第 15 章　连续性与收敛性

相比于前两册讨论的连续函数和级数, 在本章中, 我们将从新的角度重新审视定义在一般集合上, 特别是紧致集合上函数的连续性、一致连续性和连续函数扩张, 以及函数列的一致收敛性等内容. 这些内容会涉及到上一章讨论过的实轴的拓扑. 通过本章的讨论, 加深对连续性和收敛性的进一步理解.

§15.1　连续函数

在第一册中, 我们系统讨论了定义在区间上的连续函数. 为研究定义在一般集合上的连续函数, 我们简要回顾函数的定义.

一个函数 f由定义域 D, 值域 R (R, D都为$\mathbb{R}$的非空子集), 和一个对应 $x \mapsto f(x)$组成, x取遍D中所有的点时, $f(x) \in R$. 称

$$f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$$

为函数的像, 它是值域的子集. 称函数f为满的, 是指$f(D) = R$; 称函数f为单的, 是指对任意x_1, $x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$时有$f(x_1) \neq f(x_2)$.

为方便起见, 通常我们取值域为整个实数域$\mathbb{R}$. 我们不区分仅仅值域不同的函数. 比如, 定义域为$\mathbb{R}$, 值域为$\mathbb{R}$ 的函数 $f(x) = x^2$ 和定义域为$\mathbb{R}$, 值域为$[0, \infty)$的函数$g(x) = x^2$看成相同的函数. 但是我们必须区分对应规则相同但是定义域不同的函数. 比如, 定义域为 $\mathbb{R}$的函数$f(x) = x^2$和定义域为$[0, 1]$的函数$g(x) = x^2$是不同的函数.

定义 15.1.1　*设D是$\mathbb{R}$的非空子集, f是定义在D上的函数, $x_0 \in D$. 称f在点x_0连续, 是指对任意$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 使得对D中满足$|x - x_0| < \delta$的任意x, 都有*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

称f 在 D 中连续（或简称连续）, 是指f在D中的每点连续.

从定义可以看出, f在点x_0连续, x_0附近的x的函数值$f(x)$可以任意逼近$f(x_0)$. 这表明函数的连续性与极限之间存在密切关系.

定义 15.1.2　*设f是D上的函数, x_0是D的聚点. 称f在x_0处有极限, 是指存在一个实数a, 对任意$\varepsilon > 0$, 存在δ, 使得对D中满足$0 < |x - x_0| < \delta$ 的任意x, 都有*

$$|f(x) - a| < \varepsilon.$$

此时称a为f在x_0处的极限, 记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.

依定义, 如果$x_0 \in D$是集合D的聚点, 则 f在点x_0连续当且仅当$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. 如果$x_0 \in D$不是集合$D$的聚点, 那么存在$x_0$的一个邻域$A_0 = (x_0 - \varepsilon_0,\ x_0 + \varepsilon_0)$满足$D \cap A_0 = \{x_0\}$, 这样的点称为集合$D$的孤立点. 函数在孤立点自动连续.

15.1.1 连续的等价条件

我们首先讨论连续性与数列极限的关系.

性质 15.1.3 *设x_0为函数f的定义域D的聚点. 极限$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在的充分必要条件是对$D$中收敛于$x_0$的任意点列$\{x_n\}$ （$x_n \neq x_0, \forall n$）, 数列$\{f(x_n)\}$收敛.*

证明 由函数极限定义, 必要性显然.

为证明充分性, 我们首先证明： 所有数列$\{f(x_n)\}$具有相同的极限, 并设此极限为a.

设$\{x_n\}$与$\{y_n\}$是D中收敛于x_0的两个数列, $\{f(x_n)\}$收敛于a, $\{f(y_n)\}$收敛于b. 由于混合数列x_1, y_1, x_2, y_2, $\cdots$仍然有极限x_0, 它在f下的像构成的数列

$$f(x_1),\ f(y_1),\ f(x_2),\ f(y_2),\ \cdots$$

也收敛, 所以$a = b$.

