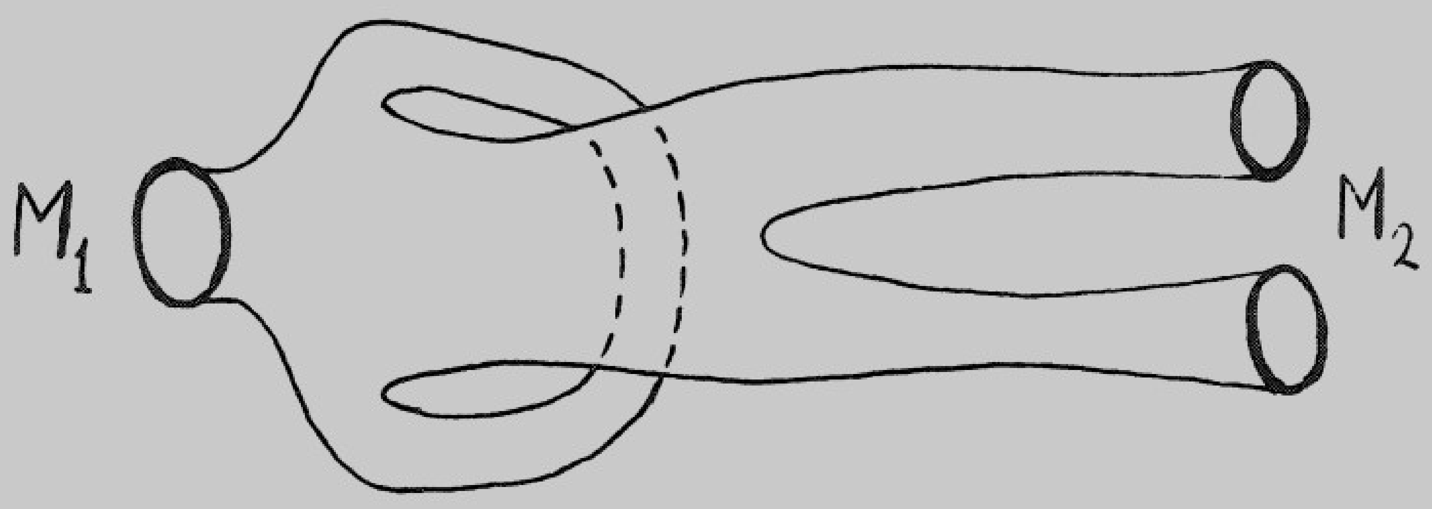

示性类理论：从代数拓扑到微分几何

Author: 吕长乐

Institute: 中国科学技术大学

Date: 2024 年 6 月

Characteristic class connects topology and curvature.

前言

示性类理论的研究是从 1935 年由 Stifel 和 Whitney 二人几乎同时开始独立进行的。Stifel 在 Hopf 的指导下研究了一种由流形的切丛决定的同调类，而 Whitney 在处理一般球丛的时候引入了上同调的语言，正式定义了示性上同调类。1942 年 Pontrjagin 在研究 Grassmann 流形的时候定义了 Pontrjagin 类，1946 年陈省身在昆明的高级研究所对复向量丛也定义了陈示性类。再后来吴文俊引入了吴示性类，并导出了 S-W 示性类、陈示性类等由吴示性类的表示公式，将这一理论进行了进一步的发展。

上述示性类的定义都是从拓扑的角度出发的，而从曲率的角度来看，上述的示性类理论也有着非常重要的意义，这些上同调类都可以用曲率张量所表示。Chern-Weil 理论给出了这二者之间的联系，并让示性类理论所能应用的范围大幅变大。

本讲义为 2024 秋季学期开始的示性类理论讨论班而作，第一部分（第一到第五章）为拓扑示性类理论，第二部分（第六到第九章）为微分几何中的示性类理论。学习本讲义有关内容需要一定的代数拓扑、微分流形与黎曼几何基础，重要的前置知识会在正文中进行讲解。本讲义的主要参考书为 Hatcher 的《Algebraic Topology》、Milnor 的《Characteristic Classes》、张伟平的《流形上的几何与分析》和 Kobayashi 的《Differential Geometry of Complex Vector Bundles》。

目录

Chapter 1 拓扑理论的预备知识

1.1 向量丛

向量丛是示性类理论中的基本研究对象之一，为此我们先回顾向量丛的有关知识。

首先给出纤维丛与向量丛的基本概念。

Definition 1.1

一个拓扑空间 B 上的纤维丛 $\xi : F \to E \xrightarrow{\pi} B$ 有如下部分:

（1）一个拓扑空间 E，称为 ξ 的**全空间**

（2）一个连续映射 $\pi : E \to B$，称为**投影**

（3）一个拓扑空间 F，称为**纤维**

且还需要满足**局部平凡性** 的条件，即

$\forall b \in B$，存在 b 的邻域 U(如果 U 可以取为整个底空间 B，则称 ξ 是平凡的) 和一个同态 $h_U : U \times F \to \pi^{-1}(U)$，使得对 U 中任意一个 c，有 $x \mapsto h_U(c, x)$ 给出了 F 与纤维 $\pi^{-1}(c)$（也被写为 $F_c(\xi)$）之间的同构。

如果纤维 F 为 n 维实向量空间，则称 ξ 为**实向量丛**（或称为 $\mathbb{R}^n$ 丛）。 ♣

Definition 1.2

同一个底空间上的向量丛 ξ 与 η**同构**，是指存在 $f : E(\xi) \to E(\eta)$ 把 ξ 的每一个纤维 $F_b(\xi)$ 都同构地映射到对应的纤维 $F_b(\eta)$ 上，此时记作 $\xi \simeq \eta$。

对任意两个向量丛 ξ 和 η，称从 ξ 到 η 的**丛映射** 是指一个连续映射 $g : E(\xi) \to E(\eta)$，把每一个纤维 $F_b(\xi)$ 都同构地映射到某一个 η 的纤维 $F_{b'}(\eta)$。 ♣

下面是几个向量丛的例子。

Example 1.1 流形的<u>**切丛**</u>τ_M。对任意一个流形 M，τ_M 的底空间为 M，全空间为 $TM=\{(x,v):x\in M,v\in T_xM\}$，第一分量的投影即为丛的投影。不难验证纤维上的向量结构以及局部平凡性。如果 τ_M 是平凡的，则称流形 M 是<u>**可平行化的**</u>。

Example 1.2 流形的<u>**法丛**</u>ν_M。具体讨论与上例类似。

Example 1.3 $\mathbb{RP}^n$ 上的典范线丛 γ_n^1。全空间 $E(\gamma_n^1)=\{(\{\pm x\},v)\in\mathbb{RP}^n\times\mathbb{R}^{n+1}:v=kx(k\in\mathbb{R})\}$（这里我们把 $\mathbb{RP}^n$ 视为 S^n 上对径点对构成的集合），第一分量的投影即为丛的投影。每个纤维可以视为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中穿过向量 x 的直线，故其上自然有 1 维向量结构。它的局部平凡化可以写出：

$$h_U:U\times\mathbb{R}\to\pi^{-1}(U)$$

$$(\{\pm x\},t)\mapsto(\{\pm x\},tx)$$

Definition 1.3

对向量丛 ξ，一个<u>**截面**</u>是一个连续映射 $s:B\to E$，使得 $\pi\circ s=\mathrm{Id}$。♣

利用截面，可以给出一个向量丛是否平凡的判据如下（具体证明在此省略）

Proposition 1.1

一个 n 维实向量丛 ξ 是平凡的当且仅当存在 n 个处处线性无关的截面 $s_1,\dots,s_n$。♠

Example 1.4 S^3 是可平行化的。定义其切丛的三个截面如下：将 S^3 自然嵌入到 $\mathbb{R}^4$，则对任意 $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in S^3$，令 $s_i(x)=(x,t_i(x))(i=1,2,3)$，其中

$$t_1(x)=(-x_2,x_1,-x_4,x_3)$$

$$t_2(x)=(-x_3,x_4,x_1,-x_2)$$

$$t_3(x)=(-x_4,-x_3,x_2,x_1)$$

可以验证这给出了三个处处无关的截面，则 τ_{S^3} 是平凡的。

这里我们再讨论几种从已有向量丛给出新的向量丛的构造方法。

一、拉回丛

对任意向量丛 $\xi(B, E, \pi, h)$ 和拓扑空间 B_1，以及一个映射 $f: B_1 \to B$，在 B_1 上定义拉回丛 $f^*\xi$ 如下：

全空间定义为 $E_1 = \{(b, e) \in B_1 \times E : f(b) = \pi(e)\}$，第一分量的投影为丛投影。对 ξ 的一个平凡化邻域 U，在 $f^{-1}(U)$ 上定义 $f^*\xi$ 的局部平凡化 h_1 为

$$h_1 : U_1 \times \mathbb{R}^n \to \pi_1^{-1}(U_1)$$

$$(b, x) \mapsto (b, h(f(b), x))$$

二、笛卡尔积

对两个向量丛 $\xi_i(B_i, E_i, \pi_i, h_i)(i = 1, 2)$，在 $B_1 \times B_2$ 上可以定义它们的笛卡尔积 $\xi_1 \times \xi_2$，全空间为 $E_1 \times E_2$。丛投影为 $\pi_1 \times \pi_2$。

三、Whitney 和

已知 B 上有两个向量丛 ξ_1, ξ_2，$d : B \to B \times B, b \mapsto (b, b)$ 为对角嵌入，则定义 ξ_1 和 ξ_2 的 Whitney 和 $\xi_1 \bigoplus \xi_2$ 为拉回丛 $d^*(\xi_1 \times \xi_2)$。

四、正交补

对任意向量丛 $\xi \subset \eta$，定义 $F_b(\xi^\perp)$ 为 $F_b(\xi)$ 在 $F_b(\eta)$ 中的正交补，并令 $E(\xi^\perp)$ 为所有 $F_b(\xi^\perp)$ 的并。对一个邻域 U，选取 $\xi|_U$ 的标准正交截面基 $s_1, \ldots, s_m$，并扩张为 $\eta|_U$ 上的标准正交截面基 $s_1, \ldots, s_n$，则定义局部平凡化如下：

$$h : U \times \mathbb{R}^{n-m} \to E(\xi^\perp)$$

$$(b, x) \mapsto x_1 s_{m+1}(b) + \cdots + x_{n-m} s_n(b)$$

可以验证如上条件给出了一个向量丛 $\xi^\perp$，且有 $\eta \simeq \xi \bigoplus \xi^\perp$。

1.2 基本同调类

为了方便后续讨论，这里讨论在流形的定向中具有重要作用的基本同调类。

M 是一个闭连通的 n 维流形，并且是 R-可定向的，则我们取 $\{\mu_x|x \in M\}$ 为 M 的一组定向。所谓的基本同调类就是能够处处被自然同态映成定向同调类的类，下面先来严格给出定义并证明其存在性。

Theorem 1.1

对任意的 R-可定向流形 M 和任意紧子集 $K \subset M$，都存在唯一的同调类 $\mu_K \in H_n(M|K;R)$，使得自然同态 $\rho_x : H_n(M|K;R) \to H_n(M|x;R)$ 满足 $\rho_x(\mu_K) = \mu_x(\forall x \in K)$。

特别地，如果 M 还是紧的，则称 μ_M 是 M 的基本同调类。♡

证明 我们首先需要一个引理，在这里省略它的证明：

Lemma 1.1

同调类 $\alpha \in H_n(M|K;R) = 0$ 当且仅当 $\rho_x(\alpha) = 0 \in H_n(M|x;R)(\forall x \in R)$。♡

在这个引理的基础上，从局部到整体证明主要定理：

第一步： K 包含在某一点的足够小邻域中，此时由定向的定义立即得到结果。

第二步： 由于 K 是紧的，则只需证明如果对 K_1 和 K_2 结论正确，则对 $K = K_1 \cup K_2$ 结论正确。首先由 Mayer-Vietoris 序列，有正合列

$$\cdots \to 0 \to H_n(M|K;R) \xrightarrow{f} H_n(M|K_1;R) \oplus H_n(M|K_2;R) \xrightarrow{g} H_n(M|K_1 \cap K_2;R) \to \dots$$

其中 $f(\alpha) = \rho_{K_1}(\alpha) \oplus \rho_{K_2}(\alpha), g(\beta \oplus \gamma) = \rho_{K_1 \cap K_2}(\beta) - \rho_{K_1 \cap K_2}(\gamma)$，$\rho_{K_1}$ 表示从 $H_n(M|K;R)$ 到 $H_n(M|K_1;R)$ 的自然同态，ρ_{K_2} 和 $\rho_{K_1 \cap K_2}$ 同理。

则对任意的 $x \in K_1 \cap K_2$，$\rho_x(g(\mu_{K_1} \oplus \mu_{K_2})) = \rho_x\mu_{K_1} - \rho_x\mu_{K_2} = \mu_x - \mu_x = 0$，则由引理，$g(\mu_{K_1} \oplus \mu_{K_2}) = 0$，故存在唯一的 $\alpha \in H_n(M|K;R)$，使得 $f(\alpha) = \mu_{K_1} \oplus \mu_{K_2}$, 则 α 就是我们想

要的 μ_K，故得证。 □

对于不可定向流形，取 $R=\mathbb{Z}_2$ 也可以定义所谓的基本同调类。

对于带边流形也可以定义基本同调类：类似地可以证明对任意紧子集 $K\subset M$，存在唯一的同调类 $\mu_K\in H_n(M,(M-K)\cup\partial M;R)$ 使得 $\rho_x(\mu_K)=\mu_x(\forall x\in K\cap(M-\partial M))$，则取 $\mu_M\in H_n(M,\partial M;R)$ 为 M 的基本同调类。

下面的命题在后面证明 Pontrjagin 定理的时候会用到。

Proposition 1.2

对于同调群长正合列中的连接同态 $\partial:H_n(M,\partial M;R)\to H_{n-1}(\partial M;R)$，有 $\partial(\mu_M)=\mu_{\partial M}$。

证明 取 N 为 ∂M 的一个管状邻域，则 N 为 n 维带边流形，边界为 $\partial M\cup(N-\mathring{N})$, 则有交换图表

$$\begin{tikzcd}
 & & H_n(M,\partial M;R) \arrow[r, "i_*"] \arrow[dll, "\partial_*"'] & H_n(M,\partial M\cup(M-\mathring{N});R) \\
H_{n-1}(\partial M;R) \arrow[r, "k_*", "\approx"'] & H_{n-1}(\partial M\cup(N-\mathring{N}),N-\mathring{N};R) & & H_n(N,\partial M\cup(N-\mathring{N});R) \arrow[ll, "\partial_*"'] \arrow[u, "j_*", "\approx"']
\end{tikzcd}$$

其中左侧的 ∂_* 为 $(M,\partial M)$ 的正合列的连接同态，右下的 ∂_* 为三元组 $(N,\partial M\cup(N-\mathring{N}),N-\mathring{N})$ 的正合列的连接同态，右侧的 j_* 来自于切除。

由基本同调类的定义，不难有

$$j_*^{-1}i_*\mu_M=\mu_N$$

同时又由于 N 的定义，N 同胚于 $\partial M\times I$ 并将 ∂M 和 $N-\mathring{N}$ 分别对应到 $\partial M\times 0$ 和 $\partial M\times 1$，则由相对 Kunneth 公式

$$H_n(N,\partial M\cup(N-\mathring{N});R)\approx H_{n-1}(\partial M;R)\otimes H_1(I,\mathring{I};R)$$

取 w 为 $H_1(I,\mathring{I};R)$ 的生成元，$\{M_j\}$ 为 ∂M 的分支，则 $\mu_N=\sum z'_j\times w$（对某些 $z'_j\in H_{n-1}(M_j;R)$）。又由于 $k_*^{-1}\partial_*\mu_N=\pm\sum z'_j$，故 $\partial\mu_M=\pm\sum z'_j$。

由于 μ_N 为基本同调类，则每个 $z'_j\times w$ 对应了 $M_j\times I$ 的基本同调类，则 z'_j 为 $H_{n-1}(M_j;R)$ 的生成元，也即 M_j 的基本同调类，则 $\pm\sum z'_j=\partial\mu_M$ 为 ∂M 的基本同调类。 □

1.3 Grassmann 流形的有关讨论

为了在后面讨论看待 S-W 类的一种视角，这里需要补充关于 Grassmann 流形的有关知识。

Definition 1.4

Grassmann 流形$G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ 是 $\mathbb{R}^{n+k}$ 中经过原点的 n 维平面构成的集合。♣

首先我们说明 Grassmann 流形确实是一个流形。

Lemma 1.2

Grassmann 流形 $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ 是一个 nk 维的紧拓扑流形。 ♡

证明 首先证明 $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ 是一个 Hausdorff 空间。固定 $w \in \mathbb{R}^{n+k}$，对任意 $X \in G_n(\mathbb{R}^{n+k})$，取 X 的正交基 $x_1, \cdots, x_n$，定义

$$\rho_w : G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \to \mathbb{R}, X \mapsto w \cdot w - \sum_{k=1}^{n} (w \cdot x_k)^2$$

则 ρ_w 为连续函数，且对任意的 $X \neq Y$，取 $w \in X - Y$，有 $\rho_w(X) \neq \rho_w(Y)$，则 X 与 Y 可以用连续函数分离，故得证。

令 $V_n(\mathbb{R}^{n+k})$ 为 $\mathbb{R}^{n+k}$ 中的 n 维标架（也即 n 个无关向量构成的有序组）构成的集合，$V_n^0(\mathbb{R}^{n+k})$ 为所有正交 n 维标架构成的集合，显然是紧的。又对 $q : V_n^0(\mathbb{R}^{n+k}) \to G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ 把标架映为其张成的子空间，则有 $q(V_n^0(\mathbb{R}^{n+k})) = G_n(\mathbb{R}^{n+k})$, 故 $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ 为紧集在连续映射下的像，也为紧的。

