任意$0 < r < R$, 幂级数在区间$[-r, r]$ 绝对收敛而且一致收敛, 所以和函数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$在$(-R, R)$连续.

更一般的是下述结论.

性质 15.2.16 *设连续函数列$\{f_n\}$在开集D上逐点收敛到函数f. 如果对任意的紧致子集$E \subset D$, 函数列$\{f_n\}$限制在 E上一致收敛, 则f是D上的连续函数.*

满足条件的函数列也称为*内闭一致收敛*. 结论成立的原因是因为连续是局部性质. 事实上, 对任意$x \in D$, 可以选取一个闭区间$[a, b] \subset D$ 且 $x \in (a, b)$, 则由$\{f_n\}$ 在$[a, b]$一致收敛推出f在x点连续.

例 15.2.6 实轴$\mathbb{R}$上处处连续、处处不可微函数的存在性.

处处不可微连续函数的第一个例子是Weierstrass以及Bolzano构造的. 我们下面介绍的实例属于Van der Waerden.

设函数$u(x)$为

$$u(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ 2 - x, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

将$u(x)$按周期等于2扩充到所有实数, 既$u(x + 2) = u(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, 则$u(x)$是$\mathbb{R}$上的连续函数. 定义

$$u_k(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^k u(4^k x),$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x).$$

因为$0 \leqslant u_k(x) \leqslant (3/4)^k$, 所以由Weierstrass判别法, $f(x)$是$\mathbb{R}$上的连续函数.

直观上看, $u_k(x)$是振幅为$(3/4)^k$、周期为 $2/4^k$的锯齿形函数, $f(x)$是这些函数的叠加. 为证明f处处不可微, 对任意$x \in \mathbb{R}$, 我们将证明存在数列 $a_n \to x^-$, $b_n \to x^+$ $(n \to \infty)$, 并且当$n \to \infty$时,

$$\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$$

没有极限, 这可以推出函数f在点x不可微.

对$n \in \mathbb{N}$, 定义

$$a_n = \frac{[4^n x]}{4^n}, \ b_n = \frac{[4^n x] + 1}{4^n},$$

显然$a_n \leqslant x < b_n$, 并且 $|x - a_n|$和$|b_n - x|$都小于或等于$|b_n - a_n| = 1/4^n$, 所以

$$a_n \to x^-, \quad b_n \to x^+.$$

我们需要计算

$$f(b_n) - f(a_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \big(u_k(b_n) - u_k(a_n)\big).$$

当$k > n$时, 由于$4^k b_n - 4^k a_n = 4^{k-n}$是偶数, 所以

$$u_k(b_n) - u_k(a_n) = \left(\frac{3}{4}\right)^k \big(u(4^k b_n) - u(4^k a_n)\big) = 0.$$

当$k \leqslant n$时, 由于区间$\big([4^n x],\ [4^n x]+1\big)$中没有整数, 所以区间

$$\left(4^k a_n,\, 4^k b_n\right) = \left(\frac{[4^n x]}{4^{n-k}},\ \frac{[4^n x]+1}{4^{n-k}}\right)$$

中没有整数, 从函数$u(x)$的定义可得

$$\begin{aligned} |u_k(b_n) - u_k(a_n)| &= \left(\frac{3}{4}\right)^k |u(4^k b_n) - u(4^k a_n)| \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^k (4^k b_n - 4^k a_n) = \left(\frac{3}{4}\right)^k \frac{1}{4^{n-k}}. \end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned} |f(b_n) - f(a_n)| &= \left|\sum_{k=0}^{n} \big(u_k(b_n) - u_k(a_n)\big)\right| \\ &\geqslant |u_n(b_n) - u_n(a_n)| - \sum_{k=0}^{n-1} \big|u_k(b_n) - u_k(a_n)\big| \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k \frac{1}{4^{n-k}} \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n, \end{aligned}$$

因此

$$\left|\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}\right| \geqslant \frac{1}{2} 3^n.$$

□

通常收敛推不出一致收敛. 如果连续函数列的极限函数连续, 在某些特定条件下可以得到这种收敛是一致的.

定理 15.2.17 ($Dini$) 设$\{f_n\}$是紧集D上的连续函数列, 并且对每一个$x \in D$, 数列$\{f_n(x)\}$ 当 $n \to 0$ 时都单调递减地收敛于连续函数f, 那么f_n在D上一致收敛于f.

证明 不妨设$\{f_n\}$单调递减趋于0, 否则我们可以用$f_n - f$代替f_n $(\forall n)$. 因此将证明$\{f_n\}$ 当 $n \to \infty$ 时一致收敛于 0.

任意给定$x \in D$以及$\varepsilon > 0$, 存在$N(x) = N(x, \varepsilon)$使得$0 \leqslant f_{N_x}(x) < \varepsilon$. 由于$f_N$在$x$连续, 存在$n = n(x)$使得在$x$的邻域$\big(x - 1/n(x),\, x + 1/n(x)\big)$有

$$0 \leqslant f_{N(x)}(y) \leqslant \varepsilon, \quad \forall y \in \left(x - \frac{1}{n(x)},\, x + \frac{1}{n(x)}\right) \cap D. \tag{$*$}$$

于是这些开区间$\big(x - 1/n(x),\, x + 1/n(x)\big)$, $x \in D$, 构成D的一个开覆盖. 由D紧致, 存在有限子覆盖 $(x_j - 1/n_j, x_j + 1/n_j)$, 其中$n_j := n(x_j)$, $j = 1, \cdots, k$. 令$N = \max\big(N(x_1), \cdots, N(x_k)\big)$, 由$(*)$与$f_n$的递减性质可得, 对任意$k \geqslant N$以及任意$x \in D$, $0 \leqslant f_k(x) < \varepsilon$成立.