假设$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$不成立. 那么依据极限定义的否命题就有: 存在$\varepsilon_0 > 0$, 使得对任意 $1/n$, 存在一点$z_n \in D$, $0 < |z_n - x_0| < 1/n$ 但

$$|f(z_n) - a| > \varepsilon_0.$$

这意味着数列$\{z_n\}$收敛于x, 但数列$\{f(z_n)\}$不收敛于a, 矛盾. □

定理 15.1.4 *设f是D上的函数. 那么f连续当且仅当对D中的任意收敛数列$\{x_n\}$, 且极限 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x \in D$, 数列$\{f(x_n)\}$也收敛.*

证明 定理的必要性显然, 这是因为如果$x_0 \in D$是集合D的一个聚点, 那么函数f在x_0连续等价于$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

为证明充分性, 在D中取一点x_0, 根据混合数列的证法, 我们能得到对于所有收敛于x_0的数列$\{x_n\}$, 数列$\{f(x_n)\}$有相同的极限; 又因为常数列$f(x_0)$, $f(x_0)$, $\cdots$的极限是$f(x_0)$, 所以公共的极限是$f(x_0)$. 如果x_0不是D的聚点, 不须任何论证. 若x_0是聚点, 由上一个性质知 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在且等于公共极限$f(x_0)$. □

下面我们从拓扑的角度考察函数的连续性.

设f是定义在D上的函数, 值域为R, 设$M \subset D$、$N \subset R$分别是定义域和值域的子集合. 定义N关于函数f的原像如下：

$$f^{-1}(N) = \{x \in D \mid f(x) \in N\}.$$

如果对$\forall x \in M$, $f(x) \in N$, 就称f把M映到N. 函数f把M映到N等价于$M \subset f^{-1}(N)$. 例如函数 $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, 则

$$f^{-1}\big((0,\,+\infty)\big) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (2n\,\pi\,,\,(2n+1)\,\pi\,),$$
$$f^{-1}\big([1,\ +\infty)\big) = \{2n\,\pi\, + \frac{\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

如果函数f是定义在整个实直线$\mathbb{R}$上, f在点x_0连续等价于：对任意 $\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$使得

$$f((x_0-\delta,\ x_0+\delta)) \subset \big(f(x_0)-\varepsilon,\ f(x_0+\varepsilon)\big).$$

用邻域的概念, 这等价于 *对于$f(x_0)$的每个邻域V, 存在一个x_0的邻域U, 使得$f(U) \subset V$*. 或者说, 函数f在点x_0连续等价于$f(x_0)$的任意邻域的原像包含x_0 的一个邻域.

但是一般来说x_0的邻域在连续函数下的像不会包含$f(x_0)$的邻域. 例如, 常值函数是连续函数, 但它的像只有一个点. 对于定义在开集上的函数, 我们有如下的更简洁的连续性描述.

定理 15.1.5 *设f是定义在开集D上的函数. 那么f连续当且仅当每个开集的原像是开集.*

证明 设f连续, A是开集, 须证$f^{-1}(A)$是开集. 取$x_0 \in f^{-1}(A)$, 这意味着 $x_0 \in D$, 且$f(x_0) \in A$. 因为A是开集, $\exists\varepsilon > 0$ 使得

$$\big(f(x_0)-\varepsilon,\ f(x_0)+\varepsilon\big) \subset A.$$

由f的连续性, $\exists\,\delta$满足

$$f\big((x_0-\delta,\ x_0+\delta)\cap D\big) \subset \big(f(x_0)-\varepsilon,\ f(x_0)+\varepsilon\big) \subset A.$$

因为D是开集, 可以取δ充分小可以使$(x_0-\delta,\ x_0+\delta) \subset D$, 从而

$$(x_0-\delta,\ x_0+\delta) \subset f^{-1}(A),$$

所以$f^{-1}(A)$是开集.