再证对任意一点 $X_0 \in G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ 存在 X_0 的同胚于 $\mathbb{R}^{nk}$ 同胚的邻域。考虑正交投影 $p : X_0 \oplus X_0^{\perp} \to X_0$，记 U 为 $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ 中所有对 p 的像集为 X_0 的元素，也即与 $X_0^{\perp}$ 交为 $\{0\}$ 的元素全体，则任意 $Y \in U$，Y 可以视为线性映射

$$T(Y) : X_0 \to X_0^{\perp}$$

的图像，则有一一对应 $T : U \to \mathrm{Hom}(X_0, X_0^{\perp}) \simeq \mathbb{R}^{nk}$。

固定 X_0 的一组基 $x_1,\cdots,x_n$，则对任意 $Y\in U$，存在唯一的 Y 的一组基 $y_1,\cdots,y_n$，使得 $p(y_i)=x_i$，则 $(y_1,\cdots,y_n)$ 由 $x_1,\cdots,x_n$ 连续决定。注意到等式

$$y_i=x_i+T(Y)(x_i)$$

由于 y_i 连续依赖于 Y, 则 $T(Y)(x_i)$ 连续依赖于 Y, 则 $T(Y)$ 连续依赖于 Y，即 T 连续。同理可证 T^{-1} 也连续，则 T 为同胚。 □

在 $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ 上，可以定义一个典范向量丛 $\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$：

首先取全空间 E 为形如 ($\mathbb{R}^{n+k}$ 中的 n 维平面，该平面中的向量) 的所有二元对所构成的集合，E 可以视为 $G_n(\mathbb{R}^{n+k})\times\mathbb{R}^{n+k}$ 的子集，向第一元的投影作为丛的投影。这样构造出来的典范丛又被称为 "万有丛"，原因来自于如下的一个命题。

Proposition 1.3

任何一个紧的底空间 B 上的 n 维向量丛 ξ，都存在一个丛映射 $\xi\to\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$($k$ 充分大)。♠

证明 选取有限个能覆盖 B 的平凡化邻域 $U_1,\ldots,U_r$，由点集拓扑的知识可以知道存在开集 $V_1,\ldots,V_r$ 覆盖 B 且 $\overline{V_i}\subset U_i$，同理选取 $W_1,\ldots,W_r$ 覆盖 B 且 $\overline{W_i}\subset V_i$。定义 $\lambda_i:B\to\mathbb{R}$ 为截断函数，在 $\overline{W_i}$ 上取值为 1，V_i 以外取值为 0。

由于 $\xi|_{U_i}$ 是平凡的，存在映射 $h_i:\pi^{-1}(U_i)\to\mathbb{R}^n$ 将 $\xi|_{U_i}$ 的每个纤维线性地映到 $\mathbb{R}^n$。再定义 $h_i':E(\xi)\to\mathbb{R}$ 如下：

$$h_i'(e)=0\qquad(\pi(e)\notin V_i)$$

$$h_i'(e)=\lambda_i(\pi(e))h_i(e)\qquad(\pi(e)\in U_i)$$

再定义 $\hat{f}:E(\xi)\to\mathbb{R}^{rn}:\hat{f}(e)=(h_1'(e),\ldots,h_r'(e))$，则可以验证 $\hat{f}$ 为一个丛映射。 □

对性质更差的底空间，如仿紧空间，我们则需要考虑“无穷 Grassmann 流形”，下面严格地给出有关定义。

$\mathbb{R}^\infty$ 是由所有处有限项以外均为 0 的无穷序列 $x = (x_1, x_2, \dots)$ 所构成的集合，无穷 Grassmann 流形 $G_n = G_n(\mathbb{R}^\infty)$ 则指的是 $\mathbb{R}^\infty$ 的所有 n 维线性子空间所构成的集合。同样在 G_n 上可以定义典范丛 γ^n。

全空间 $E(\gamma^n) \subset G_n \times \mathbb{R}^\infty$ 为所有形如 ($\mathbb{R}^\infty$ 中的 n 维子空间，该子空间的向量) 的二元组所构成的集合，向第一元的投影作为丛投影。类似地，有如下命题：

Proposition 1.4

任何一个仿紧的底空间 B 上的 n 维向量丛 ξ，都存在一个丛映射 $\xi \to \gamma^n$。

证明基本与命题1.3一致，只需要利用点集拓扑的知识将仿紧空间进行拓扑处理，在这里省略细节。这个命题说明了我们给出了一个真正“万有”的向量丛 γ^n。这一点在之后证明 S-W 类的存在性中具有重要意义。

为了后续讨论 G_n 的上同调环的性质，这里我们首先给出 Grassmann 流形 $G_n(\mathbb{R}^m)$ 的 CW 复形结构。

首先 $\mathbb{R}^m$ 有递增子空间序列 $\mathbb{R}^0 \subset \mathbb{R}^1 \subset \cdots \subset \mathbb{R}^m$，其中 $\mathbb{R}^k$ 视为 $\mathbb{R}^m$ 中后 $m-k$ 个分量均为 0 的向量全体构成的子空间。则对任意 n 维子空间 $X \subset \mathbb{R}^m$ 有

$$0 \leq \dim(X \cap \mathbb{R}^1) \leq \dim(X \cap \mathbb{R}^2) \leq \cdots \leq \dim(X \cap \mathbb{R}^m) = n$$

同时又注意到对 k-分量投影映射 $f_k : X \cap \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ 有 $X \cap \mathbb{R}^{k-1} \subset \mathrm{Ker} f_k$，则

$$\dim(X \cap \mathbb{R}^k) - \dim(X \cap \mathbb{R}^{k-1}) \leq 1$$

对每一组 $\sigma \in \{\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n) : \sigma_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq \sigma_1 < \sigma_2 \cdots < \sigma_n \leq m\}$，定义 $e(\sigma)$ 为所有满足 $\dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_i}) = i, \dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_{i-1}}) = i-1 (\forall i)$ 的 n 维子空间 X 的全体构成的集合。故

任意 $X \in G_n(\mathbb{R}^m)$，X 恰好属于所有的 $e(\sigma)$ 中的一个。

定义 $H^k = \{(\xi_1, \cdots, \xi_k, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^k : \xi_i > 0 (1 \leq i \leq k)\} \subset \mathbb{R}^k$，则 $X \in e(\sigma)$ 当且仅当 X 有一组基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 使得 $x_i \in H^{\sigma_i} (\forall i)$。则令 $e'(\sigma) = V_n^0(\mathbb{R}^m) \cap (H^{\sigma_1} \times \cdots \times H^{\sigma_n})$,$\overline{e}'(\sigma) = V_n^0(\mathbb{R}^m) \cap (\overline{H^{\sigma_1}} \times \cdots \times \overline{H^{\sigma_n}})$。

Lemma 1.3

$\overline{e}'(\sigma)$ 是一个维数为 $d(\sigma) = (\sigma_1 - 1) + (\sigma_2 - 2) + \cdots + (\sigma_n - n)$ 的闭细胞，且内部为 $e'(\sigma)$。且 q（定义见前）把 $e'(\sigma)$ 同胚地映成 $e(\sigma)$。进而 $e(\sigma)$ 是一个维数为 $d(\sigma)$ 的开细胞。♡

该引理的证明是平凡的验证，在此省略。利用 $e(\sigma)$ 我们能给出 $G_n(\mathbb{R}^m)$ 的 CW 复形结构。

Theorem 1.2

所有 $e(\sigma)$（共 $\binom{m}{n}$ 个）给出了 $G_n(\mathbb{R}^m)$ 的 *CW* 复形结构。令 $m \to \infty$ 取直极限可以类似得到 $G_n = G_n(\mathbb{R}^\infty)$ 的 *CW* 复形结构。♡

取 $n = 1$ 的特殊情况则有：

Corollary 1.1

$\mathbb{RP}^\infty = G_1(\mathbb{R}^\infty)$ 是一个 *CW* 复形，且对每一个 $r \geq 0$，它有一个 r-细胞 $e(r+1)$，且有 $\overline{e}(r+1)$ 同胚于 $\mathbb{RP}^r$。♡

在此基础上我们还需要讨论 $G_n(\mathbb{R}^m)$ 的 r-细胞的个数，显然这与划分数的概念直接相关。

Definition 1.5

对一个整数 $r \geq 0$ 的<u>**划分**</u> 是指一个无序正整数序列 $i_1, \cdots, i_s$ 使得它们的和为 r。r 的所有划分数记作 $p(r)$。♣

则对每一个 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$ 且 $d(\sigma) = r, \sigma_n \leq m$，将 $\sigma_1 - 1, \sigma_2 - 2. \cdots, \sigma_n - n$ 中的零项去掉，则得到对应的 r 的划分 $i_1, \cdots, i_s$，且 $1 \leq i_1 \leq i_2 \cdots \leq i_s \leq m - n, s \leq n$。则有

Proposition 1.5

$G_n(\mathbb{R}^m)$ 中的 r-细胞数量等于将 r 划分为至多 n 个不大于 $m - n$ 的正整数的方法数。♠

Corollary 1.2

当 $n \geq r$ 且 $m-n \geq r$ 时，$G_n(\mathbb{R}^m)$ 中的 r-细胞数量等于 $p(r)$，特别地 $m=\infty$ 时也成立。♡

Chapter 2　向量丛的上同调

本章我们讨论纤维丛（向量丛）的上同调，并建立 Thom 类和 Euler 类，为后续 S-W 类有关知识的开展奠定基础。这一章需要的代数拓扑知识可以参考 Allen Hatcher 的代数拓扑第三、第四章。

2.1 Thom 同构定理与 Thom 类

首先回忆纤维丛的 Leray-Hirsch 定理。

Theorem 2.1

对一个纤维丛 $F \to E \xrightarrow{\pi} B$，如果满足如下条件:

（1）$H^n(F;R)$ 是一个有限生成的自由 R-模

（2）对任意纤维 F，都存在上同调类 $c_j \in H^{k_j}(E;R)$ 使得 $i^*(c_j)$ 构成了 $H^n(F;R)$ 的

一组基，其中 $i : F \to E$ 是包含映射。

则 $\Phi : H^*(B;R) \otimes_R H^*(F;R) \to H^*(E;R), \sum\limits_{i,j} b_i \otimes i^*(c_j) \mapsto \sum\limits_{i,j} \pi^*(b_i) \cup c_j$ 是一个同构映射。

这里我们希望引入 Leray-Hirsch 定理的相对形式，为此首先要引入纤维丛对的概念。

Definition 2.1

对于一个纤维丛 $F \to E \xrightarrow{\pi} B$，$E' \subset E$ 是一个子空间，使得 $\pi : E' \to B$ 也是一个丛投影，对应的纤维是子空间 $F' \subset F$，并且 E' 上的局部平凡化是 E 上的局部平凡化在 E' 上的限制，则称 $(F,F') \to (E,E') \xrightarrow{\pi} B$ 是一个<u>纤维丛对</u>。

下面我们应用绝对形式的 Leray-Hirsch 定理来得到相对形式的 Leray-Hirsch 定理，这对得到 Thom 类是极其重要的一步。

Theorem 2.2

$(F,F') \to (E,E') \xrightarrow{\pi} B$ 是一个纤维丛对，如果满足如下条件:

（1）$H^*(F,F';R)$ 是一个自由 R-模，并且对任意的 n，$H^n(F,F';R)$ 是有限生成的

（2）对任意纤维 (F,F')，都存在上同调类 $c_j \in H^{k_j}(E,E';R)$ 使得它们在 (F,F') 上的限制构成了 $H^n(F,F';R)$ 的一组基。

则 $H^*(E,E';R)$ 是一个自由 $H^*(B;R)$-模，且基为 $\{c_j\}$。

证明 我们熟知如果 B 是 $\hat{E}$ 的收缩核，则有 $H^*(\hat{E};R) \approx H^*(\hat{E},B;R) \oplus H^*(B;R)$，为了使用绝对形式的 Leray-Hirsch 定理，我们找到 $\hat{E}$ 使得 $H^*(\hat{E},B;R)$ 能与 $H^*(E,E';R)$ 建立联系。

取 $\hat{E}$ 为将从投影 $\pi : E' \to B$ 的映射柱 M 粘黏到 E 上得到的空间（把 $E' \subset E$ 和 $E' \subset M$ 等同起来），则从 $\pi : \hat{E} \to B$ 的纤维 $\hat{F}$ 可以视为把锥 CF' 通过 F' 粘黏在 F 上得到的。注意到 E 是 $\hat{E} - B$ 的形变收缩核，E' 是 $M - B$ 的形变收缩核，故由切除定理

$$H^*(\hat{E},M;R) \approx H^*(\hat{E}-B, M-B;R) \approx H^*(E,E';R)$$

则由 B 是 M 的形变收缩核，$H^*(\hat{E},M;R) \approx H^*(\hat{E},B;R)$，故由一开始的思路我们有

$$H^*(\hat{E};R) \approx H^*(E,E';R) \oplus H^*(B;R)$$

这里的同构是指 $H^*(B;R)$-模意义下的同构，则令 $\hat{c}_j \in H^*(\hat{E};R)$ 为 $c_j \in H^*(E,E';R)$ 对应的类，则所有的 $\{\hat{c}_j\}$ 和 1 共同构成了 $H^*(\hat{F};R)$ 的一组基。则绝对形式的 Leray-Hirsch 定理说明 $H^*(\hat{E};R)$ 是一个自由的 $H^*(B;R)$-模，且基为 $\{1,\hat{c}_j\}$，故 $\{c_j\}$ 构成了 $H^*(B;R)$-模 $H^*(E,E';R)$ 的一组基。 □

在这里我们取特殊向量丛的情形，即 $F=\mathbb{R}^n, F'=F-\{0\} \approx S^{n-1}, E'=E-\{0\}$（在后

面我们均默认 $E' = E - \{0\}$），为了满足上述的相对 Leray-Hirsch 定理的条件，我们需要一个上同调类 $c \in H^n(E, E'; R)$ 使得它在每个纤维 $(\mathbb{R}^n, S^{n-1})$ 上的限制都是 $H^n(\mathbb{R}^n, S^{n-1}; R) = R$ 的生成元。这样的类就被称为纤维丛的**Thom 类**。如果假设 Thom 类存在，则由相对 Leray-Hirsch 定理可以得到如下结果。

Proposition 2.1

如果丛 $(\mathbb{R}^n, S^{n-1}) \to (E, E') \xrightarrow{\pi} B$ 有 Thom 类 c，则映射

$$\Phi : H^i(B; R) \to H^{i+n}(E, E'; R), \Phi(b) = \pi^*(b) \cup c$$

对任意的 $i \leq 0$ 是同构。则显然有 $H^i(E, E'; R) = 0(i < n)$。

下面我们讨论 Thom 类存在的有关命题。可以看出 Thom 类的定义与之前所说的基本同调类的定义有一定的类似之处，我们可以猜测 $R = \mathbb{Z}_2$ 时 Thom 类始终存在，而 $R = \mathbb{Z}$ 时则需要一定的定向性条件。事实上也确实如此。

Theorem 2.3

任何向量丛都存在 $\mathbb{Z}_2$ 系数的 Thom 类。

证明 仍然分步证明该定理。（对于省略的一些细节，可以参考 Milnor 的《Characteristic Classes》第十节）

第一步 若该向量丛为平凡的，则可以把 E 视为 $B \times \mathbb{R}^n$，此时 $H^n(E, E'; \mathbb{Z}_2) = H^n(B \times \mathbb{R}^n, B \times S^{n-1}; \mathbb{Z}_2)$。

Lemma 2.1

$H^j(B; \mathbb{Z}_2) \approx H^{j+n}(B \times \mathbb{R}^n, B \times S^{n-1}; \mathbb{Z}_2)$

证明 我们知道 $n = 1$ 时，$H^n(\mathbb{R}^n, S^{n-1}; \mathbb{Z}_2) \approx \mathbb{Z}_2$，取其非零元素为 e^1，则利用 Kunneth 公式和考虑三元组 $(B \times \mathbb{R}, B \times \mathbb{R}^*, B \times \mathbb{R}^-)$ 构成的正合列可以证明 $y \mapsto y \times e^1$ 给出了 $H^j(B; \mathbb{Z}_2)$ 到 $H^{j+1}(B \times \mathbb{R}, B \times \mathbb{R}^*; \mathbb{Z}_2)$ 的同构。再利用五引理追图论证和归纳法可以证明 $y \mapsto y \times e^n$ 给出了我们想要的同构，其中 $e^n = e^1 \times e^1 \cdots \times e^1$。

回到原定理，则只需要找到 $H^0(B;\mathbb{Z}_2)$ 中在 B 的处处的限制非零的类即可，自然也就是 1，故 $1\times e^n$ 给出了我们想要的类。

第二步 如果 $B=B_1\cup B_2$，其中 B_1 和 B_2 是使得定理结论成立的子集，则显然 $B_1\cap B_2$ 也使得结论成立。利用相对的 Mayer-Vietoris 序列:（为了简便，记 $E^\cap=E_1\cap E_2, E'^\cap=E'_1\cap E'_2$）

$$\cdots\to H^{i-1}(E^\cap,E'^\cap;\mathbb{Z}_2)\to H^i(E,E';\mathbb{Z}_2)\to H^i(E_1,E'_1;\mathbb{Z}_2)\oplus H^i(E_2,E'_2;\mathbb{Z}_2)\to H^i(E^\cap,E'^\cap;\mathbb{Z}_2)\to\dots$$

由假设，存在 $u_1\in H^n(E_1,E'_1;\mathbb{Z}_2)$ 和 $u_2\in H^n(E_2,E'_2;\mathbb{Z}_2)$ 使得它们在每个纤维上的限制为非零的。再一次使用之前讨论过的唯一性论证（见定理1.1），可以证明 u_1 和 u_2 在 $H^n(E^\cap,E'^\cap;\mathbb{Z}_2)$ 中有相同的像，则它们都来自于唯一的 $u\in H^n(E,E';\mathbb{Z}_2)$，再由绝对 Mayer-Vietoris 序列 (其中 $j+n=i$)

$$\cdots\to H^{j-1}(E^\cap;\mathbb{Z}_2)\to H^j(E;\mathbb{Z}_2)\to H^j(E_1;\mathbb{Z}_2)\oplus H^j(E_2;\mathbb{Z}_2)\to H^j(E^\cap;\mathbb{Z}_2)\to\dots$$

