则B包含了A的所有聚点, 所以B包含$\overline{A}$, 这说明$\overline{A}$是包含A的最小闭集. □

整数集$\mathbb{Z}$和有理数集$\mathbb{Q}$不包含任何区间, 所以它们的内点集$\mathbb{Q}^\circ = \mathbb{Z}^\circ = \emptyset$; 又因为$\mathbb{Q}$是$\mathbb{R}$的稠密子集, 所以$(\mathbb{Q}^c)^\circ = \emptyset$. 利用闭包, 我们还可以重新描述稠密的概念. 设集合B是集合A的子集, 称B在A中稠密, 是指$A \subset \overline{B}$, 或者说, A里的点或含于B, 或是B的聚点. 例如, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$; $A = (0,\ 1)$, $B = (0,\ 1) \cap \mathbb{Q}$, $\overline{B} = [0,\ 1] \supset A$.

例 14.4.2 求证: 如果A的子集合B是稠密子集, 则$\sup A = \sup B$.

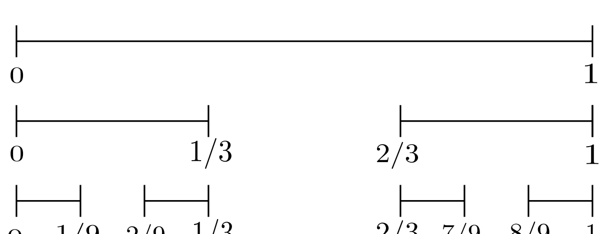
证明 我们只证明$\sup A < +\infty$的情形. 显然$\sup B \leqslant \sup A$. 设$a = \sup A$, 对任意$\varepsilon > 0$, 存在$a_\varepsilon \in A$, $a_\varepsilon > a - \varepsilon/2$. 由假设条件, a_ε或者是B中的点、或者是B的聚点, 所以邻域$(a_\varepsilon - \varepsilon/2,\ a_\varepsilon + \varepsilon/2)$必中有$B$的点$b_\varepsilon$. 则

$$b_\varepsilon > a_\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} > a - \varepsilon,$$

所以$\sup B = a$. □

例 14.4.3 我们来构造一个比较复杂的闭集, 称为Cantor集, 它是许多更一般集合的原型.

Cantor集构造方法是从闭区间[0, 1]开始, 逐次去掉闭区间中间的1/3长度的开区间. 第一步, 我们去掉$(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3})$, 留下的是[0, 1/3] 和 [2/3, 3/3]. 第二步, 我们再分别去掉每个闭区间的中间1/3长度的开区间$(\frac{1}{9},\ \frac{2}{9})$与$(\frac{7}{9},\ \frac{8}{9})$, 剩下四个闭区间 $[0,\ \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9},\ \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},\ \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9},\ 1]$, 如下图所示.



如此重复, 第n步时, 在余下的2^{n-1}个长度为$1/3^{n-1}$的区间中, 去掉中部长度为$1/3^n$的开区间. 无限次重复下去, 就得到 Cantor 集C.

记第n步去掉的有限个开区间之并为J_n, $J_1 = (\frac{1}{2},\ \frac{2}{3})$, $J_2 = (\frac{1}{9},\ \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9},\ \frac{8}{9})$, $\cdots$, 等

等. 令
$$J=\bigcup_{n=1}^{\infty}J_n$$
集合$C=[0,\ 1]\backslash J$称为Cantor集, 它是从区间[0, 1]去掉可数个开区间, 因此它是闭集. 而且, 容易发现C中不包含任何区间, 这说明对任意$x\in C$, x的任何邻域与开集J有交, 所以J在区间[0, 1]稠密.

14.4.2 紧致集合

在实轴的子集合里, 有界闭区间有特殊的性质, 比如闭区间内的任意点列一定有子列收敛到区间中的点、闭区间上的连续函数一致连续, 等等. 下面我们要介绍的紧致集合, 也有着类似的性质.

实数集合B的一个*开覆盖*$\mathcal{A}$是指: $\mathcal{A}$是一族开集的集合, 它所有元素的并集包含B, 即
$$B\subset\bigcup_{A\in\mathcal{A}}A.$$
$\mathcal{A}$的一个*子覆盖*$\mathcal{A}'$是指: $\mathcal{A}'$是$\mathcal{A}$ 的子集, 并且$\mathcal{A}'$也是B的一个开覆盖. 如果$\mathcal{A}$只有可数个元素, 称它是*可数覆盖*, 如果它只有有限个元素, 则称为*有限覆盖*.