反之, 设对于每个开集A, $f^{-1}(A)$是开集. 设$x_0 \in D$, 对$\forall\varepsilon > 0$, 取

$$A = \big(f(x_0)-\varepsilon,\ f(x_0)+\varepsilon\big).$$

因为$f^{-1}(A)$是包含x_0 的开集, 所以存在x_0的邻域$(x_0-\delta,\ x_0+\delta) \subset f^{-1}(A)$. 这意味着$|x-x_0| < \delta$推出 $f(x) \in A$. □

注记： *定理15.1.5意味着定义连续只需要开集, 不需要用到距离. 这在后续课程“拓扑学”中会仔细讨论.*

为讨论不连续函数的间断性, 我们首先回顾函数左右极限的概念.

设x_0是D的聚点. 称f在x_0 有*左极限* (*右极限*)是指存在实数a满足：对任意$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$ 使得对任意$x \in D$, 当 $x_0 - \delta < x < x_0$ $(x_0 < x < x_0 + \delta)$ 时

$$|f(x) - a| < \varepsilon.$$

此时称a为f在x_0 处的左(右)极限, 分别记为

$$a = f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0^-} f(x),\ a = f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

显然, f在x_0有极限a当且仅当f在x_0的左右极限均为a.

类似地, 称f在x_0 *左连续* (*右连续*) 是指对于任意$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$使得对于任意$x \in D \cap (x_0 - \delta,\, x_0]$ $(x \in D \cap [x_0,\, x_0 + \delta))$, 成立

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

f在x_0连续y当且仅当f在x_0既左连续又右连续.

利用左右极限, 我们可以分析定义在一般集合上函数的不连续性. 与第一册类似, 可以定义函数的可去间断点、第一类间断点和第二类间断点等, 这里不再重复.

例 15.1.1 Dirichlet函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & 若x \text{ 是有理数}, \\ 0, & 若x\text{是无理数}. \end{cases}$$

将$D(x)$视作$\mathbb{R}$上的函数, 由有理数的稠密性可以发现, 它在任意一点的左右极限都不存在, 所以定义域的每一点都是Dirichlet函数的第二类间断点. 但是, 如果$D(x)$限制在有理数集$\mathbb{Q}$上, 它是常值函数, 当然是连续函数.

函数在一点的连续还可以有更精确的定量刻画. 设f是定义在集合D上的函数, 对于任意的$\delta > 0$, 定义$\omega_f(x_0,\, \delta)$如下：

$$\omega_f(x_0,\, \delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| \,\big|\, x, y \in D,\, |x - x_0| < \delta,\, |y - x_0| < \delta\}.$$

从定义可以看出, $\omega_f(x_0,\, \delta)$是函数f在集合$D \cap (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$的振幅. 而且, 当 $\delta_2 > \delta_1 > 0$ 时, 因为

$$D \cap (x_0 - \delta_1,\ x_0 + \delta_1) \subset D \cap (x_0 - \delta_2,\ x_0 + \delta_2),$$

所以从上确界的定义就推出

$$\omega_f(x_0,\, \delta_2) \geqslant \omega_f(x_0,\, \delta_1),$$

或者说 $\omega_f(x_0,\ \delta)$关于δ单调增加, 由单调性可知, 极限

$$\omega_f(x_0) = \lim_{\delta \to 0^+} \omega_f(x_0,\, \delta)$$

存在. $\omega_f(x_0)$度量了在x_0附近f的函数值的变化幅度, 称为函数f在点x_0的振幅.

性质 15.1.6 函数 f 在一点 x_0 连续, 当且仅当 f 在 x_0 的振幅为零

$$\omega_f(x_0) = \lim_{\delta \to 0^+} \omega_f(x_0, \delta) = 0.$$

证明 函数f在点x_0连续等价于

$$\lim_{\delta \to 0^+} \sup\{|f(x) - f(x_0)| \;\Big|\; |x - x_0| < \delta\} = 0.$$

如果$\omega_f(x_0) = 0$, 不等式

$$\sup\{|f(x) - f(x_0)| \;\Big|\; |x - x_0| < \delta\} \leqslant \omega_f(x_0, \delta)$$

立即推出f在x_0连续.