和五引理追图论证，可以证明 $y\mapsto y\cup u$ 给出了同构 $H^j(E;\mathbb{Z}_2)\approx H^{j+n}(E,E;\mathbb{Z}_2)$。

第三步 如果 B 由有限个使得定理结论成立的子集合覆盖，则由归纳法并反复使用第二步即可。

第四步 对一般的拓扑空间 B，取 B 的紧子集 C，则由第三步 C 使得定理结论成立。再利用标准的直极限论证可以证明一般的情况。细节在此处略去。 □

对于系数取为 $\mathbb{Z}$ 的情况，我们需要定向性条件，这就需要对向量丛的可定向性进行定义。为了证明的简便性，这里我们采用一种定义：即使用了纤维丛的同伦提升性质。（后面我们会给出一种更自然的等价定义）

给定纤维丛 $S^{n-1} \to E \to B$，对 B 上的任何一个道路 $\gamma : I \to B$，存在一个同伦 $g_t : F_{\gamma(0)} \hookrightarrow B$ 使得 $g_t(F_{\gamma(0)}) = \gamma(t)$，则包含映射 $F_{\gamma(0)} \to E$ 给出了一个提升 $\hat{g}_0$，又由于纤维丛是具有同伦提升性质的，存在同伦的提升 $\hat{g}_t : F_{\gamma(0)} \to E$ 使得 $\hat{g}_t(F_{\gamma(0)}) \subset F_{\gamma(t)}$。特别地，$\hat{g}_1$ 给出了一个映射 $L_\gamma : F_{\gamma(0)} \to F_{\gamma(1)}$, 并且可以证明 L_γ 是这两个纤维之间的同伦等价。现在取 γ 为 B 上的一个圈，则 L_γ 为一个纤维到自身的同伦等价。

Definition 2.2

如果对任意 B 上的圈 γ，L_γ 诱导的上同调群 $H^{n-1}(S^{n-1};\mathbb{Z})$ 上的自同态为恒等映射，则称纤维丛 $S^{n-1} \to E \to B$ 是可定向的。对于球丛 $D^n \to E \to B$，称其为 可定向的 是指其边界丛 $S^{n-1} \to E' \to B$ 是可定向的。♣

Theorem 2.4

任何可定向的向量丛都有 $\mathbb{Z}$ 系数的 *Thom* 类。♡

证明　根据 CW 逼近，只需考虑 B 是 CW 复形时的情况，同时由于全过程中考虑的均为有限维的上同调群，不妨设 B 是有限维的 CW 复形。我们后面会证明在此条件下，限制映射 $H^i(E,E';\mathbb{Z}) \to H^i(D^n_x, S^{n-1}_x;\mathbb{Z})$ 对每一个纤维 D^n_x 和 $i \le n$ 是同构。

在假设这个命题成立的情况下，取定一个纤维对应的同构 $H^n(E,E';\mathbb{Z}) \approx H^n(D^n_x, S^{n-1}_x;\mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$。则对任意的 y，取一个 x 到 y 的道路 γ，则包含映射 $(D^n_x, S^{n-1}_x) \hookrightarrow (E,E')$ 与另外一个包含映射 $(D^n_y, S^{n-1}_y) \hookrightarrow (E,E')$ 与 L_γ 的复合是同伦的。则由可定向性条件，我们选取的同构 $H^n(E,E';\mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$ 能够限制在每个纤维上都是 $H^n(D^n_x, S^{n-1}_x;\mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$，则 $H^n(E,E';\mathbb{Z})$ 的生成元就是 Thom 类，故只需要证明前面所论述的这个命题即可。采取归纳的方法。

设对所有 $k-1$ 维 CW 复形有结论成立。设 B 是一个 k 维的 CW 复形，$B_1 \subset B$ 是把 $B3$ 的每个 k-细胞删掉一个内点所得到的子空间，B_2 是所有开 k-细胞的并，则显然 $B = B_1 \cup B_2$。同样有 Mayer-Vietoris 序列

$$H^n(E,E';\mathbb{Z}) \to H^n(E_1,E_1';\mathbb{Z}) \oplus H^n(E_2,E_2';\mathbb{Z}) \xrightarrow{f} H^n(E^\cap, E'^\cap;\mathbb{Z}) \to \dots$$

又 $B_1 \cap B_2$ 可以形变收缩为 $(k-1)$ 维球面的并，故 $E^{\cap}$ 可以由 E 在这些 $(k-1)$ 维球面上的部分代替。又由正合性 $H^n(E, E'; \mathbb{Z}) \approx \mathrm{Ker} f$。

由归纳假设可知 $H^n(E_1, E_1'; \mathbb{Z}), H^n(E_2, E_2'; \mathbb{Z})$ 和 $H^n(E^{\cap}, E'^{\cap}; \mathbb{Z})$ 均为 $\mathbb{Z}$ 的直和，每一个 $\mathbb{Z}$ 对应相应空间的一个分支。

$\mathrm{Ker} f$ 中的元素 $(\alpha, \beta) \in H^n(E_1, E_1'; \mathbb{Z}) \oplus H^n(E_2, E_2'; \mathbb{Z})$ 在 $H^n(E^{\cap}, E'^{\cap}; \mathbb{Z})$ 上的限制相同，也即意味着 α 和 β 在上述直和分解中的 $\mathbb{Z}$ 坐标相同。则 $\mathrm{Ker} f \approx \mathbb{Z}$，故有 $H^n(E, E'; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$。

令一方面，对 $i < n$，同样考虑 Mayer-Vietoris 序列

$$H^{i-1}(E^{\cap}, E'^{\cap}; \mathbb{Z}) \to H^i(E, E'; \mathbb{Z}) \to H^i(E_1, E_1'; \mathbb{Z}) \oplus H^i(E_2, E_2'; \mathbb{Z}) \to \dots$$

利用归纳法显然有 $H^i(E, E'; \mathbb{Z})$ 左右两边的群均为 0，则 $H^i(E, E'; \mathbb{Z}) = 0$。

综上 $H^i(E, E'; \mathbb{Z}) \approx H^i(D_x^n, S_x^{n-1}; \mathbb{Z})$，得证。 $\square$

Remark 事实上该定理可以强化，即存在 $\mathbb{Z}$ 系数的 Thom 类与可定向性等价。这用到了向量丛的可定向性的另一种等价定义：对每一个纤维 F 都存在对应的 $\mu_F \in H^n(F, F'; \mathbb{Z})$ 使得 μ_F 满足局部相容性条件。具体细节在此省略。

2.2 Gysin 序列与 Euler 类

在上一节的基础上，我们可以对纤维丛 $S^{n-1} \to E \xrightarrow{\pi} B$ 建立所谓的 Gysin 序列。考虑映射柱 M_π，也有纤维丛 $D^n \to M_\pi \xrightarrow{\pi} B$。假设 Thom 类 $c \in H^n(M_\pi, E; R)$ 存在，则考虑图表 (Φ 为 Thom 同构)

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^i(M_\pi, E; R) \arrow[r, "j^*"] & H^i(M_\pi; R) \arrow[r] & H^i(E; R) \arrow[r] & H^{i+1}(M_\pi, E; R) \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^{i-n}(B; R) \arrow[r, "\cup e"] \arrow[u, "\Phi", "\approx"'] & H^i(B; R) \arrow[r, "\pi^*"] \arrow[u, "\approx", "\pi^*"'] & H^i(E; R) \arrow[r] \arrow[u, "="'] & H^{i-n+1}(B; R) \arrow[r] \arrow[u, "\Phi", "\approx"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

图表中出现的 e 定义为 $(\pi^*)^{-1}j^*(c)$，被称为 R 系数的**Euler 类**。第一块正方形是可交换的：对任意的 $b \in H^{i-n}(B; R)$, 有 $j^*\Phi(b) = j^*(\pi^*(b) \cup c) = \pi^*(b) \cup j^*(c) = \pi^*(b) \cup \pi^*(e) = \pi^*(b \cup e)$。在后面的讨论中，如果不加特殊说明，则取 Euler 类为 $\mathbb{Z}$ 系数的并且在此时加上向量丛的可定向性条件，记作 $e(\xi)$。

仍然记 $E' = E - \{0\}$，则将投影限制在 E' 上得到 $\pi' : E' \to B$，我们有如下的 Gysin 序列：

Theorem 2.5 (Gysin 序列)

对可定向的 n 维实向量丛 ξ，有如下正合列

$$\cdots \to H^{i-n}(B; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cup e} H^i(B; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi'^*} H^i(E'; \mathbb{Z}) \to H^{i-n+1}(B; \mathbb{Z}) \to \cdots$$

♡

证明 首先有相对上同调的正合列

$$\cdots H^i(E, E'; \mathbb{Z}) \to H^i(E; \mathbb{Z}) \to H^i(E'; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(E, E'; \mathbb{Z}) \to \cdots$$

再取 Thom 类 $u \in H^n(E, E'; \mathbb{Z})$，有同构

$$\cup u : H^{i-n}(E; \mathbb{Z}) \to H^i(E, E'; \mathbb{Z})$$

结合二者有正合列

$$\cdots H^{i-n}(E;\mathbb{Z}) \xrightarrow{g} H^i(E;\mathbb{Z}) \to H^i(E';\mathbb{Z}) \to H^{i-n+1}(E;\mathbb{Z}) \to \cdots$$

其中 $g(x) = (x \cup u)|_E = x \cup (u|_E)$。

由 Thom 类在 E 上的限制 $u|_E \in H^n(E;\mathbb{Z})$ 对应 Euler 类 $e \in H^n(B;\mathbb{Z})$，将上面的正合列中 $H^*(E;\mathbb{Z})$ 的部分用 $H^*(B;\mathbb{Z})$ 复合上 π^* 代替，故有

$$\cdots \to H^{i-n}(B;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cup e} H^i(B;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi'^*} H^i(E';\mathbb{Z}) \to H^{i-n+1}(B;\mathbb{Z}) \to \cdots$$

故得证。 □

下面讨论 Euler 类的众多性质。

Proposition 2.2

(1)（自然性）如果 $f: B \to B'$ 来自于一个保定向的丛映射 $\xi \to \xi'$，则 $e(\xi) = f^*(e(\xi'))$

(2)（反定向性）如果 ξ 的定向反转，则 $e(\xi)$ 改变符号。

(3) 如果纤维丛的维数 n 为奇数，则 $e(\xi) + e(\xi) = 0$

这几条性质的验证比较简单，在此略过。

Proposition 2.3

$e(\xi_1 \oplus \xi_2) = e(\xi_1) \cup e(\xi_2), e(\xi_1 \times \xi_2) = e(\xi_1) \times e(\xi_2)$

证明 设 ξ_1 和 ξ_2 的维数分别为 m 和 n，则由上同调类的交叉积的性质立即有

$$c(\xi_1 \times \xi_2) = (-1)^{mn} c(\xi_1) \times c(\xi_2)$$

再在等式两边作用限制同态则得到 $e(\xi_1 \times \xi_2) = (-1)^{mn} e(\xi_1) \times e(\xi_2)$。但上一个命题说明了当 m 或 n 为奇数时等式两边都为二阶元，符号问题可以忽略。第二个等式可以通过取 $B' = B$ 并在第一个等式两端同时作用上对角嵌入的诱导同态得到。 □

Euler 类可以用于判断向量丛的一些具体性质，如是否存在非零截面、是否存在某种条件的子丛等，也即可以视为一种拓扑障碍。

Proposition 2.4

若 ξ 有一个处处非零的截面，则 $e(\xi)$ 必须为 0。

证明 设 $s : B \to E'$ 为一个处处非零的截面，则复合 $B \xrightarrow{s} E' \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ 是恒等映射。则其诱导同态的复合 $H^n(B;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi^*} H^n(E;\mathbb{Z}) \to H^n(E';\mathbb{Z}) \xrightarrow{s^*} H^n(B;\mathbb{Z})$ 也为恒等映射。由定义 $\pi^*(e(\xi)) = c|_E$, 则前两个诱导同态的复合把 $e(\xi)$ 映成 $(c|_E)|_{E'}$。

又由于复合 $H^n(E,E';\mathbb{Z}) \to H^n(E;\mathbb{Z}) \to H^n(E';\mathbb{Z})$ 为零映射，故前两个诱导同态把 $e(\xi)$ 映为 0，则 $e(\xi) = s^*(0) = 0$。

（如果假设 ξ 被赋予了欧氏度量结构，则令 ε 为截面 s 张成的平凡线丛，则有 $e(\xi) = e(\varepsilon) \cup e(\varepsilon^\perp)$，由 ε 是平凡的，$e(\varepsilon) = 0$，则得证） □

Example 2.1 设 M 为紧光滑流形，切丛记为 τ，如果 $e(\tau) \neq 0$，则 τ 不存在奇数维子向量丛：假设这样的子丛 ξ 存在，若为可定向的，则 $e(\tau) = e(\xi) \cup e(\xi^\perp)$ 是自由 Abel 群 $H^n(M;\mathbb{Z})$ 中的二阶元，矛盾。若为不可定向的，则可以通过考虑 M 的可定向双叶覆叠流形来约化为第一种情况。

Chapter 3 Stiefel-Whitney 类

本章我们主要讨论 S-W 类，它可以刻画建立处处不相关的截面的拓扑障碍。与前面的 Thom 类和 Euler 类不同，我们先采用公理化定义的方法引入 S-W 类，再具体构造符合公理的类并验证唯一性。这种方法在后续研究陈类的时候会再次用到。

3.1 公理化定义

Definition 3.1

对每一个 n 维向量丛 ξ 都对应着一列上同调类 $w_i(\xi) \in H^i(B(\xi), \mathbb{Z}_2)(i = 0, 1, 2, \cdots)$，被称为 ξ 的***Stiefel-Whitney* 类**，其中 $w_i(\xi)(i = 0, 1, 2, \cdots)$ 满足如下公理：

（1）$w_0(\xi) = 1 \in H^0(B(\xi), \mathbb{Z}_2)$，且 $w_i(\xi) = 0(i > n)$

（2）$f : B(\xi) \to B(\eta)$ 来自于丛映射 $\xi \to \eta$，则 $w_i(\xi) = f^*(w_i(\eta))$

（3）若 ξ 和 η 有相同的底空间，则

$$w_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{i=0}^{k} w_i(\xi) \cup w_{k-i}(\eta)$$

（4）对 $\mathbb{RP}^1$ 上的典范线丛 γ_1^1，有 $w_1(\gamma_1^1) \neq 0$。 ♣

在接下来我们都先假设满足如上四条公理的类是存在的，则由这四条公理不难得到如下的一些性质。

Proposition 3.1

（1）若 ξ 与 η 同构，则 $w_i(\xi) = w_i(\eta)(\forall i)$。

（2）若 ε 为平凡丛，则 $w_i(\varepsilon) = 0(i > 0)$。

（3）若 ε 为平凡从，则 $w_i(\varepsilon \oplus \eta) = w_i(\eta)$。

（4）若 ξ 是一个赋予欧氏度量的 n 维向量丛且有 k 个处处线性无关的截面，则 $w_i(\xi) = 0(n-k+1 \le i \le n)$。特别地，若 ξ 存在一个处处非零截面，则 $w_n(\xi) = 0$。♠

当 $\xi \oplus \eta$ 为平凡丛时，显然有 $w_1(\xi) + w_1(\eta) = 0, w_2(\xi) + w_1(\xi)w_1(\eta) + w_2(\xi) = 0$ 等一系列关系式，则 $w_i(\eta)$ 可以完全由 ξ 的 S-W 类的多项式来表示。为了方便，我们引入总 S-W 类这一记号。

Definition 3.2

$H^{\Pi}(B;\mathbb{Z}_2)$ 是由全体形式无穷序列 $a = a_1+a_2+\cdots$ 组成的环，其中 $a_i \in H^i(B;\mathbb{Z}_2)$，其乘法由 $(a_0+a_1+a_2+\cdots)(b_0+b_1+b_2+\cdots) = (a_0b_0)+(a_1b_0+a_0b_1)+(a_2b_0+a_1b_2+a_0b_2)+\cdots$ 给出。

ξ 的总 ***Stiefel-Whitney* 类** 定义为这个环中的元素 $w(\xi) = 1 + w_1(\xi) + w_2(\xi) + \cdots$。♣

不难看出在总 S-W 类的记号下，公理的第三条可以被重新写为 $w(\xi \oplus \eta) = w(\xi)w(\eta)$。总 S-W 类的第一项必然为 1，不难验证所有首项为 1 的元素都在环中存在唯一的逆，为了方便记 $w^{-1} = \overline{w}$。则当 $\xi \oplus \eta$ 为平凡丛时，$w(\xi \oplus \eta) = 0$，也即 $w(\eta) = \overline{w(\xi)}$。

Corollary 3.1 (Whitney 对偶定理)

τ_M 为流形 M 的切丛，ν 为法丛，则 $w_i(\nu) = \overline{w}_i(\tau_M)$。♡

Example 3.1 对流形 M，我们往往用 $w(M)$ 代指 $w(\tau_M)$。对球面 S^n，考虑其标准嵌入 $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$，法丛 ν 显然是平凡的，即 $w(\nu) = 1$，则由上述推论 $w(S^n) = w(\tau_{S^n}) = 1$。

接下来我们具体讨论 $\mathbb{RP}^n$ 的 S-W 类。下面的例 3.2 和引理 3.1 能够帮助我们解决这一问题。首先我们熟知 $\mathbb{RP}^n$ 的上同调环 $H^*(\mathbb{RP}^n;\mathbb{Z}_2)$ 由 $\mathbb{Z}_2[\alpha]/(\alpha^{n+1})$ 给出。

Example 3.2 考虑 $\mathbb{RP}^n$ 上的典范线丛 γ_n^1，标准嵌入 $i : \mathbb{RP}^1 \hookrightarrow \mathbb{RP}^n$ 显然可以由丛映射 $\gamma_1^1 \to \gamma_n^1$