例如,
$$\mathcal{A}=\{\left(\frac{1}{n+1},\ \frac{2}{n+1}\right)\ \mid\ n=2,3,\cdots\}$$
是区间(0, 1/2]的开覆盖, 它没有有限子覆盖; 如果在$\mathcal{A}$添加一个包含点0的任意开集, 就得到闭区间[0, 1/2]的一个开覆盖, 可以证明它有有限子覆盖.

定义 14.4.11 *一个实数集合B称为紧致集（简称“紧集”）, 如果它的任意开覆盖有有限子覆盖.*

通常, *任意开覆盖有有限子覆盖*也称为Heine-Borel性质. 下述定理给出了紧致的等价描述.

定理 14.4.12 *设B是一个实数集合, 则下列三个条件等价:*

1. B是紧致集合;

2. B是有界闭集;

3. B中任意点列有子列收敛到B中的点.

简而言之, 集合 B 是紧致的、有界闭的、列紧的三个条件彼此等价.

证明 我们将按以下顺序证明定理, $1\Rightarrow2\Rightarrow3\Rightarrow1$.

设集合B是紧致集合, 我们证明它是有界闭集. 开区间族$\{(-n,\ n):n\in\mathbb{N}\}$覆盖整个$\mathbb{R}$, 也覆盖了集合$B$, 其中的有限个开区间能覆盖$B$, 这说明$B$有界. 设$y$是$B$的聚点. 要

证$y \in B$. 假设不成立, 我们可以构造一个B的开覆盖, 它没有有限子覆盖. 事实上, 设

$$\mathcal{A} = \{\Big(-\infty,\, y - \frac{1}{n}\Big) \cup \Big(y + \frac{1}{n},\, \infty\Big) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

则$\mathcal{A}$覆盖$\mathbb{R}\backslash\{y\}$, 也覆盖$B$. 依假设它有有限子覆盖, 那么存在一个单独的开集, 设为

$$\Big(-\infty,\, y - \frac{1}{n_0}\Big) \bigcup \Big(y + \frac{1}{n_0},\, \infty\Big),$$

它包含B. 于是, y的邻域

$$\Big(y - \frac{1}{n_0},\, y + \frac{1}{n_0}\Big)$$

不含有B的任何点, 这与y是B的聚点相矛盾.

如果B是有界闭集, 那么取值B中的任意点列是有界的, 根据定理14.3.9它有收敛子列. 如果收敛子列某项之后是常数列, 它的极限在B中, 否则, 该子列的极限是B的聚点, 一定属于B. 因此结论3成立.

最后我们需要证明当条件 3 成立时, B是紧致集合. 设$\mathcal{A}$是B的一个开覆盖, 利用有理数的稠密性, 我们首先证明$\mathcal{A}$有可数子覆盖$\mathcal{A}'$.

将端点都是有理数的开区间记为$I_1, I_2, \cdots$, 令

$$\mathcal{A}_k = \{A \in \mathcal{A} \mid \ A \supset I_k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

虽然某些$\mathcal{A}_k$可能是空集, 但由于每个开集一定包含一个有理数端点的开区间, 所以

$$\bigcup_k \mathcal{A}_k = \mathcal{A}.$$

从每个$\mathcal{A}_k$（如果非空）中选取一个开集A_k, 构成$\mathcal{A}$的可数子集$\mathcal{A}' = \{A_k \mid k \in \mathbb{N}\}$, 它是$B$的开覆盖. 事实上, 任给 B中的点x, $\mathcal{A}$中存在一个开集A_x包含它. 利用有理数的稠密性可得, 存在一个有理端点的开区间I_x满足$x \in I_x \subset A_x$. 因此由$\mathcal{A}'$的构造方法可知, $\mathcal{A}'$中有一个开集包含I_x.

接下来我们要证明$\mathcal{A}'$有有限子覆盖, 这样$\mathcal{A}$就有有限子覆盖. 如果$\mathcal{A}'$是有限集合, 结论成立. 设 $\mathcal{A}' = \{A_1, A_2, \cdots\}$是可数无限集合, 若结论不成立, 则对任意$n$, $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$都不覆盖$B$, 选取

$$x_n \in B \backslash \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

就得到B中的一个点列$x_1, x_2, x_3, \cdots$, 它有极限点$x \in B$. 点x一定包含于$\mathcal{A}'$中的某个开集A_N, 但由点列的选择方式知道 $x_{N+1}, x_{N+2}, \cdots$都不属于开集A_N, 矛盾. □

依据上述定理, 有限点集和有界闭区间是紧集的两个简单例子. 更一般地可以证明: 如果B是紧集, 则存在有限闭区间$[a, b]$和开集 A使得$B = [a,\ b] \backslash A$(习题).