反之, 如果f在x_0连续, 对任意$\delta > 0$, 设$x, y \in D$, 且$|x - x_0| < \delta$, $|y - x_0| < \delta$, 由

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(x_0)| + |f(y) - f(x_0)|$$

可得

$$\omega_f(x_0, \delta) \leqslant 2 \sup\{|f(x) - f(x_0)| \;\Big|\; |x - x_0| < \delta\}.$$

上式中令$\delta \to 0$, 就证明了$\omega_f(x_0) = 0$. □

例 15.1.2 设函数

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

它在$x = 0$处不连续. 数列$\{1/2n\pi\}$和数列$\{1/(2n+1)\pi\}$都趋于0，且 $f(1/2n\pi) - f(1/(2n+1)\pi = 2$, 由此可以推出$\omega_f(0, \delta) = 2$, $\forall \delta > 0$, 所以$\omega_f(0) = 2$.

15.1.2 函数的一致连续性

有关连续性的另一个重要概念是一致连续.

定义 15.1.7 设f是定义在集合D上的函数, 称f一致连续是指: 对任意$\varepsilon > 0$, 存在一个$\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 对任意$x, y \in D$, 当 $|x - y| < \delta$时

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

一致连续函数一定是连续的, 但反之不一定成立. 熟知的例子$f(x) = 1/x$ $(x \in (0, 1))$就是连续但不一致连续的.

前面(定理15.1.4)我们已经证明了, 连续函数把定义域的收敛数列映为值域的收敛数列. 关于函数的一致连续性也有类似的结论, 它可以用Cauchy列刻画.

定理 15.1.8 *设f是定义在集合D上的一致连续函数, 如果 $\{x_n\} \subset D$是Cauchy列, 那么 $\{f(x_n)\}$也是Cauchy列. 反之, 设 f 是定义在有界集合D上的函数, 如果 f 把Cauchy列映为Cauchy列, 那么 f 在 D 上一致连续.*

证明 首先, 设f在D上一致连续, $\{x_n\}$是D内的Cauchy列. 因此, 对任意$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 当$x,\ y \in D$且$|x-y| < \delta$时,

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

对于正数δ, 存在N, 当$k,\ j > N$时$|x_k - x_j| < \delta$, 因此

$$|f(x_k) - f(x_j)| < \varepsilon,$$

这说明 $\{f(x_n)\}$是Cauchy列.

其次, 设函数f 把有界集合D内的任意Cauchy列 $\{x_n\}$ 映为Cauchy列 $\{f(x_n)\}$. 假设 f 在 D 上不一致连续, 则存在$\varepsilon_0 > 0$, 对于任意的$n \in \mathbb{N}$, 都有$x_n,\ y_n \in D$, $|x_n - y_n| < 1/n$, 但

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0.$$

因为 D 有界, 所以数列$\{x_n\} \subset D$ 有收敛子列$\{x_{n_k}\}$, 记该子列收敛到一点x_0(不一定属于D). 显然, 相应的子列$\{y_{n_k}\}$也收敛到x_0. 这两个子列的混合数列

$$x_{n_1},\ y_{n_1},\ x_{n_2},\ y_{n_2}, \cdots$$

收敛, 所以是Cauchy列. 但依假设, 数列

$$f(x_{n_1}),\ f(y_{n_1}),\ f(x_{n_2}),\ f(y_{n_2}), \cdots$$

不是Cauchy列, 因为$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geqslant \varepsilon_0$, 与定理条件相矛盾. □

下面介绍的两个概念, 定量描述了函数的一致连续性.

设f是定义在集合D上的函数, 称函数f满足*Lipschitz* 条件, 是指存在正常数M, 对所有定义域里的x, y有

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|.$$

设$0 < \alpha < 1$, 称函数f满足α阶的 *Hölder* 条件, 是指存在正常数M, 对所有定义域里的x, y有

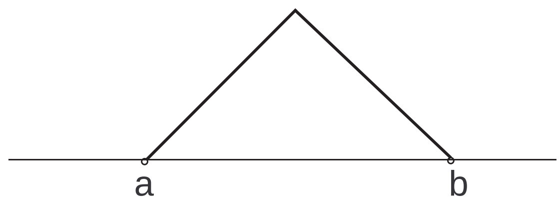
$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|^{\alpha}.$$

连续函数的范围很广. 可以说, 满足任何合理条件的连续函数都可以构造出来.