得到，则由 S-W 类定义的第二与第四条公理

$$i^*(w_1(\gamma_n^1)) = w_1(\gamma_1^1) \neq 0$$

则 $w_1(\gamma_n^1)$ 不为 0，则必然为 α，由 γ_n^1 的维数为 1，故其总 S-W 类为 $1+\alpha$。

γ_n^1 可以自然地被视为 $n+1$ 维平凡丛 ε^{n+1} 的子丛，取其正交补丛为 $\gamma^\perp$，则自然地其全空间为 $(\{\pm x\}, v)$（v 与 x 所在的直线垂直）所构成的集合，为 $\mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ 的子集。

由于 $\gamma_n^1 \oplus \gamma^\perp$ 是平凡丛，则有 $w(\gamma^\perp) = \overline{w}(\gamma_n^1) = (1+\alpha)^{-1} = 1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n$。

Lemma 3.1

$\tau_{\mathbb{RP}^n} \simeq \mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \gamma^\perp)$ ♡

证明 L 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中经过原点的一条直线，与 S^n 交于 $\pm x$，并记 $L^\perp$ 为该直线的正交补 n 维平面。考虑典范映射 $S^n \to \mathbb{RP}^n, x \mapsto \{\pm x\}$ 的切映射 $df_x : T_xS^n \to T_{\{\pm x\}}\mathbb{RP}^n$，显然对 $v \in T_xS^n$，有 $df_x(v) = df_{-x}(-v)$，故 $T_{\{\pm x\}}\mathbb{RP}^n$ 与所有的对 $\{(x,v),(-x,-v) : x \perp v\}$ 构成的集合同构。

由每一个这样的对可以与 $\mathrm{Hom}(L, L^\perp)$ 中的元素 $x \mapsto v$ 一一对应，故 $T_{\{\pm x\}}\mathbb{RP}^n \simeq \mathrm{Hom}(L, L^\perp)$，则 $\tau_{\mathbb{RP}^n} \simeq \mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \gamma^\perp)$。 □

Proposition 3.2

$\tau_{\mathbb{RP}^n} \oplus \varepsilon^1 \simeq \gamma_n^1 \oplus \gamma_n^1 \oplus \cdots \oplus \gamma_n^1$（$n+1$ 个），进而 $w(\mathbb{RP}^n) = (1+\alpha)^n$。♠

证明 显然 $\mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^1)$ 是平凡线丛（它有一个处处非零的截面），故

$$\tau_{\mathbb{RP}^n} \oplus \varepsilon^1 \simeq \mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \gamma^\perp) \oplus \mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^1) \simeq \mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^1 \oplus \gamma^\perp) \simeq \mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon^{n+1})$$

又 $\mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon^{n+1}) = \mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon^1) \oplus \mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon^1) \cdots \oplus \mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon^1)$（共 $n+1$ 个），故得证。

由又命题 3.1，$w(\tau_{\mathbb{RP}^n}) = w(\tau_{\mathbb{RP}^n} \oplus \varepsilon^1) = (w(\gamma_n^1))^n$，由例 3.2 的结果得证。 □

Corollary 3.2

$w(\mathbb{RP}^n)=1$ 当且仅当 $n=2^k-1(k\in\mathbb{N})$

进而若 $\mathbb{RP}^n$ 是可平行化的，则有 $n=1,3,7,15,\cdots$。

证明 若 $n=2^k-1$，则 $w(\mathbb{RP}^n)=(1+\alpha)^{2^k}=1+\alpha^{2^k}=1+\alpha^{n+1}=1$

反之若 $n=2^k m$（m 为大于 1 的奇数），则

$$w(\mathbb{RP}^n)=(1+\alpha^{2^k})^m=1+m\alpha^{2^k}+\frac{m(m-1)}{2}\alpha^{2^{k+1}}+\cdots\neq 1$$

矛盾！故原命题得证。 □

Remark 事实上可以证明只有 $\mathbb{RP}^1,\mathbb{RP}^3,\mathbb{RP}^7$ 是可平行化的。

利用 $\mathbb{RP}^n$ 的 Stiefel-Whitney 类，我们可以证明如下的 Whitney 定理。

Theorem 3.1 (Whitney)

如果 $n+1=2^r m$（m 为奇数），则在 $\mathbb{RP}^n$ 上不存在 2^r 个处处线性无关的向量场。

证明 取 $p=2^r(m-1)$，则由命题3.2，有

$$w_p(\mathbb{RP}^n)=\binom{n+1}{p}\alpha^p=\binom{2^r m}{2^r}\alpha^p=\alpha^p\neq 0$$

若存在 2^r 个无关向量场，则由命题3.1的（4）

$$w_i(\mathbb{RP}^n)=0(n-2^r+1\leq i\leq n)$$

这与 $w_p(\mathbb{RP}^n)\neq 0$ 矛盾！故得证。 □

3.2 S-W 类的初步应用

这一节我们利用 S-W 类来解决一些有趣的小问题。

首先我们回忆在微分流形课程中学到的强 Whitney 浸入定理。

Theorem 3.2 (强 Whitney 浸入定理)

任意 $m(m>1)$ 维的光滑流形可以被浸入到 $\mathbb{R}^{2m-1}$ 中。♡

这里我们说明 $2m-1$ 是最强的结果。

Proposition 3.3

若 $\mathbb{RP}^{2^r}$ 可以浸入到 $\mathbb{RP}^{2^r+k}$ 中，则 $k \geq 2^r-1$。♠

证明 回忆上一节中我们得到（取 $n=2^r$）

$$w(\mathbb{RP}^n)=(1+\alpha)^{n+1}=1+\alpha+\alpha^n$$

则 $\overline{w}(\mathbb{RP}^n)=(w(\mathbb{RP}^n))^{-1}=1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{n-1}$。

另一方面，若 $\mathbb{RP}^n$ 可以浸入到 $\mathbb{RP}^{n+k}$ 中，则对法丛 ν 维数为 k，自然有 $w_i(\nu)=0(i>k)$。又由 Whitney 对偶定理

$$\overline{w}_i(\mathbb{RP}^n)=w_i(\nu)$$

有 $\overline{w}_i(\mathbb{RP}^n)=0(i>k)$，则 $k\geq n-1=2^r-1$。 □

两个同维数流形的并能否实现为一个更高维流形的边界是**配边理论**中的重要问题。S-W 类在非定向配边理论中也发挥了重要的作用，为此我们需要引入 Stiefel-Whitney 数的概念。

取 M 为一个 n 维的闭流形，则在第一章的预备知识中我们知道可以定义 M 的 $\mathbb{Z}_2$ 系数的基本同调类 $\mu_M\in H_n(M;\mathbb{Z}_2)$，则对任意的 $v\in H^n(M;\mathbb{Z}_2)$，我们得到一个一个指标 $\langle v,\mu_M\rangle\in$

$\mathbb{Z}_2$，被称为 Kronecker 指标，简记为 $v[M]$。

现在我们对 v 取一些具体的值。令 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 为一列满足 $r_1 + 2r_2 + \cdots + nr_n = n$ 的非负整数，则对切丛 τ_M，可以取出 $H^n(M; \mathbb{Z}_2)$ 中的元素

$$w_1^{r_1}(\tau_M) w_2^{r_2}(\tau_M) \cdots w_n^{r_n}(\tau_M)$$

取它为上述的 v，得到的对应 Kronecker 指标具有非常重要的意义。

Definition 3.3
模 2 的指标

$$\langle w_1^{r_1}(\tau_M) w_2^{r_2}(\tau_M) \cdots w_n^{r_n}(\tau_M), \mu_M \rangle = w_1^{r_1} w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n}[M]$$

被称为流形 M 相关于单项式 $w_1^{r_1} w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n}$ 的***Stiefel-Whitney* 数**。

对两个流形 M, M', 称他们有**相同**的 *Stiefel-Whitney* 数，是指对任意的如上 $r_1, r_2, \cdots$，均有

$$w_1^{r_1} w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n}[M] = w_1^{r_1} w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n}[M']$$

♣

Example 3.3 本例中我们来计算 $M = \mathbb{RP}^n$ 的 S-W 数。

如果 n 为偶数，则 $w_n(M) = (n+1)\alpha^n \neq 0$，则取 $r_1 = \cdots = r_{n-1} = 0, r_n = 1$，对应的 S-W 数为 $< w_n(M), \mu_M > \neq 0$。故 $\mathbb{RP}^n$ 有非零的 S-W 数。

若 $n = 2k-1$ 为奇数，则 $w(M) = (1+\alpha)^{2k} = (1+\alpha^2)^k$，则 $w_j(M) = 0$(j 为奇数)。但又由于

$$r_1 + 2r_2 + \cdots + nr_n = n$$

右边为奇数，则必须存在 j 为奇数使得 $r_j \neq 0$，则 $w_1^{r_1} w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n}[M] = 0$。故 $\mathbb{RP}^n$ 的所有 S-W 类均为 0。

如下的两个定理表明了 S-W 数的重要性。

Theorem 3.3 (Pontrjagin 定理)

若 n 维流形 M 为某一个 $n+1$ 维流形 B 的边界，则 M 的所有 S-W 数均为 0。

证明 取带边流形 B 的基本同调类 $\mu_B \in H_{n+1}(B, M; \mathbb{Z}_2)$，由命题1.2，同调群的长正合列连接同态 $\partial : H_{n+1}(B, M; \mathbb{Z}_2) \to H_n(M; \mathbb{Z}_2)$ 把 μ_B 映为 μ_M。再记上同调群的长正合列中的连接同态为 $\delta : H^n(M; \mathbb{Z}_2) \to H^{n+1}(B, M; \mathbb{Z}_2)$，则对任意的 $v \in H^n(M; \mathbb{Z}_2)$，有

$$\langle v, \mu_M \rangle = \langle v, \partial \mu_B \rangle = \langle \delta v, \mu_B \rangle$$

对切丛 τ_B 在 M 的限制，取其 M 的外法向量丛，则其显然有一个处处非零的截面，故为平凡线丛。且又由于该丛的正交补为切丛 τ_M，我们有

$$\tau_B|_M \simeq \tau_M \oplus \varepsilon^1$$

故 $w(\tau_B)|_M = w(\tau_M)$，则

$$w_1^{r_1} w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n}[M] = \langle \delta(w_1^{r_1} w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n}), \mu_B \rangle = \langle \delta i^*(w_1^{r_1} w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n}), \mu_B \rangle$$

又由于有正合列

$$H^n(B; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{i^*} H^n(M; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(B, M; \mathbb{Z}_2)$$

也即 $\delta i^* = 0$，则 $w_1^{r_1} w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n}[M] = 0$，故得证。 □

事实上，该定理的逆命题也正确，但这是一个强的多的结果，在此并不给出证明。

Theorem 3.4 (Thom)

如果流形 M 的所有 Stiefel-Whitney 数为 0，则 M 可以实现为某一个紧光滑流形的边界。

Example 3.4 我们在上面已经计算过了 $\mathbb{RP}^{2k-1}$ 的所有 Stiefel-Whitney 数均为 0，故由 Thom 定理，$\mathbb{RP}_{2k-1}$ 可以实现为流形的边界。

下面我们讨论两个流形的无交并能否被实现为流形的边界这一问题。

Definition 3.4

对两个 n 维光滑流形 M_1, M_2，称它们属于同一个不定向**配边类**，如果它们的无交并 $M_1 \coprod M_2$ 是一个 $(n+1)$ 维紧光滑流形的边界，此时简记为 $M_1 \sim M_2$。♣

Proposition 3.4

$\sim$ 给出了所有 n 维光滑流形集合中的一个等价关系。♠

证明 首先，对同一个流形 M 的两份复制，它们的并是流形 $M \times [0,1]$ 的边界，故 $M \simeq M$。

对称性是显然的。

若 $L \simeq M, M \simeq N$，则设 $L \coprod M$ 是 V 的边界，$M \coprod N$ 是 W 的边界。则可以把 V 和 W 沿边界上 M 的部分粘连起来（由管状邻域定理可以保证该过程的实现）形成新的流形 X，则 $L \coprod N$ 是 X 的边界，则 $L \sim N$。 □

为了研究更平凡的配边关系，我们不难想到刚才所讨论的 Pontrjagin 定理和 Thom 定理。为了运用它们，首先需要讨论无交并流形的 Stiefel-Whitney 数。

Lemma 3.2

对两个 n 维光滑流形 M 和 N 和满足 $r_1 + 2r_2 + \cdots nr_n = n$ 的非负整数序列 $r_1, r_2, \cdots r_n$，有

$$w_1^{r_1} w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n}[M \coprod N] = w_1^{r_1} w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n}[M] + w_1^{r_1} w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n}[N]$$

♡

证明 首先我们熟知

$$H^n(M \coprod N; \mathbb{Z}_2) \simeq H^n(M; \mathbb{Z}_2) \oplus H^n(N; \mathbb{Z}_2), H_n(M \coprod N; \mathbb{Z}_2) \simeq H_n(M; \mathbb{Z}_2) \oplus H_n(N; \mathbb{Z}_2)$$

同调群的关系给出了基本同调类之间的关系 $\mu_{M \coprod N} = (\mu_M, \mu_N)$。

上同调群的关系给出了 S-W 类的关系（这里使用到了 S-W 类公理化定义中的自然性）$w(M \coprod N) = (w(M), w(N))$，则结论显然成立。 □

则结合该引理和上述的 Pontrjagin 定理、Thom 定理，我们得到了属于同一不定向配边类的等价判据。

Corollary 3.3

两个流形 M 和 N 属于同一个不定向配边类当且仅当它们有相同的 *Stiefel-Whitney* 数。♡

3.3 存在性的证明

在上面的讨论中我们都假设了 S-W 类的存在性，在这一节中我们会通过具体构造的方法给出 S-W 类的存在性的证明。

为了后续需要，这里我们引入代数拓扑中 Steenrod 平方的概念。

Definition 3.5

满足如下一系列条件的同态 $Sq^i : H^n(X;\mathbb{Z}_2) \to H^{n+i}(X;\mathbb{Z}_2)$ 称为***Steenrod* 平方**。

（1）可加性：$Sq^i(a+b) = Sq^i(a) + Sq^i(b)$

（2）自然性：对 $f : X \to Y$，$Sq^i(f^*(\alpha)) = f^*(Sq^i(\alpha))$

（3）边界条件：若 $a \in H^n(X;\mathbb{Z}_2)$，则 $Sq^0(a) = a, Sq^n(a) = a \cup a, Sq^i(a) = 0(i > n)$。

（4）*Cartan* 公式：$Sq^k(a \cup b) = \sum\limits_{i=0}^{k} Sq^i(a) \cup Sq^{k-i}(b)$。

对相对情形 (X, Y) 也可以定义 *Steenrod* 平方，所满足的条件与上述一致，此处不再重复。♣

在这里我们默认满足如上条件的同态确实成立（具体构造非常复杂，详见 Hatcher 的代数拓扑第四章附录 L，此处省略）。

回忆我们在命题2.1建立的 Thom 同构: $\Phi : H^i(B;\mathbb{Z}_2) \to H^{i+n}(E, E';\mathbb{Z}_2), b \mapsto \pi^*(b) \cup c$，其中 c 为 Thom 类。则我们断言

Theorem 3.5

$w_i'(\xi) = \Phi^{-1} Sq^i \Phi(1)$ 符合 *Stiefel-Whitney* 类定义中的几条公理。(下面的所有 *Steenrod* 平方默认是在相对情形下定义的) ♡

证明　为了简洁性，对 $a \in H^n(X, Y;\mathbb{Z}_2)$，定义其总 Steenrod 平方为

$$Sq(a) = a + a + Sq^1(a) + Sq^2(a) + \cdots + Sq^n(a)$$

则令 $w'(\xi) = \Phi^{-1} Sq(\Phi(1)) = \Phi^{-1} Sq(c)$，下面我们逐条验证 w' 满足四条公理。

第一条 由 Steenrod 平方的定义（3），显然

$$w'_0(\xi) = \Phi^{-1}Sq^0(c) = \Phi^{-1}(c) = 1$$

且对 $i > n$

$$w'_i(\xi) = \Phi^{-1}Sq^i(c) = \Phi^{-1}(0) = 0$$

第二条 对任意从映射 $f : \xi_1 \to \xi_2$，有诱导映射 $g : (E_1, E'_1) \to (E_2, E'_2)$。令 c_i 为 ξ_i 的 Thom 类，Φ_i 为 ξ_i 的 Thom 同构，则由 Thom 类的定义不难有 $g^*(c_2) = c_1$，则

$$g^*(\Phi_2(a)) = g^*(\pi_2^*(a) \cup c_2) = g^*(\pi_2^*(a)) \cup c_1 = \pi_1^*(f^*(a)) \cup c_1 = \Phi_1(f^*(a))$$

由 Steenrod 平方的定义（2），有

$$f^*(w'_i(\xi_2)) = f^*(\Phi_2^{-1}Sq^i(c_2)) = \Phi_1^{-1}(g^*(Sq^i(c_2))) = \Phi_1^{-1}(Sq^i(g^*(c_2))) = \Phi_1^{-1}Sq^i(c_1) = w'_i(\xi_1)$$

第三条 考虑笛卡尔积 $\xi = \xi_1 \times \xi_2$，ξ_i 的 Thom 类为 $c_i \in H^{n_i}(E_i, E'_i; \mathbb{Z}_2)$，则可以定义交叉积 $c_1 \times c_2 \in H^{n_1+n_2}(E_1 \times E_2, E_1 \times E'_2 \cup E'_1 \times E_2; \mathbb{Z}_2) = H^{n_1+n_2}(E_1 \times E_2, (E_1 \times E_2)'; \mathbb{Z}_2)$。但 $c_1 \times c_2|_{F_1\times F_2,(F_1\times F_2)'} = c_1|_{(F_1,F'_1)} \times c_2|_{(F_2,F'_2)}$，故由定义可知 $c_1 \times c_2$ 为笛卡尔积 $\xi_1 \times \xi_2$ 的 Thom 类。令 Φ 为 $\xi_1 \times \xi_2$ 的 Thom 同构，则

$$\Phi(a \times b) = (\pi_1 \times \pi_2)^*(a \times b) \cup (c_1 \times c_2) = (\pi_1^*(a) \cup c_1) \times (\pi_2^*(b) \cup c_2) = \Phi_1(a) \times \Phi_2(b)$$

可以计算

$$w'(\xi) = \Phi^{-1}(Sq(c)) = \Phi^{-1}(Sq(c_1) \times Sq(c_2)) = \Phi^{-1}(\Phi_1(w(\xi_1) \times \Phi_2(w(\xi_2))) = w'(\xi_1) \times w'(\xi_2)$$

现在设 ξ_1 和 ξ_2 有相同的底空间 B，则将上式的两边同时利用对角线嵌入拉回到 B 上，则有

$$w'(\xi_1 \oplus \xi_2) = w'(\xi_1) \cup w'(\xi_2)$$

第四步 γ_1^1 为 $\mathbb{RP}^1$ 上的典范线丛，取全空间 $E(\gamma_1^1)$ 中长度小于等于 1 的向量构成的集合，不

难看出它是一个 Mobius 带 M，边界圆为 B。由于 M 和 B 分别为 E 和 E' 的形变收缩核，有

$$H^*(M,B;\mathbb{Z}_2)\approx H^*(E,E';\mathbb{Z}_2)$$

同时将 $\mathbb{RP}^2$ 赋予典范 CW 复形结构，则有一个 2-细胞 D^2，且 $\mathbb{RP}^2-D^2$ 同胚于 M，则由切除定理

$$H^*(M,B;\mathbb{Z}_2)\approx H^*(\mathbb{RP}^2,D^2;\mathbb{Z}_2)$$

故可以自然地把 $H^1(E,E';\mathbb{Z}_2)$ 嵌入到 $H^1(\mathbb{RP}^2;\mathbb{Z}_2)$ 中，则基本同调类 $H^1(E,E';\mathbb{Z}_2)$ 对应的像只能与 $H^1(\mathbb{RP}^2;\mathbb{Z}_2)$ 的生成元 α 对应，则 $Sq^1(u)=u\cup u$ 与 $Sq^1(\alpha)=\alpha\cup\alpha\neq 0$ 对应，则

$$w_1'(\gamma_1^1)=\Phi^{-1}Sq^1(u)\neq 0$$

故得证。 □

3.4 唯一性的证明

上一节中我们利用 Thom 同构和 Steenrod 平方构造了一个满足四条公理的 Stiefel-Whitney 类，本节中我们证明这是唯一的满足定义的类，主要思路是利用我们之前的讨论，把所有的向量丛推到无穷 Grassmann 流形 G_n 上，这首先需要我们对 G_n 的上同调环进行研究。

Theorem 3.6
G_n 的上同调环 $H^*(G_n;\mathbb{Z}_2)$ 是由 $w_1(\gamma^n),\cdots,w_n(\gamma^n)$ 在 $\mathbb{Z}_2$ 上生成的多项式代数。♡

证明 显然上式的右边包含于左边，则只需要对任意的 r 证明等式两边的 r 维群的秩相等即可。

令 C^r 为所有的 r-上链，Z^r 为所有的上边界，则

$$\operatorname{rank}(H^r(G_n;\mathbb{Z}_2)) \le \operatorname{rank}(Z^r) \le \operatorname{rank}(C^r)$$

上式的最右侧即为 G_n 的 CW 复形结构中所有 r-细胞的个数，故 $\operatorname{rank}(H^r(G_n;\mathbb{Z}_2))$ 至多等于 r-细胞数，回顾命题1.5，为将 r 分割为至多 n 个正整数的和的方法。

另一方面，原命题的右边的 r 维群中，对不同的非负整数序列 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 使得 $r_1+2r_2+\cdots+nr_n=r$，有**不同**（这需要接下来证明的引理！）的单项式 $w_1^{r_1}(\gamma^n)\cdots w_n^{r_n}(\gamma^n)$。对每组这样的 $r_1,\cdots,r_n$，取 $r_n, r_n+r_{n-1},\cdots,r_n+r_{n-1}+\cdots+r_1$ 中的非零项，我们得到一个将 r 分割为至多 n 个正整数的和的方案，并不难验证满足条件的 $r_1,\cdots,r_n$ 与这样的分割是一一对应的。故所有不同的 r 次单项式个数恰好等于对应的分割数。

同样由下面将要证的引理，所有的这样的单项式是线性无关的，则原命题右边的 r 维群的秩至少为这样的分割数。

由右边包含于左边，上述的不等式必须为等式，故 $H*(G_n;\mathbb{Z}_2)$ 的 r 维群的秩与右边的多项式代数的 r 维群的秩相等，均为将 r 分割为至多 n 个正整数的方案数，故得证。 □

证明中我们承认了如下的引理，在此补充叙述与证明。

Lemma 3.3

$w_1(\gamma^n), w_2(\gamma^n), \cdots, w_n(\gamma^n)$ 之间没有多项式关系。

证明 若 $p(w_1(\gamma^n), \cdots, w_n(\gamma^n)) = 0$，其中 p 为模 2 系数的 n 元多项式，则由命题1.4，任意仿紧空间上的 n 维向量丛 ξ，存在丛映射 $g : \xi \to \gamma^n$，则由自然性

$$w_i(\xi) = g^*(w_i(\gamma^n))$$

则有

$$p(w_1(\xi), w_2(\xi), \cdots, w_n(\xi)) = g^*(p(w_1(\gamma^n), \cdots, w_n(\gamma^n))) = 0$$

即对所有的 n 维丛 ξ，$w_i(\xi)$ 之间也有多项式关系。

但考虑 $\mathbb{RP}^\infty$ 上的典范线丛 γ^1，我们知道 $H^*(\mathbb{RP}^\infty; \mathbb{Z}_2)$ 是由 α 生成的多项式代数，且 $w(\gamma^1) = 1 + \alpha$。

则考虑 n 次的笛卡尔积 $X = \mathbb{RP}^\infty \times \cdots \times \mathbb{RP}^\infty$，其上同调环 $H^*(X; \mathbb{Z}_2)$ 为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 生成的多项式代数（上述生成元均为 1 维的）。对丛的 n 次笛卡尔积 $\xi = \gamma^1 \times \cdots \times \gamma^1$，则 ξ 是 X 上的 n 维丛。则有

$$w(\xi) = (w(\gamma^1))^n = (1 + \alpha)^n = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \cdots (1 + \alpha_n)$$

则 $w_i(\xi)$ 是 i 元基本对称多项式，显然所有的 $w_i(\xi)$ 之间没有多项式关系，矛盾！故 $w_i(\gamma^n)$ 之间没有多项式关系。 □

借助上面的结果我们证明 Stiefel-Whitney 类是唯一的。

Theorem 3.7

存在唯一的对应 $\xi \mapsto w(\xi)$ 将任意仿紧空间上的向量丛 ξ 对应于一列满足 *Stiefel-Whitney* 类定义的四条公理的上同调类。

证明 我们已经证明了存在性。下证唯一性。假设存在两个这样的对应 $\xi \mapsto w(\xi)$ 和 $\xi \mapsto \overline{w}(\xi)$，则对 $\mathbb{RP}^1$ 上的典范线从 γ_1^1，有

$$w(\gamma_1^1) = \overline{w}(\gamma_1^1) = 1 + \alpha$$

将 γ_1^1 嵌入到 $\mathbb{RP}^\infty$ 上的典范线从 γ^1 中，由自然性可知

$$w(\gamma^1) = \overline{w}(\gamma^1) = 1 + \alpha$$

再考虑 n 次笛卡尔积 $\xi = \gamma^1 \times \gamma^1 \cdots \times \gamma^1$，有

$$w(\xi) = \overline{w}(\xi) = (1 + \alpha_1) \cdots (1 + \alpha_n)$$

则由命题1.4，存在从映射 $\xi \to \gamma^n$，再由定理3.6，$H^*(G_n; \mathbb{Z}_2)$ 可以单嵌入到 $H^*(\mathbb{RP}^\infty \times \cdots \times \mathbb{RP}^\infty; \mathbb{Z}_2)$ 中，则由自然性 $w(\gamma_n) = \overline{w}(\gamma_n)$。

对任意仿紧空间上的 n 维向量从 η, 再次使用命题1.4，存在从映射 $f : \eta \to \gamma^n$，则再次由自然性:

$$w(\eta) = f^*(w(\gamma^n)) = f^*(\overline{w}(\gamma^n)) = \overline{w}(\eta)$$

则 $w = \overline{w}$，唯一性得证。 □

Chapter 4 实向量丛示性类理论的进一步应用

4.1 关于流形的法丛

M 是一个一个 n 维光滑流形，且作为闭子集嵌入在 $n+k$ 维黎曼流形 A 中，接下来我们讨论 M 在 A 中的法丛的示性类。首先陈述如下的管状邻域定理（我们在微分流形课程中学习过其特殊情况）：

Theorem 4.1 (管状邻域定理)

存在 M 在 A 中的开邻域 U，使得 U 由映射 f 微分同胚于法丛的全空间，其中 f 将 M 中的每个点 x 映为 x 处的非零法向量。这样的邻域 U 称为 M 在 A 中的管状邻域。♡

证明 这里我们只证明 M 是紧流形时的情形。记法丛的全空间为 E，则对任意的 $\varepsilon > 0$，定义 E 的开子集 $E(\varepsilon) = \{(x,v) \in E : |v| < \varepsilon\}$。取 ε 使得在 $E(\varepsilon)$ 上可以定义指数映射 $Exp : E(\varepsilon) \to A$，则我们先证明对足够小的 ε，$E(\varepsilon)$ 被指数映射微分同胚地映为 A 中包含 M 的一个开集 N_ε。

我们熟知指数映射 Exp 是局部微分同胚，故只需要证对足够小的 $\varepsilon > 0$，Exp 在 $E(\varepsilon)$ 上是单射即可。

若结论不成立,则对任意的 i,存在 $E(\frac{1}{i})$ 中的 $(x_i,v_i) \neq (x_i',v_i')$ 使得 $Exp(x_i,v_i) = Exp(x_i',v_i')$。

则我们得到了一列点列 $\{(x_i,v_i)\}$，又由 M 是紧的，可以找到同时收敛的子列（为了简便不妨仍然以 i 为下表）$\lim\limits_{i\to\infty}(x_i,v_i) = (x,0)$ 和 $\lim\limits_{i\to\infty}(x_i',v_i') = (x',0)$，则

$$x = Exp(x,0) = \lim_{i\to\infty} Exp(x_i,v_i) = \lim_{i\to\infty} Exp(x_i',v_i') = Exp(x',0) = x'$$

即 $x = x'$，但这与 Exp 在 $(x,0)$ 的一个足够小邻域内为微分同胚矛盾！

则为了补全证明，只需要证 $E(\varepsilon)$ 与 E 也是微分同胚的。这是显然的，想要的同胚可以如下具体构造出来：

$$(x, v) \mapsto (x, \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{|v|^2}{\varepsilon^2}}})$$

则原命题得证。 □

在下面的讨论中我们均默认 M 被嵌入为 A 的闭子集，当 M 为紧流形时该条件自然成立。

Proposition 4.1

对 M 在 A 中的法丛 ν（全空间为 E），有上同调环之间的同构 $H^*(E, E'; R) \approx H^*(A, A - M; R)$

证明 取 N_ε 同上。首先由切除定理

$$H^*(A, A - M; R) \approx H^*(N_\varepsilon, N_\varepsilon - M; R)$$

则微分同胚 $Exp : (E(\varepsilon), E'(\varepsilon)) \to (N_\varepsilon, N_\varepsilon - M) \subset (A, A - M)$ 给出

$$H^*(E(\varepsilon), E'(\varepsilon); R) \approx H^*(A, A - M; R)$$

再次由切除定理

$$H^*(E(\varepsilon), E'(\varepsilon); R) \approx H^*(E, E'; R)$$

则结合上式得证。 □

Remark 可以说明上述命题中的同构与 A 的黎曼度量结构选取是无关的。

则现在取 E 的 $\mathbb{Z}_2$ 系数 Thom 类，则由上述命题，它对应于一个上同调类 $u' \in H^k(A, A - M; \mathbb{Z}_2)$。如果法丛 ν 是可定向的，则将系数取为 $\mathbb{Z}$。

Definition 4.1

上述的 $u' \in H^k(A, A-M; R)$ 在自然同态下 $H^k(A; R)$ 中的像被称为 k 余维子流形 M 的 R-系数对偶上同调类。

对偶上调类与法丛的最高维 Stiefel-Whitney 类、Euler 类（如果可定向）之间有着如下的关系。

Theorem 4.2

$\mathbb{Z}_2$ 系数的对偶上同调类在限制同态 $H^k(A; \mathbb{Z}_2) \to H^k(M; \mathbb{Z}_2)$ 中的像为法丛 ν 的 k 维 *Stiefel-Whitney* 类 $w_k(\nu)$。

若 ν 是可定向的，则 $\mathbb{Z}$ 系数的对偶上同调类在限制同态 $H^k(A; \mathbb{Z}) \to H^k(M; \mathbb{Z})$ 中的像为法丛 ν 的 *Euler* 类 $e(\nu)$。

证明 定义 $s: M \to E$ 是法丛 ν 的非零截面，诱导映射 $s^*: H^*(E; \mathbb{Z}_2) \to H^*(M; \mathbb{Z}_2)$，则取 $\mathbb{Z}_2$ 系数的 Thom 类 u，$s^*(u|E) \in H^k(M; \mathbb{Z}_2)$。事实上它等于 $w_k(\nu)$：记 Φ 为 Thom 同构：$H^k(M; \mathbb{Z}_2) \to H^{2k}(E, E'; \mathbb{Z}_2)$，则

$$s^*(u|E) = \Phi^{-1}(\pi^*(s^*(u|E)) \cup u) = \Phi^{-1}((u|_E) \cup u) = \Phi^{-1}(u \cup u) = \Phi^{-1} Sq^k(u) = w_k(\nu)$$

再用 $(N_\varepsilon, N_\varepsilon - M)$ 代替 (E, E')，则自然同态 $H^k(N_\varepsilon, N_\varepsilon - M; \mathbb{Z}_2) \to H^k(M; \mathbb{Z}_2)$ 将 u 对应的类映成 $w_k(\nu)$，则得证。

$\mathbb{Z}$ 系数的情形需要如下引理。

Lemma 4.1

自然同态 $f: H^k(M; \mathbb{Z}) \to H^k(M; \mathbb{Z}_2)$ 将 $e(\nu)$ 映为 $w_k(\nu)$。

证明 取 $\overline{u}$ 为 $\mathbb{Z}$ 系数 Thom 类，则同上

$$e(\nu) = \Phi^{-1}(\pi^*(e(\nu)) \cup \overline{u}) = \Phi^{-1}((\overline{u}|_E) \cup \overline{u}) = \Phi^{-1}(\overline{u} \cup \overline{u})$$

则

$$f(e(\nu)) = \Phi^{-1}(f(\overline{u} \cup \overline{u})) = \Phi^{-1}(u \cup u) = w_k(\nu)$$

最后一步来自于 $\mathbb{Z}_2$ 情形下的证明。

在承认上述引理的情况下，$\mathbb{Z}$ 系数的情形与 $\mathbb{Z}_2$ 系数的情形完全一致，只需要在证明过程中留意 f 的作用即可，细节在此省略。 □

在 3.2 节中我们处理了流形浸入到欧氏空间的问题，这里上述定理向我们为流形的嵌入问题提供了判据：

Corollary 4.1

若 n 维流形 M 能够光滑嵌入为 $\mathbb{R}^{n+k}$ 的闭子集，则对其法丛 ν，有 $w_k(\nu) = 0$。在可定向的情况下 $e(\nu) = 0$。 ♡

Remark 由 Whitney 对偶定理，$w_k(\nu_k) = \overline{w}_k(\tau_M)$，则上述推论可以叙述为：若 $\overline{w}_k(\tau_M) \neq 0$，则 M 不可以光滑嵌入为 $\mathbb{R}^{n+k}$ 的闭子集。

Example 4.1 再次考察 $\mathbb{RP}^n$ 的例子，由上可知它不可以光滑嵌入到 $\mathbb{R}^{2n-1}$ 中，则这告诉我们 Whitney 强嵌入定理中的维数是最佳的。

4.2 关于流形的切丛

设 M 为黎曼流形，则我们赋予 $M \times M$ 乘积流形的典范黎曼度量。我们知道对角线嵌入 $\triangle : x \mapsto (x, x)$ 将 M 嵌入为 $M \times M$ 的闭子集。显然 M 在 $M \times M$ 中的法丛 ν 与 M 的切丛 τ_M 是同构的。

Proposition 4.2

τ_M 的任何一个定向为 M 提供了一种定向。反之，M 的任何一个定向也为 τ_M 提供一种定向。

证明 M 可定向是指存在 $\mu_x \in H_n(M|x;\mathbb{Z})(\forall x)$ 满足局部相容性条件：$\forall x \in M$，存在 x 的一个 n-细胞邻域，使得对任意 $y \in N$，自然同态

$$H_n(M|x;\mathbb{Z}) \to H_n(M|N;\mathbb{Z}) \to H_n(M|y;\mathbb{Z})$$

将 μ_x 映为 μ_y。

类似地，τ_M 可定向是指存在 $\mu'_x \in H_n(T_xM|0;\mathbb{Z})(\forall x)$ 满足局部相容性条件：$\forall x \in M$，存在 x 的一个 n-细胞邻域，使得对任意 $y \in N$，自然同态

$$H_n(T_xM|0;\mathbb{Z}) \to H_n(TN|N \times 0;\mathbb{Z}) \to H_n(T_yM|0;\mathbb{Z})$$

将 μ'_x 映为 μ'_y。

由命题4.1（**为什么？**），有 $H_n(M|x;\mathbb{Z})$ 与 $H_n(T_xM|0;\mathbb{Z})$ 同构。则不难有 $\{\mu_x\}$ 满足局部相容性与 $\{\mu'_x\}$ 满足相容性等价。 □

再次回到 M 的对角线嵌入，由命题4.1，我们有与法丛的 Thom 类对应的类 $u' \in H^n(M \times M, M \times M - \triangle(M);\mathbb{Z}_2)$, 且由定理4.2，$u'$ 在 $\triangle(M) \approx M$ 上的限制为 Stiefel-Whitney 类 $w_n(\nu) = w_n(\tau_M)$。若法丛可定向则可以取 $\mathbb{Z}$ 系数，则 u' 的限制为 Euler 类 $e(\nu) = e(\tau_M)$。