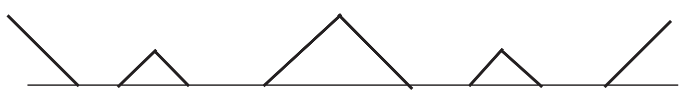
例 15.1.3 构造一个实直线上的连续函数$f(x)$, 它恰好在给定的闭集A上等于0.

因为定义在$\mathbb{R}$上、满足$f(x)=0$的x全体是闭集, 所以必须要求集合A是闭集. A的余集A^c是开集. 根据开集的结构定理(定理14.4.3), A^c是至多可数个两两不交的开区间的并集. 由此可以简单地构造一个函数满足要求.

函数f在A上等于0, 说明f在A^c的每个开区间端点等于0. 在每个有限开区间上我们可以做一个金字塔形函数(参看下图),



它从一端以斜率1上升到中点后在以斜率-1下降到另一端. 对于无限的开区间(顶多有两个, $(-\infty, a)$和$(b, +\infty)$), 我们分别始终保持斜率-1和$+1$. 整个图形见下图. 由构造方法知得到的函数f恰好在A上为0.



可以证明, f满足 Lipschitz 条件

$$|f(x)-f(y)| \leqslant |x-y|.$$

这蕴含连续性.

15.1.3 连续函数的性质

函数之间有加法、数乘等运算. 注意到函数连续性等价于把收敛数列映到收敛数列(定理15.1.4), 由此容易证明：如果f, g为D上的连续函数, $a\in\mathbb{R}$ 为常数, 则D上的函数$f\pm g$, $a\cdot f$和$f\cdot g$都连续. 并且, 在$g\neq 0$的地方, 我们能定义f/g, 它在 $D\backslash\{x\mid g(x)=0\}$上连续.

对于函数的复合, 我们有

定理 15.1.9 设g为E上的连续函数, f为D上的连续函数, 且$f(D) \subset E$. 那么复合函数

$$(g \circ f)(x) := g\big(f(x)\big)$$

为D上的连续函数.

证明 取任意D中的点列$x_1, x_2, x_3, \cdots$, 且它收敛于$x \in D$. 根据定理15.1.4, 由于f连续, E中的点列$f(x_1)$, $f(x_2)$, $\cdots$收敛于 $f(x) \in E$. 又由于g连续,

$$\lim_{n\to\infty} g\big(f(x_n)\big) = g\big(f(x)\big) = g \circ f(x).$$

再由定理15.1.4知$f \circ g$ 连续. □

例 15.1.4 设f, g为D上的连续函数. 定义D上的函数$\max(f, g)$为: 当$f(x) \geqslant g(x)$时取值$f(x)$, 否则取值$g(x)$. 类似定义$\min(f, g)$. 那么$\max(f, g)$和$\min(f, g)$连续.

证明 函数$|f|(x) := |f(x)|$在D上连续, 因为它是绝对值函数与f的复合. 应用下面的等式

$$\max(f, g) = \frac{f+g+|f-g|}{2},$$
$$\min(f, g) = \frac{f+g-|f-g|}{2},$$

以及绝对值函数的连续性, 即知结论成立. □

第一册我们曾经讨论过有界闭区间上连续函数的性质, 其中介值定理和最大最小值定理说明, 定义在闭区间上的连续函数, 其值域也是闭区间, 或者说连续函数把闭区间映到闭区间. 这里将我们讨论定义在紧致集合上连续函数的类似性质.

性质 15.1.10 设f是定义在紧致集合E上的连续函数, 则它的值域$f(E)$也是紧致集合.