为了简单起见，下面我们省略上同调群的系数 R（若可定向则取为 $\mathbb{Z}$，否则取为 $\mathbb{Z}_2$），且我们记 M 在 $M\times M$ 中的对偶上同调类为 u''。下面我们讨论 u' 和 u'' 的一些性质。

Proposition 4.3

首先取定一组 R-定向 $\mu_x\in H^n(M|x)$，其中 $\langle\mu_x,\mu_x\rangle=1$。

同时定义标准嵌入 $j_x:(M,M-x)\to(M\times M,M\times M-\triangle(M)),y\mapsto(x,y)$，则对任意 $x\in M$，有 $j_x^*(u')=\mu_x$。♠

证明 由命题4.1的证明，对任意 $x\in M$ 和 0 在 T_xM 中的小邻域 N，考虑嵌入

$$f:(N,N-0)\to(M\times M,M\times M-\triangle(M)),v\mapsto(Exp(x,-v),Exp(x,v))$$

它的诱导映射将 u' 映为 $H^n(N|0)\approx H^n(T_xM|0)$ 的对应生成元。

同时又由于有同伦 $f_t:(v,t)\mapsto(Exp(x,-tv),Exp(x,v))$，故可以将上面的嵌入换成 $g:v\mapsto(x,Exp(x,v))$。

又 $Exp:(N,N-0)\to(M,M-x)$ 诱导了命题4.2中的同构 $H^n(T_xM|0;\mathbb{Z})\approx H^n(M|x;\mathbb{Z})$)，且 $g=j_x\circ Exp$，则 $j_x^*(u')=\mu_x$。 □

Lemma 4.2

对任意 $a\in H^*(M)$，有 $(a\times1)\cup u''=(1\times a)\cup u''$ ♡

证明 N_ε 为 $\triangle(M)$ 的管状邻域，则显然 N_ε 为 $\triangle(M)$ 的形变收缩核。定义 p_i 为 $M\times M$ 向第 i 个分量的投影。由于 $p_1|_{\triangle(M)}=p_2|_{\triangle(M)}$，则 $p_1|_{N_\varepsilon}$ 与 $p_2|_{N_\varepsilon}$ 同伦。

则对限制同态 $i^*:H^i(M\times M)\to H^i(N_\varepsilon)$，有 $i^*(a\times1)=i^*(p_1^*(a))=i^*(p_2^*(a))=i^*(1\times a)$。则由交换同态：

$$\begin{tikzcd}
H^i(M\times M) \arrow[r] \arrow[d, "\cup u'"] & H^i(N_\varepsilon) \arrow[d, "\cup u'|_{(N_\varepsilon,N_\varepsilon-\triangle(M))}"] \\
H^{i+n}(M\times M,M\times M-\triangle(M)) \arrow[r, "\approx"] & H^{i+n}(N_\varepsilon,N_\varepsilon-\triangle(M))
\end{tikzcd}$$

则立即有 $(a\times 1)\cup u''=(1\times a)\cup u''$。 □

下面我们用另一个方法来探讨庞加莱对偶定理。首先我们需要代数拓扑中的 Slant 乘积的概念。这里我们为了方便只讨论上同调系数为域的特殊情形，更一般的理论可以参考 Spanier 的《Algebraic Topology》第六章。

在 X 和 Y 为有限维复形且上同调系数为域的时候有

$$H^*(X\times Y)\approx H^*(X)\oplus H^*(Y)$$

则我们定义一个同态

$$H^*(X)\otimes H^*(Y)\otimes H_*(Y)\to H^*(X), a\otimes b\otimes\beta\mapsto a\langle b,\beta\rangle$$

再用 $H^*(X\times Y)$ 代替 $H^*(X)\otimes H^*(Y)$，则定义了

$$H^*(X\times Y)\otimes H_*(Y)\to H^*(X), p\otimes b\mapsto p/b$$

则运算 $'/'$ 称为 Slant 乘积。由定义它满足 $(a\times b)/\beta=a\langle b,\beta\rangle$。同时对固定的 $\beta\in H_*(Y)$, 同态 $p\mapsto p/\beta$ 具有左 $H^*(X)$-线性性：

$$((a\times 1)\cup p)/\beta=a\cup(p/\beta)$$

为了证明对偶定理，我们先需要一个引理：

Lemma 4.3 设 M 是紧的，且有基本同调类 $\mu_M\in H_n(M)$，则对角嵌入的对偶上同调类 $u''\in H^n(M\times M)$ 满足关系 $u''/\mu_M=1\in H^0(M)$。 ♡

证明 首先有典范的交换图表

$$\begin{tikzcd}
H^n(M\times M) \arrow[r, "/\mu_M"] \arrow[d] & H^0(M) \arrow[d] \\
H^n(x\times M) \arrow[r, "/\mu_M"] & H^0(x)
\end{tikzcd}$$

左侧的映射将 u'' 映为 $1 \times i_x^*(u'')$，其中 $i_x : M \to M \times M$ 为典范嵌入。由 $(a \times b)/\mu_M = a\langle b, \mu_M\rangle$ 可知 $(u''/\mu_M)|_x = 1 \times \langle i_x^*(u''), \mu_M\rangle|_x \in H^0(x)$。

又由基本同调类 μ_M 的定义，μ_M 在自然同态 $H_n(M) \to H_n(M|x)$ 下的像为 μ_x。再考虑如下的映射

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "i_x"] & (M, M - x) \arrow[d, "j_x"] \\
M \times M \arrow[r, "\subset"] & (M \times M, M \times M - \triangle(M))
\end{tikzcd}$$

有 $\langle i_x^*(u''), \mu_M\rangle|_x = \langle j_x^*(u')|M, \mu_M\rangle|_x = \langle j_x^*(u'), \mu_x\rangle$，由命题 4.3 有 $\langle i_x^*(u''), \mu_M\rangle|_x = 1(\forall x)$。于是有

$$(u''/\mu_M)|_x = 1 \in H^0(x)(\forall x)$$

则由唯一性定理 $u''/\mu_M = 1 \in H^0(M)$。 □

借助如上的引理，我们可以证明如下的对偶定理。

Theorem 4.3 (对偶定理)

M 是一个紧流形，则对 $H^*(M)$ 的任意一组基 $b_1, \cdots, b_r$，存在一组对偶基 $b_1^\#, \cdots, b_r^\# \in H^*(M)$，使得 $\langle b_i \cup b_j^\#, \mu_M\rangle = \delta_{ij}$。且此时对角嵌入的对偶上同调类为

$$u'' = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{\dim b_i} b_i \times b_i^\#$$

证明 首先由 Kunneth 公式

$$H^*(M \times M) \approx H^*(M) \otimes H^*(M)$$

则存在 $c_i \in H^*(M), \dim b_i + \dim c_i = n$，使得

$$u'' = b_1 \times c_1 + \cdots + b_r \times c_r$$

应用等式

$$a = a \cup (u''/\mu_M) = ((a \times 1) \cup u'')/\mu_M = ((1 \times a) \cup u'')/\mu_M$$

代入 u'' 的展开式即有

$$a = ((1 \times a) \cup \sum_{i=1}^{r} b_i \times c_i)/\mu_M = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{\dim a \cdot \dim b_i} (b_i \times (a \cup c_i))/\mu_M = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{\dim a \cdot \dim b_i} b_i \langle a \cup c_i, \mu_M \rangle$$

则取 $a = b_j$，有 $(-1)^{\dim b_i \cdot \dim b_j} \langle b_j \cup c_i, \mu_M \rangle = \delta_{ij}$，则取 $b_i^\# = (-1)^{\dim b_i} c_i$ 即可。 □

利用对偶定理我们可以得到关于欧拉示性数的有关结论。首先回忆欧拉示性数的定义：

$$\chi(M) = \sum (-1)^k \mathrm{rank} H^k(M) = \sum (-1)^k \#\{k\text{−cell}\}$$

关于流形欧拉示性数和流形切丛的示性类之间有如下的关系

Proposition 4.4

M 是一个紧的可定向流形，则对 $\mathbb{Z}$ 系数的基本同调类 μ_M，有 $\langle e(\tau_M), \mu_M \rangle = \chi(M)$。

对应地，若 M 不可定向，则对 $\mathbb{Z}_2$ 系数的基本同调类 $\overline{\mu}_M$，有 $\langle w_n(\tau_M), \overline{\mu}_M \rangle \equiv \chi(M) \mod 2$。

证明　可定向的情况下，由定理4.2我们知道

$$e(\tau_M) = \triangle^*(u'')$$

再代入定理4.3可知

$$e(\tau_M) = \sum (-1)^{\dim b_i} b_i \cup b_i^\#$$

则

$$\langle e(\tau_M), \mu_M \rangle = \sum (-1)^{\dim b_i} \langle b_i \cup b_i^{\#}, \mu_M \rangle = \sum (-1)^{\dim b_i} = \chi(M)$$

系数为 $\mathbb{Z}_2$ 的情形基本一致，在此省略。 $\square$

4.3 吴文俊公式

Lemma 4.4

若 M 是紧光滑流形，则有公式 $w_i(\tau_M) = Sq^i(u'')/\mu_M$ ♡

证明 u 为 Thom 类，则由 Stiefel-Whitney 类的构造可知

$$Sq^i(u) = \pi^*(w_i) \cup u$$

则由命题4.1给出的同构 $H^*(E, E') \approx H^*(M \times M, M \times M - \triangle(M))$，再限制在 $H^*(M \times M)$ 上，即得

$$Sq^i(u'') = (w_i \times 1) \cup u''$$

再次利用 Slant 乘积的左线性性，即

$$w_i = w_i \cup (u''/\mu_M) = ((w_i \times 1) \cup u'')/\mu_M = Sq^i(u'')/\mu_M$$

则得证。 □

Remark 上述引理告诉我们如果两个流形是同伦等价的，则它们的 Stiefel-Whitney 类相同：因为由对偶定理 u'' 由流形的上同调群和基本同调类决定，而这两者是具有同伦不变性的。

事实上，吴文俊给出了用 $\mathbb{Z}_2$ 系数上同调环和 Steenrod 平方显式表达的 Stiefel-Whitney 类公式。

首先考虑可加同态:$H^{n-k}(M;\mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2, x \mapsto \langle Sq^k(x), \mu_M \rangle$，再由对偶定理，存在 $v_k \in H^k(M)$，使得

$$\langle v_k \cup x, \mu_M \rangle = \langle Sq^k(x), \mu_M \rangle (\forall x)$$

则我们可以定义总吴类 如下：

$$v = 1 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n \in H^{\Pi}(M;\mathbb{Z}_2)$$

其中 v_k 如上。则 v 可以由 $\langle v \cup x, \mu_M \rangle = \langle Sq(x), \mu_M \rangle$ 刻画。

Theorem 4.4 (吴文俊公式)

$w(\tau_M) = Sq(v)$，具体地

$$w_k(\tau_M) = \sum_{i+j=k} Sq^i(v_j)$$

证明 取 $H^*(M;\mathbb{Z}_2)$ 的一组基 $b_1, \cdots, b_r$ 和对偶基 $b_1^{\#}, \cdots, b_r^{\#}$，则任意 $x \in H^{\Pi}(M;\mathbb{Z}_2)$，有

$$x = \sum_{i=1}^{r} b_i \langle x \cup b_i^{\#}, \mu_M \rangle$$

则取 $x = v$ 即有

$$v = \sum_{i=1}^{r} b_i \langle v \cup b_i^{\#}, \mu_M \rangle = \sum_{i=1}^{r} b_i \langle Sq(b_i^{\#}), \mu_M \rangle$$

再作用以 Steenrod 平方有

$$Sq(v) = \sum_{i=1}^{r} Sq(b_i) \langle Sq(b_i^{\#}), \mu_M \rangle = \sum_{i=1}^{r} (Sq(b_i) \times Sq(b_i^{\#}))/\mu_M = Sq(u'')/\mu_M = w$$

故原式得证。 □

下面我们用一些例子来说明吴文俊公式的应用。首先吴文俊公式能够帮助我们计算某些特殊流形的 Stiefel-Whitney 类

Proposition 4.5

设 M 是一个紧流形，且其上同调环 $H^*(M;\mathbb{Z}_2)$ 是由一个元素 $a \in H^k(M;\mathbb{Z}_2)$ 生成的，则 $H^*(M;\mathbb{Z}_2)$ 有基 $\{1, a, \cdots, a^m\}$，$\dim M = km$。则此时

$$w(\tau_M) = (1+a)^{m+1} = 1 + \binom{m+1}{1} a + \cdots + \binom{m+1}{m} a^m$$

证明 首先对 $0<i<k$，有 $Sq^i(a)\in H^{k+i}(M;\mathbb{Z}_2)=\{0\}$，故

$$Sq(a)=Sq^0(a)+Sq^k(a)=a+a^2$$

则有

$$Sq^i(a)=(a+a^2)^i=a^i(1+a)^i$$

故自然有 $\langle Sq(a^i),\mu_M\rangle=\binom{i}{m-i}$，又由吴类的定义

$$\langle Sq(a^i),\mu_M\rangle=\langle v\cup a^i,\mu_M\rangle$$

则有

$$v=\sum\binom{i}{m-i}a^{m-i}=\sum\binom{m-j}{j}a^j$$

再由吴文俊公式，有

$$w=Sq(v)=\sum\binom{m-j}{j}Sq(a^j)$$

则由该表达式可以看出 w 的表达式与 k 无关，则只需考虑 $k=1$ 的情况。这与 $\mathbb{RP}^m$ 的总 Stiefel-Whitney 类的计算完全一致，故也为 $(1+a)^{m+1}$。 □

Example 4.2 取 $M=S^k$，则 $m=1$，由上述命题 $w(S^k)=(1+a)^2=1$，同样对 $\mathbb{RP}^m$ 也是如此。

对于三维流形，我们有一个不平凡的结论：

Theorem 4.5
紧三维流形的所有 Stiefel-Whitney 数均为 0。

证明 三维流形的所有 Stiefel-Whitney 数为 $w_1^3[M],w_1w_2[M],w_3[M]$，一一计算它们即可。

首先

$$w_1(M)=Sq^1(v_0)+Sq^0(v_1)=v_1$$

其次由于 $\forall x \in H^1(M;\mathbb{Z}_2)$ 有 $Sq^2(x)=0$，由吴类的定义

$$\langle v_2 \cup x, \mu_M \rangle = \langle Sq^2(x), \mu_M \rangle$$

故 $v_2=0$，则

$$w_2(M) = Sq^2(v_0) + Sq^1(v_1) + Sq^0(v_2) = w_1^2$$

又由于 M 是紧奇数维流形，则 $\chi(M)=0$，结合命题4.4可知 $w_3(M)=0$。

则回到上面的三个 Stiefel-Whitney 数，$w_3[M]=0$，而 $w_1^3[M]=v_1^3=w_1w_2[M]$，另一方面

$$\langle w_1 \cup w_2, \mu_M \rangle = \langle v_1 \cup w_2, \mu_M \rangle = \langle Sq^1(w_2), \mu_M \rangle = \langle Sq^1(w_1^2), \mu_M \rangle = 0$$

则 $w_1 \cup w_2 = 0$，故所有 Stiefel-Whitney 数为 0。 □

4.4 障碍理论

Stiefel 和 Whitney 最开始研究示性类理论的目的就是寻找某些不相关向量场的存在性的障碍，在前面我们已经接触过了几个示性类作为拓扑障碍的例子，这一节我们更系统地探讨障碍理论，并给出障碍类的定义。

令 ξ 为底空间 B（此处不妨设 B 有 CW 复形结构）上的 n 维实向量丛，对每个纤维 F，**Stiefel 流形** $V_k(F)$ 定义为 F 中所有 k-标架的全体构成的集合。令 $V_k(F)$ 为每点处的纤维，则得到一个新向量丛，记作 $V_k(\xi)$。则不难看出 $V_k(\xi)$ 的一个非零截面就是 ξ 的 k 个处处无关的截面构成的有序组。

Steenrod 定义了**第一障碍类**为 $H^{n-k+1}(B;\pi_{n-k}V_k(F))$ 中的元素，使得 $V_k(\xi)$ 在 B 的 $(n-k+1)$ 骨架上存在截面当且仅当第一障碍类为 0。（具体构造可参考 Hatcher 的《Algebraic Topology》4.3 节“障碍理论”有关内容）

令 $j=n-k+1$，用记号 $\mathfrak{o}_j \in H^j(B;\pi_{j-1}V_{n-j+1}(F))$ 代表第一障碍类。Steenrod 证明了对任意的 j，均存在唯一的非平凡同态 $h:\pi_{j-1}V_{n-j+1}(F)\to\mathbb{Z}_2$，则我们有诱导的上同调类 $h_*\mathfrak{o}_j(\xi)\in H^j(B;\mathbb{Z}_2)$。

Theorem 4.6

$h_*\mathfrak{o}_j(\xi)=w_j(\xi)$。 ♡

证明　考虑无穷 Grassmann 流形 G_n 上的典范丛 γ^n，由定理3.6，存在某个 n 元多项式 f_j，使得

$$h_*\mathfrak{o}_j(\gamma^n)=f_j(w_1(\gamma^n),\cdots,w_n(\gamma^n))$$

再由自然性

$$h_*\mathfrak{o}_j(\xi)=f_j(w_1(\xi),\cdots,w_n(\xi))$$

又等式左边是一个维数不超过 n 的上同调类，故 f_j 可以写为

$$f_j(w_1,\cdots,w_n)=f'(w_1,\cdots,w_{j-1})+\lambda w_j$$

其中 $f'=f'_{j,n}$ 是一个多项式，$\lambda=\lambda_{n,j}$ 为 0 或 1。

考虑 G_{j-1} 上的 n 维丛 $\eta=\gamma^{j-1}\oplus\varepsilon^{n-j+1}$，则自然有 $\mathfrak{o}_j(\eta)=0$，则

$$\begin{aligned}0&=f'(w_1(\eta),\cdots,w_{j-1}(\eta))+\lambda w_j(\eta)\\&=f'(w_1(\gamma^{j-1}),\cdots,w_{j-1}(\gamma^{j-1}))+\lambda w_j(\gamma^{j-1})\\&=f'(w_1(\gamma^{j-1}),\cdots,w_{j-1}(\gamma^{j-1}))\end{aligned}$$