证明 根据紧致集合的等价条件（见定理14.4.12）, 我们只要证明$f(E)$是有界闭集即可. 由f的连续性, 对于$\varepsilon = 1$, $x \in E$, 存在x的一个开邻域U_x使得对任意 $x' \in E \cap U_x$, 都有$|f(x') - f(x)| < 1$, 因此$|f(x')| < |f(x)| + 1$, 或者说$|f|$在$E \cap U_x$内有上界$|f(x)| + 1$. 开集族$\{U_x \mid x \in E\}$构成了E的一个开覆盖, 它有有限子覆盖$\{U_{x_1}, \cdots, U_{x_N}\}$, 则 $M = 1 + \max\{|f(x_1)|, \cdots, |f(x_n)|\}$是$|f|$的上界.

为证明E是闭集, 设a是$f(E)$的聚点, 则存在数列$\{y_n\} \subset f(E)$, $\lim y_n = a$. 设$y_n = f(x_n)$, $x_n \in E$, $n = 1, 2, \cdots$, 则数列$\{x_n\}$有收敛子列$\{x_{n_k}\}$收敛到E中一点x_0. 由f的连续性,

$$a = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0).$$

所以$a \in f(E)$. □

推论 15.1.11 设f是紧致集合E上的连续函数, 则f在E取到最大值和最小值.

证明　设$a = \sup f(E)$, 因为$f(E)$是紧集, 当然是有界闭集, 则a有限且$a \in f(E)$, 这说明存在 $x_0 \in E$, 使得 $f(x_0) = a$, 即 f 在 E 上取到最大值a. □

虽然紧致集合上的连续函数可以取到最大最小值, 但介值定理不一定成立, 因为定义域E不一定是连通集合. 对于连通的紧致集合, 如闭区间上连续函数, 介值性是成立的.

定理 15.1.12　*(介值定理) 设f为定义在区间$[a, b]$上的连续函数, 且满足*

$$f(a) < f(b),$$

那么对于任意$c \in \big(f(a), f(b)\big)$, 都存在$x_0 \in (a, b)$使得$f(x_0) = y$.

该定理已在本书第一册用二分法给出了证明, 这里我们利用确界原理给出另一个证明.

证明　设

$$E = \{x \in [a,\ b] \;\Big|\; f(x) < c\},$$

由定理条件它是闭区间$[a,\ b]$的非空子集. 设$x_0 = \sup E$, 则$x_0 \in (a,\ b)$. 下面证明$f(x_0) = c$.

存在E中的点列$\{x_n\}$收敛于x_0, 所以由 $f(x_n) < c$可得$f(x_0) \leqslant c$. 如果$f(x_0) < c$, 由f的连续性, 存在$\delta > 0$, 函数f在区间$(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$内取值均小于$c$, 那么$x_0 + \delta/2 \in E$, 这与$x_0 = \sup E$矛盾. 所以$f(x_0) = c$. □

下述一致连续性定理, 是定义在有界闭区间上连续函数一致连续性的推广.

定理 15.1.13　*（一致连续性定理）设f为紧集E上的连续函数. 那么它一致连续.*

证明　定理可以用反证法或者Heine-Borel性质来证明. 这里我们引入Lebesgue 数的概念来证明定理.

由于f连续, 对任意$\varepsilon > 0$以及任意的$x \in E$, 总存在包含x的开邻域U_x, 使得

$$|f(y) - f(z)| < \varepsilon$$

对所有$y,\ z \in U_x \cap E$成立, 从而$\{U_x : x \in E\}$是E的一个开覆盖.

我们将证明存在一个只与ε有关的正数δ, 使得对任意$y, z \in E$, 当$|y - z| < \delta$时就存在上述某个U_x包含y, z. 因此, 当$|y - z| < \delta$时,

$$|f(y) - f(z)| \leqslant |f(y) - f(x)| + |f(x) - f(z)| < 2\varepsilon,$$

这说明f一致连续.

正数 δ 称为E 的开覆盖$\{U_x : x \in E\}$ 的 Lebesgue 数. 假设不存在这样的 Lebesgue 数 $\delta > 0$, 那么, 对任意 $1/n$, 存在 $x_n,\ y_n \in E$, 满足 $|x_n - y_n| < 1/n$ 但上述开覆盖中没有任何一个开集同时包含 x_n 和 y_n. 由于E是紧集, 存在$\{x_k\}$的的子列$\{x'_k\}$收敛于$x \in E$,

从而$\{y_k\}$的相应子列$\{y'_k\}$也收敛于x. 在开覆盖中取一个包含$x \in E$的开集U, 当k充分大时, x'_k, y'_k 都落在U中. 矛盾. □

作为一致连续概念的一个应用, 我们将证明如下扩张定理. 它表明, 一个一致连续函数, 可以自然扩充到定义域的闭包上, 并且保持一致连续性.

定理 15.1.14 (连续扩张定理) *设f是定义在集合D上的一致连续函数, 则在D的闭包$\overline{D}$上存在唯一的一致连续函数 F满足$F(x) = f(x)$ $(\forall x \in D)$. F称为f的连续扩张函数.*

证明 设x 是集合D的聚点, 则存在D内的数列$\{x_n\}$ $(x_n \neq x)$收敛到x, 如果扩张函数F存在, 则 $F(x) = \lim F(x_n) = \lim f(x_n)$. 可以看出, $F(x)$是收敛数列$\{f(x_n)\}$的极限. 因此可以通过极限定义扩张函数F, 并且这样的函数唯一.

设$x \in \overline{D} \backslash D$, 数列$\{x_n\} \subset D$收敛到$x$, 依照定理15.1.8, $\{f(x_n)\}$是Cauchy列, 因此定义

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

为保证定义的合理性, 还需说明, 如果D内存在另一个数列$\{x'_n\}$也收敛到x, 同理$\{f(x'_n)\}$ 也是Cauchy列, 这样我们只要证明

$$\lim f(x_n) = \lim f(x'_n)$$

就说明了 $F(x)$ 定义的合理性.

根据 f的一致连续性, 对任意$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 当x, $y \in D$且$|x - y| < \delta$时, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$; 由于数列$\{x_n\}$和$\{x'_n\}$都收敛到$x$, 所以当$n$充分大时$|x_n - x'_n| < \delta$, 这推出

$$|f(x_n) - f(x'_n)| < \varepsilon,$$

因此两个Cauchy列有相同极限. 这样就证明了$F(x)$ 定义的合理性.

下面证明函数F在$\overline{D}$ 上一致连续.

任给 $\varepsilon > 0$, 存在$\delta_1 > 0$, 当x', $y' \in D$且$|x' - y'| < \delta_1$时,

$$|f(x') - f(y')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

取 $\delta = \delta_1/3$, 则对任意的 x, $y \in \overline{D}$, 当 $|x - y| < \delta$ 时, 根据 F 的定义, 存在$x' \in D$, $|x - x'| < \delta$, 使得

$$|F(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

同样存在 $y' \in D$, $|y - y'| < \delta$, 使得

$$|F(y) - f(y')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

由

$$|x'-y'|\leqslant|x'-x|+|x-y|+|y-y'|<3\delta=\delta_1,$$

得到 $|f(x')-f(y')|<\varepsilon/3$, 所以

$$|F(x)-F(y)|\leqslant|F(x)-f(x')|+|f(x')-f(y')|+|F(y)-f(y')|<\varepsilon.$$

这就证明了F的一致连续性. □

连续扩张定理的一个简单应用是下面指数函数定义的例子.

例 15.1.5 设$a>0$, 当$x\in\mathbb{Q}$时, 指数函数

$$f(x)=a^x$$

可以用初等方法定义.

设I是任意一个有界闭区间, 容易验证, $f(x)$在$I\cap\mathbb{Q}$一致连续, 所以它在I上有唯一的连续扩张, 这样就定义了$f(x)=a^x$ 在 I 上的值.

对于任意$x\in\mathbb{R}$, 取一个区间I包含x使其成为内点, 就给出了指数函数$f(x)=a^x$在$\mathbb{R}$ 上的定义, 而且该定义与区间选取无关.

15.1.4 单调函数

称D上的函数f单调增(减)是指对任意x, $y\in D$, 当$x<y$时, 有$f(x)\leqslant f(y)$ ($f(x)\geqslant f(y)$). 单调增和单调减函数统称为单调函数. 下面我们把讨论限制在函数的定义域为区间的情形.