又 $w_1(\gamma^{j-1}),\cdots,w_{j-1}(\gamma^{j-1})$ 无多项式关系，则 $f'=0$。

再证明 $\lambda_{j,n}=1$，这里只证明 $j=n$ 的情形，$j<n$ 的情形下，先 Whitney 和上一个 ε^{n-j} 再利用同样的方法可以证明。

记 $\xi=\gamma_1^n$ 为 γ^n 在 $G_n(\mathbb{R}^{n+1})$ 上的限制。将 $G_n(\mathbb{R}^{n+1})$ 与 $\mathbb{RP}^n$ 等同，则 ξ 将 S^n 上的每组对径点 $\{u,-u\}$ 赋予了 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中 u 的正交补作为纤维。

取 ξ 的一个截面 $\{u,-u\}\mapsto u_0-(u_0\cdot u)u$，则该截面在 $\{u_0,-u_0\}$ 以外处处非零。则我们取 u_0 为 $\mathbb{RP}^n$ 的 n-细胞的中心点，则我们得到了 ξ 在 $(n-1)$-骨架上的 1 个非零截面，也即 $V_1(\xi)$ 在 $(n-1)$-骨架上的截面。

则障碍类赋予 n 细胞以 $\pi_{n-1}V_1F\approx\mathbb{Z}$ 的生成元，则 $h_*\mathfrak{o}_n(\xi)\neq 0$，故 $\lambda_{n,n}=1$，得证。□

下面我们主要的目标是建立欧拉类与障碍类之间的联系，这需要一些前置的准备。首先回忆我们之前为可定向丛建立的 Gysin 序列（见2.5）：

$$\cdots\to H^{i-n}(B;\mathbb{Z})\xrightarrow{\cup e}H^i(B;\mathbb{Z})\xrightarrow{\pi'^*}H^i(E';\mathbb{Z})\to H^{i-n+1}(B;\mathbb{Z})\to\cdots$$

对不可定向的情况，我们只能取 $\mathbb{Z}_2$ 系数，并考虑用 Stiefel-Whitney 类代替 Euler 类：

考虑 B 的二重覆叠 $\tilde{B}\to B$, 则构建 B 上的线丛 ξ 如下：全空间为 $E(\xi)=\tilde{B}\times\mathbb{R}$ 将 (x,t)

和 $(x', -t)$ 视为等价得到的空间，其中 x, x' 为 B 中某点的两个原像，则 $\tilde{B}$ 是 E' 的形变收缩核。利用与可定向情形完全一样地方法，我们可以得到如下不可定向情形的 Gysin 序列

Proposition 4.6

对任意的二重覆叠 $\tilde{B} \to B$，存在如下正合列

$$\cdots \to H^{j-1}(B; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cup w_1(\xi)} H^j(B; \mathbb{Z}_2) \to H^j(\tilde{B}; \mathbb{Z}_2) \to H^j(B; \mathbb{Z}_2) \to \cdots$$

在研究 Stiefel-Whitney 类时我们讨论了 Grassmann 流形与万有丛，这里在 Euler 类的情况下，我们研究所谓的**定向 Grassmannn 流形**和**定向万有丛**。

记 $\tilde{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ 为 $\mathbb{R}^{n+k}$ 的定向 n 维超平面全体，令 $k \to \infty$ 则有无穷定向 Grassmann 流形 $\tilde{G}_n$。G_n 上的万有丛 γ^n 提升到 $\tilde{G}_n$ 上得到的定向 n-平面丛称为定向万有丛，记为 $\tilde{\gamma^n}$。

Theorem 4.7

上同调环 $H^*(\tilde{G}_n; \mathbb{Z}_2)$ 是由 $w_2(\tilde{\gamma^n}), \cdots, w_n(\tilde{\gamma^n})$ 生成的 $\mathbb{Z}_2$ 系数多项式代数。

证明 与定理3.6类似，此处省略。 □

Corollary 4.2

对任意仿紧空间上的可定向向量丛 ξ，有 $w_1(\xi) = 0$。

证明 由上述定理，$H^1(\tilde{G}_n; \mathbb{Z}_2) = 0$，则必然有 $w_1(\tilde{\gamma^n}) = 0$，再由自然性立即得证。 □

则现在对一个 n 维可定向向量丛 ξ，考虑其最高维第一障碍类

$$\mathfrak{o}_n(\xi) \in H^n(B; \pi_{n-1} V_1 F)$$

其中

$$\pi_{n-1} V_1(F) \approx \pi_{n-1}(F - \{0\}) \approx H_{n-1}(F - \{0\}; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$$

也即 $\mathfrak{o}_\xi n \in H^n(B; \mathbb{Z})$，进而我们有

Theorem 4.8

ξ 为一个 *CW* 复形上的可定向 n 维向量丛，则 $\mathfrak{o}_n(\xi) = e(\xi)$。

证明 考虑投影 $\pi' : E' \to B$，则可以在 E' 上定义拉回丛 $\pi'^*\xi$，且显然这个丛有非零截面，故

$$\pi'^*\mathfrak{o}_n(\xi) = \mathfrak{o}_n(\pi'^*\xi) = 0$$

再由可定向的 Gysin 序列

$$H^0(B;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cup e(\xi)} H^n(B;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi'^*} H^n(E';\mathbb{Z})$$

则 $\mathfrak{o}_n(\xi) \in \operatorname{Ker}(\pi'^*) \subset \operatorname{Im}(\cup e)$，故存在 $\lambda \in H^0(B;\mathbb{Z})$ 使得 $\mathfrak{o}_n(\xi) = \lambda \cup e(\xi)$。

特别地，对 $\tilde{\gamma^n}$，存在 $\lambda_n \in \mathbb{Z}$ 使得 $\mathfrak{o}_n(\tilde{\gamma^n}) = \lambda_n e(\tilde{\gamma^n})$，再由自然性，对一般的可定向 n 维丛 ξ 有 $\mathfrak{o}_n(\xi) = \lambda_n e(\xi)$。

将系数拉到 $\mathbb{Z}_2$ 上, 由定理4.4则有 $w_n(\tilde{\gamma^n}) = \lambda w_n(\tilde{\gamma^n})$，也即 λ 为奇数。

若 n 为奇数，由命题2.2, 有

$$\mathfrak{o}_n(\xi) - e(\xi) = (1 - \lambda_n)e(\xi) = 0$$

若 n 为偶数，取 τ 为 S^n 的切丛，则由命题4.4，有

$$\langle e(\tau), \mu_{S^n}\rangle = \chi(S^n) = 2$$

Steenrod 同样证明了 $\langle \mathfrak{o}_n(\tau), \mu_{S^n}\rangle = 2$，则只能 $\lambda = 1$，故得证。 □

下面给出了一个第二 Stiefel-Whitney 类作为拓扑障碍的例子，该例子在后面讨论旋量丛的时候会使用到，首先定义旋量群：

Definition 4.2

<u>旋量群</u>Spin(n) 是 $SO(n)$ 的二重覆叠，使得存在如下短正合列

$$1 \to \mathbb{Z}_2 \to \operatorname{Spin}(n) \to SO(n) \to 1$$

我们有如下命题：

Proposition 4.7

M 为 m 维的闭定向流形，赋予 *Riemann* 度量 g^{TM}，则任意的 M，记 $\mathcal{F}_x(M)$ 为 T_xM 的所有标准正交基 $\sigma = (e_1, \cdots, e_m)$ 构成的集合，并令 $\mathcal{F}(M) = \cup_{x\in M}\mathcal{F}_xM$。

$\pi : \mathcal{F}(M) \to M$ 自然形成丛结构，并且带有 $SO(m)$ 的自由、可迁的右作用，故称 $\mathcal{F}(M)$ 上有 $SO(m)$-主丛结构，并称 $\mathcal{F}(M)$ 为 M 的定向标架丛。

我们有 $SO(n)$-主丛 $\mathcal{F}(M)$ 可以提升为 $\mathrm{Spin}(n)$-主丛当且仅当 $\omega_2(M) = 0$。 ♠

证明 这里给出该命题的大致证明，细节可以参考 Steenrod 的《The Topology of Fiber Bundles》。

如果有上面的提升，则有如下的 Leray-Serre 谱序列（有关内容参考 Bott 的《Differential Forms in Algebraic Topology》）

$$0 \to H^1(M;\mathbb{Z}_2) \to H^1(\mathcal{F}(M);\mathbb{Z}_2) \to H^1(SO(m);\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{f} H^2(M;\mathbb{Z}_2)$$

旋量的提升的存在性来自于 $H^1(\mathcal{F}(M);\mathbb{Z}_2)$ 中限制在每一个纤维上均为 $H^1(SO(m);\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ 中的生成元 θ 的元素，故由正合列，旋量提升的存在性等价于 $f(\theta) = 0$。然而可以验证 $f(\theta)$ 符合 Stiefel-Whitney 类的四条公理，故 $f(\theta) = \omega_2(M)$，故原命题得证。 □

作为本章的结束，我们来看一个综合运用吴文俊公式和障碍理论的例子

Theorem 4.9 (Stiefel)

任意紧的可定向三维流形 M 是可平行化的。 ♡

证明 在定理4.5中我们已经利用吴文俊公式证明了 $w_3(M) = 0, w_2(M) = w_1^2(M)$。再由推论4.2可知，$w_1(M) = 0$，故 M 的所有 Stiefel-Whitney 类均为 0。

同时 $\pi_1 V_2(F) = \pi_1 V_2(\mathbb{R}^3) = \pi_1 SO(3) = \pi_1 \mathbb{RP}^3 = \mathbb{Z}_2$，故由定理4.4，有 $\mathfrak{o}_2(M) = w_2(M) = 0$。

则我们得到了 M 的二维骨架上的 $V_2(\tau_M)$ 的一个截面，也即 τ_M 在二维骨架上的两个无关的截面。又由

$$\pi_2 V_2(F) = \pi_2 V_2(\mathbb{R}^3) = \pi_2 SO(3) = 0$$

故这个 $V_2(\tau_M)$ 的截面可以延拓到整个 M 上，也即 τ_M 在 M 上有两个无关截面，则 τ_M 有二维的平凡子丛 ξ，则 ξ 关于 τ_M 的正交补也是平凡的，故 τ_M 是平凡的。 $\square$

Remark 事实上上述的紧性条件还可以去掉，其证明需要流形的 Spin 结构有关知识，可以参考 Robion C. Kirby 的《The Topology of 4-Manifolds》。

Chapter 5 陈类与 Pontrjagin 类

这一章我们讨论复向量丛的示性类理论以及它与实向量丛理论之间的联系。首先给出复向量丛的有关基本定义

5.1 复向量丛与复流形

复向量丛的定义与实向量丛定义完全类似

Definition 5.1

对一个拓扑空间 B 上的纤维丛 $\omega : F \to E \xrightarrow{\pi} B$，如果纤维 F 为 n 维复向量空间，则称 ω 为<u>**复向量丛**</u>（或称为 $\mathbb{C}^n$ 丛）。此外，若局部平凡化映射均为全纯的，则称为<u>**全纯丛**</u>。♣

在实向量丛的研究中我们赋予了自然的欧氏结构，而对复向量丛而言，相对应地我们需要对应 Hermite 结构。

Definition 5.2

复向量丛 $\omega(B, E)$ 上的<u>***Hermite* 度量**</u> 是指一系列映射 $h_b : F_b(\omega) \times F_b(\omega) \to \mathbb{C}(\forall b \in B)$，满足

（1）h_b 是半双线性的，即对 $\forall b \in B, \lambda, \mu \in \mathbb{C}, x, y, z, w \in F_b(\omega)$

$$h_b(x + y, z + w) = h_b(x, z) + h_b(x, w) + h_b(y, z) + h_b(y, w)$$

和

$$h_b(\lambda x, \mu y) = \overline{\lambda}\mu h_b(x, y)$$

（2）h_b 是共轭对称的，即 $\forall b \in B, x, y \in F_b(\omega)$

$$h_b(x, \overline{y}) = \overline{h_b(y, \overline{x})}$$

（3）h_b 是正定的，即对 $\forall b \in B, x \in F_b(\omega)$

$$h_b(x, x) > 0$$

♣

利用在 1.1 节介绍的方法我们也可以利用已有的复向量丛构造新的复向量丛。除此之外，我们也可以通过赋予 $2n$ 维实向量丛以复结构来得到复向量丛。

Definition 5.3

$2n$ 维实向量丛 ξ 上的<u>**复结构**</u>是指一个连续映射 $J : E(\xi) \to E(\xi)$，它把每一个纤维实线性地映成自身，且满足

$$J(J(v)) = -v, \forall v \in E(\xi)$$

♣

设 $2n$ 维实向量丛 ξ 上有复结构，则在每个纤维 $F_b(\xi)$ 上定义复数与向量的乘法

$$(x + iy)v = xv + J(yv), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

则可以验证这在纤维 $F_b(\xi)$ 上定义了复向量结构，且满足局部平凡化条件。

反之，给定了 n 维复向量丛 ω，自然地将每个纤维视为实向量空间，则得到一个 $2n$ 维实向量丛，记作 $\omega_{\mathbb{R}}$。

复结构能够为实向量丛赋予定向结构。

Proposition 5.1

若 ω 是复向量丛，则 $\omega_{\mathbb{R}}$ 是可定向的。

♠

证明 若 V 是一个有限维复向量空间，取其 $\mathbb{C}$ 基 $a_1, \cdots, a_n$，则 $a_1, ia_1, \cdots, a_n, ia_n$ 构成 $V_{\mathbb{R}}$ 的

一组基。这一组有序的基能够决定 $V_{\mathbb{R}}$ 的定向。由于 V 的所有复基可以用 $GL(n,\mathbb{C})$ 中的一条道路连接，则改变复基的选取不影响定向，也即上述定向的选取与基的选取无关。

对 ω 的每一个纤维进行如上定向的选取，自然在每一个小邻域中可以得到一组连续变化的定向。则我们只需验证在两个平凡化邻域相交的部分两组定向相容即可。

相交处两个复基之间的坐标变换给出了 $GL(n,\mathbb{C})$ 的一个截面。若将复基下变换矩阵记作 A，再把坐标变换在上述的实基下的矩阵记作 $A_{\mathbb{R}}$，有

$$\det A_{\mathbb{R}} = (\det A)^2 > 0$$

故相交处的坐标变换具有正的行列式，故不改变定向，则相容性得到验证。 □

最重要的复向量丛的例子就是复流形的切丛，这里我们给出复流形的概念。首先我们考虑 $\mathbb{C}^n$ 的子集。

Example 5.1 U 是 $\mathbb{C}^n$ 的开子集，切丛为 τ_U，切丛的全空间 $TU = U \times \mathbb{C}^n$，其上自然有复结构

$$J_0(u,v) = (u, iv)(\forall u \in U, v \in \mathbb{C}^n)$$

现在对另一个 $U' \in \mathbb{C}^m$ 是开子集，和一个光滑映射 $f: U \to U'$。我们可以定义其切映射 $df_u : TU_u \to TU'_{f(u)}$，这自然是一个实线性映射。如果它还是复线性的，也即

$$df \circ J_0 = J_0 \circ df$$

则称 f 是<u>全纯</u> 的（也称<u>复解析的</u>）。

上述讨论中复结构与切映射交换的现象就是我们这里对全纯的刻画，可以帮助我们定义复流形。

Definition 5.4

一个 $2n$ 维实流形 M，若其切丛上有复结构 J，则称 M 为近复流形，记作 (M,J)，J 称为 M 上的近复结构。

一个近复流形 (M,J) 成为复流形，若在每一点 $x\in M$，都存在 x 的一个邻域 U 和 $\mathbb{C}^n$ 中的一个开集 V，使得存在一个微分同胚 $h:U\to V$，且满足

$$dh\circ J=J_0\circ dh$$

由命题5.1，复流形均是可定向的。

关于判定一个近复流形是否是复流形有如下的定理

Theorem 5.1 (Newlander-Nirenberg)

近复流形 M 上的近复结构 J 能够给出复结构当且仅当 *Nijenhuis(2,1)*-张量 N_J 为 *0*，其中

$$N_J(v,w)=[v,w]+J([Jv,w])+J([v,Jw])-[Jv,Jw](v,w\in T_xM)$$

利用和实流形类似的语言也可以验证复流形：若存在 M 的覆盖 $\{U_\alpha\}$，对每个 α 都存在对应的 $\mathbb{C}^n$ 中的开集 V_α 和微分同胚 $h_\alpha:U_\alpha\to V_\alpha$，若还有对任意的 α,β，有

$$h_\beta\circ h_\alpha^{-1}:h_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to h_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$$

作为 $\mathbb{C}^n$ 的两个开集之间的映射是全纯的，则 M 上有复结构。

而两个复流形 (M,J_M) 和 (N,J_N) 之间的映射 f 称为全纯的，则是指

$$df\circ J_M=J_N\circ df$$

与复分析中的最大模原理类似地，我们有如下的命题

Proposition 5.2

对连通的紧复流形 M，若 $f:M\to\mathbb{C}$ 是全纯的，则 f 是常数。

证明 M 紧，故存在 $x_0 \in M$ 使得 $|f(x_0)|$ 取得最大值，记 $a = f(x_0)$，则自然 $f^{-1}(a)$ 是闭的。利用 M 连通，只需证 $f^{-1}(a)$ 是开的即可。

任意的 $x \in f^{-1}(a)$，取其坐标邻域 (U, ϕ)，则有

$$g = f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{C}$$

是 $\phi(U)$ 上的全纯函数，且 $\phi(U)$ 是开的。但 $|g(\phi(x))| = \max\limits_{y \in U} |f(y)| = \max\limits_{z \in \phi(U)} |g(u)|$。