我们知道单调函数不一定连续, 但是单调函数的左右极限一定存在, 从而有界的单调函数最多只有第一类间断点（跳跃点）.

定理 15.1.15 *设f为区间上的单调增函数. x_0是区间的内点, 则右极限 $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$和左极限$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$都存在, 并且*

$$f(x_0-0)\leqslant f(x_0)\leqslant f(x_0+0).$$

对区间上单调减函数也有类似结果. 具体证明见本书第一册 §1.3.

这里,从振幅的角度, 我们可以看出单调函数 f 在点x的振幅 $\omega_f(x)$ 等于 f 在该点左右极限差的绝对值. 如果点 x_0 是跳跃点, 那么振幅就是“跳跃度”.

推论 15.1.16 *设f是定义在开区间$(a,\ b)$上的单调函数, 对任意$x_0\in(a,\ b)$,*

$$\omega_f(x_0)=|f(x_0+0)-f(x_0-0)|.$$

下面的定理, 描述了单调函数间断点的个数.

定理 15.1.17 设f为开区间I上的单调函数. 那么除去区间中的至多可数个点, f在其它的点连续. 或者说开区间上单调函数的不连续点至多只有可数个.

证明 不妨设 f 单调增, 我们用两种方法证明.

证法一: 由于开区间I是可数个紧致区间的并集. 比如当 $a<b$为实数时,

$$(a,\,b)=\bigcup_{n>2/(b-a)}[a+1/n,\,b-1/n].$$

只须证明f限制在I的每个紧子区间$[c,\,d]$上命题成立. 我们将证明对任意$m\in\mathbb{N}$, 函数f在$[c,\,d]$ 上振幅超过$1/m$的点的个数有限, 这样 f的不连续点集合可以表示为可数个包含有限个不连续点集合的并

$$\{x\in[c,\ d]:\omega_f(x)>0\}=\bigcup_{m=1}^{\infty}\{x\in[c,\ d]:\omega_f(x)>\frac{1}{m}\},$$

所以它是一个至多可数集合.

设$x_1,x_2,\cdots,x_k\in[c,\,d]$是振幅大于$1/m$的点, $x_1<x_2<\cdots<x_k$. 我们有

$$f(x_i+0)-f(x_i-0)\geqslant\frac{1}{m},\quad i=1,2,\cdots,k.$$

对上式求和, 利用$f(x_i+0)-f(x_{i+1}-0)\leqslant 0$可得

$$f(d)-f(c)\geqslant f(x_k+0)-f(x_0-0)\geqslant\frac{k}{m}.$$

这说明振幅大于$1/m$的点的个数k有限.

证法二: 记$D(f)$为f的不连续点集合. 对于任意$x\in D(f)$, 定义非空开区间如下

$$J_x=\big(f(x-0),\,f(x+0)\big).$$

对于$D(f)$ 中任意不等的两点 x,y, 不妨设$x<y$, 那么对于任意$z\in(x,\,y)$, 有$f(x+0)\leqslant f(z)\leqslant f(y-0)$. 因此 $J_x\cap J_y=\emptyset$.

对于每一个 $x\in D(f)$, 根据有理数的稠密性, 可以从开区间J_x中取出一个有理数r_x, 那么$D(f)$与$\mathbb{Q}$的子集 $\{r_x:x\in D(f)\}$ 有一一对应, 从而$D(f)$为至多可数集合. □

习题15.1

1. 设f为定义在一个闭集上的函数. 证明: f连续当且仅当每个闭集的原像为闭集.

2. 设$f_1,\cdots,f_n$为$\mathbb{R}$上的连续函数, A是由不等式$f_1(x)\geqslant 0,\ \cdots,\ f_n(x)\geqslant 0$定义的集合

$$A=\{x\in\mathbb{R}:f_1(x)\geqslant 0,\,f_2(x)\geqslant 0,\,\cdots,\,f_n(x)\geqslant 0\},$$