由最大模原理，g 为常数，故 f 在 U 上为常数，则 $U \subset f^{-1}(a)$，故 $f^{-1}(a)$ 是开的，则原命题得证。 □

由于对复流形 M，我们在 TM 上赋予了一个映射 J 使得 $J^2 = -\mathrm{Id}$, 对复化的切丛 $T_{\mathbb{C}}M$，我们也可以自然地延拓 J 的定义：$J(aX) = aJ(X)(a \in \mathbb{C})$。对 TM 的对偶丛，也即余切从 T^*M, 也可以如下定义 J:

$$(J\theta)(X) = \theta(JX)(\theta \in T^*M, X \in TM)$$

同样也可以在复化的余切从 $T^*_{\mathbb{C}}M = \wedge^1_{\mathbb{C}}M$ 上定义 J 如上。

不难看出对所有如上的拓展定义，仍然有 $J^2 = -\mathrm{Id}$，故关于 J 有特征值 $\pm\sqrt{-1}$。

记 $T_{\mathbb{C}}M$ 中对应特征值 $\sqrt{-1}(-\sqrt{-1})$ 的特征空间记为 $T^{1,0}(M)(T^{0,1}M)$，$T_{\mathbb{C}}M$ 中对应特征值 $\sqrt{-1}(-\sqrt{-1})$ 的特征空间记为 $T^{1,0}(M)(T^{0,1}M)$，$\wedge^1_{\mathbb{C}}M$ 中对应特征值 $\sqrt{-1}(-\sqrt{-1})$ 的特征空间记为 $\wedge^{1,0}(M)(\wedge^{0,1}M)$。

则显然有 $T_{\mathbb{C}}M = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$ 且 $T^{1,0}M = \overline{T^{0,1}M}$，和 $\wedge^1_{\mathbb{C}}M = \wedge^{1,0}(M) \oplus \wedge^{0,1}M$ 且 $\wedge^{1,0}M = \overline{\wedge^{0,1}M}$。

更一般地，令 $\wedge^k_{\mathbb{C}}M = \{\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_k : \theta_i \in \wedge^1_{\mathbb{C}}M\}$,$\wedge^{p,q}M = \wedge^{1,0}M \wedge \cdots \wedge (\wedge^{1,0}M) \wedge (\wedge^{0,1}M) \wedge \cdots (\wedge^{0,1}M)$，其中 p 个 $\wedge^{1,0}M$ 项，q 个 $\wedge^{0,1}M$ 项。称 $\wedge^{p,q}M$ 中的形式为 (p,q) 形式。

利用定理5.1不难验证如下的推论成立：

Corollary 5.1

(M, J) 为一近复流形，则以下命题等价：

(1) J 给出了 M 上的复结构。

(2) $T^{0,1}M$ 是可积的。

(3) $d\Gamma(\wedge^{1,0}M) \subset \Gamma(\wedge^{2,0}M \oplus \wedge^{1,1}M)$

(4)$d\Gamma(\wedge^{p,q}M) \subset \Gamma(\wedge^{p,q+1}M \oplus \wedge^{p+1,q}M)$

5.2 陈类

与实的情形相同地，我们也可以定义复 Grassmann 流形 $G_n(\mathbb{C}^{n+k})$，同样可以验证它是 nk 维复流形。此外也可以定义 $G_n(\mathbb{C}^{n+k})$ 上的典范线丛 $\gamma^n(\mathbb{C}^{n+k})$，特别地，若 $n=1$，则 $G_1(\mathbb{C}^{k+1})=\mathbb{CP}^k$，并记 γ_1^1 为 $\mathbb{CP}^1$ 上的典范线丛。

与 Stiefel-Whitney 相同地，我们通过公理化的方式来定义陈类。

Definition 5.5 对每一个 n 维复向量丛 ω 都对应着一列上同调类 $c_i(\omega)\in H^{2i}(B(\omega),\mathbb{Z})(i=1,2,\cdots)$，被称为 ξ 的陈类，其中 $c_i(\omega)(i=0,1,2,\cdots)$ 满足如下公理：

（1）$c_0(\omega)=1\in H^0(B(\omega),\mathbb{Z})$，且 $c_i(\omega)=0(i>n)$

（2）$f:B(\omega)\to B(\omega')$ 来自于丛映射 $\omega\to\omega'$，则 $c_i(\omega)=f^*(c_i(\omega'))$

（3）若 ω 和 ω' 有相同的底空间，则

$$c_k(\omega\oplus\omega')=\sum_{i=0}^{k}c_i(\omega)\cup c_{k-i}(\omega')$$

（4）对 $\mathbb{CP}^1$ 上的典范线丛 γ_1^1，有 $c_1(\gamma_1^1)\neq 0$。♣

依旧与研究 Stiefel-Whitney 时一样地，定义总陈类为

$$c(\omega)=1+c_1(\omega)+\cdots+c_n(\omega)\in H^{\Pi}(B;\mathbb{Z})$$

接下来我们就要构造符合上面四条公理的陈类。

首先对 n 维复向量丛 $\omega(E,B)$，定义 $E_0=E-\{0\}$，则我们在 E_0 上定义 $n-1$ 维复向量丛 ω_0 如下：

E_0 中的每一点可以用 ω 的某一个纤维 F 中的一个非零向量 v 进行表示。设 ω 上已经赋予 Hermite 结构，ω_0 在 v 上的纤维定义为 v 在 F 中的正交补。上一节我们证明了 $\omega_{\mathbb{R}}$ 是可定

向的，则可以建立 Gysin 序列：

$$\cdots \to H^{i-2n}(B;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cup e} H^i(B;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi_0^*} H^i(E_0;\mathbb{Z}) \to H^{i-2n+1}(B;\mathbb{Z}) \to \cdots$$

对 $i < 2n-1$，有 $H^{i-2n}(B;\mathbb{Z}) = H^{i-2n+1}(B;\mathbb{Z}) = 0$，则此时

$$\pi_0^* : H^i(B;\mathbb{Z}) \to H^i(E_0;\mathbb{Z})$$

为同构。则现在我们可以构造陈类：

Theorem 5.2

对 n 维复向量丛 ω，如下对维数 n 归纳地定义 $c_i'(\omega) \in H^{2i}(B;\mathbb{Z})$：

首先定义最高维类 $c_n'(\omega) = e(\omega_{\mathbb{R}})$。

对 $i < n$，由 $\pi_0^* : H^i(B;\mathbb{Z}) \to H^i(E_0;\mathbb{Z})$ 是同构和归纳定义 $c_i'(\omega) = (\pi_0^*)^{-1} c_i'(\omega_0)$。

对 $i > n$，定义 $c_i'(\omega) = 0$。

同时记 $c'(\omega) = 1 + c_1'(\omega) + \cdots + c_n'(\omega)$。

则如上定义的 $c_i'(\omega)$ 符合陈类的定义。 ♡

下面验证各条公理。

第一条 显然成立。

第二条 现在设有从映射 $\omega \to \omega'$。依旧对维数进行归纳。设对 $i < n$ 时满足自然性，则当 ω 和 ω' 为 n 维时：

n 阶类的自然性由 Euler 类的自然性显然成立。

从映射 $\omega \to \omega'$ 诱导全空间非零元素之间的映射 $f_0 : E_0(\omega) \to E_0(\omega')$，而 f_0 显然来自于从映射 $\omega_0 \to \omega_0'$，故由归纳假设

$$c_i'(\omega_0) = f_0^*(c_i'(\omega_0'))$$

则由 $c_i'(\omega)$ 和 $c_i'(\omega')$ 的定义，有

$$c_i'(\omega) = (\pi_0^*)^{-1} c' i(\omega_0) = (\pi_0^*)^{-1} f_0^*(c_i'(\omega_0'))$$

又由于如下交换图标表：

$$\begin{tikzcd} E_0(\omega) \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\pi_0"] & E_0(\omega') \arrow[d, "\pi_0'"] \\ B(\omega) \arrow[r, "f"] & B(\omega') \end{tikzcd}$$

有

$$c_i'(\omega) = (\pi_0^*)^{-1} f_0^*(c_i'(\omega_0')) = f^*(\pi_0'^*)^{-1}(c_i'(\omega_0')) = f^*(c_i'(\omega'))$$

第四条 考虑 $\mathbb{CP}^k = G_1(\mathbb{C}^{k+1})$ 上的典范线丛 $\gamma^1(\mathbb{C}^{k+1})$，考虑其 Gysin 序列并注意到 $c_1'(\gamma^1(\mathbb{C}^{k+1})) = e(\gamma^1_{\mathbb{R}})$，有

$$\cdots \to H^{i+1}(E_0;\mathbb{Z}) \to H^i(\mathbb{CP}^k;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cup c_1'} H^{i+2}(\mathbb{CP}^k;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi_0^*} H^{i+2}(E_0;\mathbb{Z}) \to \cdots$$

其中 $E_0 = E_0(\gamma^1(\mathbb{C}^{k+1}))$，是形如 ($\mathbb{C}^{k+1}$ 中经过原点的直线，该直线上的非零向量）的二元组全体，则显然与 $\mathbb{C}^{k+1} - 0$ 等价，则有与 S^{2k+1} 相同的同伦型，故上面的 Gysin 序列简化为 $(0 \le i \le 2k-2)$

$$0 \to H^i(\mathbb{CP}^k;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cup c_1'} H^{i+2}(\mathbb{CP}^k;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi_0^*} 0$$

故 $H^0(\mathbb{CP}^k;\mathbb{Z}) \approx H^2(\mathbb{CP}^k;\mathbb{Z}) \approx \cdots \approx H^{2k}(\mathbb{CP}^k;\mathbb{Z})$，且 $H^{2i}(\mathbb{CP}^k;\mathbb{Z})$ 由 $c_1'(\gamma^1(\mathbb{C}^{k+1}))^i$ 生成。

类似地可以证明 $H^1(\mathbb{CP}^k;\mathbb{Z}) \approx H^3(\mathbb{CP}^k;\mathbb{Z}) \approx \cdots \approx H^{2k-1}(\mathbb{CP}^k;\mathbb{Z})$。再次利用 Gysin 序列

$$\cdots \to H^{-1}(\mathbb{CP}^k;\mathbb{Z}) \to H^1(\mathbb{CP}^k;\mathbb{Z}) \to H^1(E_0;\mathbb{Z}) \to \cdots$$

则 $H^1(\mathbb{CP}^k;\mathbb{Z}) = 0$。故 $\mathbb{CP}^k$ 的所有奇数维上同调群为 0。综上我们得到如下结果

Proposition 5.3

上同调环 $H^*(\mathbb{CP}^k;\mathbb{Z})$ 是由 2 维元 $c_1'(\gamma^1(\mathbb{C}^{k+1}))$ 生成的截断多项式代数，在 $2k+2$ 维开始为 0。也即

$$H^*(\mathbb{CP}^k;\mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^{k+1}) \quad (\alpha = c_1'(\gamma^1(\mathbb{C}^{k+1})), |\alpha| = 2)$$

第四条公理是上面的命题的立即结果。

第三条 为了验证第三条公理，我们需要再次运用推到“万有丛”再拉回的思想。下面使用的无穷复 Grassmann 流形 $G_n = G_n(\mathbb{C}^\infty)$ 和其上的典范丛 γ^n 与实的情形类似进行定义。首先依旧有如下展现“万有性”的命题。

Proposition 5.4

任意仿紧空间 B 上的 n 维复向量丛 ω，存在丛映射将 ω 映为 G_n 上的典范丛 γ^n。♠

由命题5.3我们立即有 $H^*(G_1(\mathbb{C}^\infty);\mathbb{Z})$ 是由 $c_1'(\gamma^1)$ 生成的多项式代数。更一般地我们有如下结论，与实的情况类似：

Theorem 5.3

上同调环 $H^*(G_n(\mathbb{C}^\infty);\mathbb{Z})$ 是由 $c_1'(\gamma^n),\cdots,c_n'(\gamma^n)$ 生成的 $\mathbb{Z}$ 系数多项式代数，且它们之间无多项式关系。♡

证明 仍旧对 n 归纳。上面我们已经给出了 $n=1$ 的情形。现假设 $n\geq 2$，考虑 γ^n 对应的 Gysin 序列

$$\cdots\to H^i(G_n;\mathbb{Z})\xrightarrow{\cup c_n'} H^{i+2n}(G_n;\mathbb{Z})\xrightarrow{\pi_0^*} H^{i+2n}(E_0;\mathbb{Z})\to H^{i+1}(G_n;\mathbb{Z})\to\cdots$$

E_0 中的一个点形如 (X,v)，其中 X 是 $\mathbb{C}^\infty$ 中的 n 维超平面，v 是 X 中的非零向量，则定义 $f(X,v)=X\cap v^\perp$，其中 $v^\perp$ 是 v 在 X 中的正交补（$\mathbb{C}^\infty$ 上如下赋予典范 Hermite 度量：$\langle(v_1,v_2.\cdots),(w_1,w_2,\cdots)\rangle=\sum\limits_{i=1}^{\infty}v_i\overline{w}_i$）。

则我们定义了一个映射 $f:E_0\to G_{n-1}$，下面再证明 f 诱导的上同调群同态实际上是同构。

定义 $\gamma^n(\mathbb{C}^N)$ 是 γ 在 $\mathbb{C}^N$ 上的限制，则记 $f_N:E_0(\gamma^n(\mathbb{C}^N))\to G_{n-1}(\mathbb{C}^N)$ 为 f 的限制，则任意 $Y\in G_{n-1}(\mathbb{C}^N)$,$f_N^{-1}(Y)$ 由所有的对 (X,v) 组成，其中 $v\neq 0\in\mathbb{C}^N$ 且与 Y 垂直，$X=Y+\mathbb{C}v$。

故我们可以将 f_N 视为从投影映射

$$E_0(\omega^{N-n+1})\to G_{n-1}(\mathbb{C}^N)$$

其中 ω^{N-n+1} 是 $G_{n-1}(\mathbb{C}^N)$ 上的复向量丛，其在每一个 $Y \in G_{n-1}(\mathbb{C}^N)$ 上的纤维是 Y 在 $\mathbb{C}^N$ 中的正交补。

再考虑 ω^{N-n+1} 的 Gysin 序列

$$H^{i-2N+2n-2}(G_{n-1}(\mathbb{C}^N);\mathbb{Z}) \to H^i(G_{n-1}(\mathbb{C}^N;\mathbb{Z})) \to H^i(E_0(\omega^{N-n+1});\mathbb{Z}) \to H^{i-2N+2n-1}(G_{n-1}(\mathbb{C}^N);\mathbb{Z})$$

则有在 $i \leq 2N-2n$ 时，f_N 诱导的上同调群同态为同构。再令 $N \to \infty$ 取直极限，有 f 的诱导同态是同构。故我们可以把 γ^n 的 Gysin 序列改写

$$\cdots H^i(G_n;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cup c_n} H^{i+2n}(G_n;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\lambda} H^{i+2n}(G_{n-1};\mathbb{Z}) \to H^{i+1}(G_n;\mathbb{Z}) \to \cdots$$

其中 $\lambda = (f^*)^{-1}\pi_0^*$。下面我们证明 $\lambda(c_i'(\gamma^n)) = c_i'(\gamma^{n-1})$。

$i = n$ 时显然成立，不妨 $i < n$。由 c' 的定义可知 $\pi_0^* c_i'(\gamma^n) = c_i'(\gamma_0^n)$。又 $f: E_0 \to G_{n-1}$ 来自于丛映射 $\gamma_0^n \to \gamma^{n-1}$，则结合第二条公理有

$$\lambda c_i'(\gamma^n) = (f^*)^{-1}\pi_0^* c_i'(\gamma^n) = (f^*)^{-1} c_i'(\gamma_0^n) = c_i'(\gamma^{n-1})$$

下面利用归纳假设，已知 $H^*(G_{n-1};\mathbb{Z})$ 是由 $c_1'(\gamma^{n-1}),\cdots,c_{n-1}'(\gamma^{n-1})$ 生成的，故 λ 是满射，则有

$$0 \to H^i(G_n;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cup c_n'} H^{i+2n}(G_n;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\lambda} H^{i+2n}(G_{n-1};\mathbb{Z}) \to 0$$

再对 i 归纳证明 $\forall x \in H^{i+2n}(G_n;\mathbb{Z})$ 可以被唯一表示为 $c_1'(\gamma^n),\cdots,c_n'(\gamma^n)$ 的多项式即可：对任意的 $x \in H^{i+2n}(G_n;\mathbb{Z})$，由关于 n 的归纳假设，存在唯一的多项式 p 使得

$$\lambda(x) = p(c_1'(\gamma^{n-1}),\cdots,c_{n-1}'(\gamma^{n-1}))$$

也即 $x - p(c_1'(\gamma^n),\cdots,c_{n-1}'(\gamma^n)) \in \mathrm{Ker}(\lambda)$，故由正合列，存在 $y \in H^i(G_n;\mathbb{Z})$ 使得 $x = y \cup c_n'(\gamma^n)$。

再由关于 i 的归纳假设，y 可以唯一表示为多项式 $q(c_1'(\gamma^n),\cdots,c_n'(\gamma^n))$，故有

$$x = p(c_1'(\gamma^n),\cdots,c_{n-1}'(\gamma^n)) + c_n'(\gamma^n)q(c_1'(\gamma^n),\cdots,c_n'(\gamma^n))$$

唯一性不难验证，在此省略。故得证。 □

在如上的准备工作之后我们来验证第三条公理，也即 Whitney 乘积公式：$c(\omega \oplus \phi) = c(\omega)c(\phi')$。首先我们需要如下两个引理

Lemma 5.1

若 ε^k 是 $B = B(\omega)$ 上的平凡 k 维复向量丛，则有 $c'(\omega \oplus \varepsilon^k) = c'(\omega)$。 ♡

证明 只需考虑 $k = 1$ 的情形，一般的情形利用归纳法不难证明。

令 $\phi = \omega \oplus \varepsilon^1$，则 $n + 1$ 维丛 ϕ 有非零截面，故由命题2.4，有

$$c'_{n+1}(\phi) = e(\phi_{\mathbb{R}}) = 0 = c'_{n+1}(\omega)$$

再对 $i \leq n$，令 $s : B \to E_0(\phi)$ 为非零截面，则它来自于从映射 $\omega \to \phi_0$，则

$$s^* c'_i(\phi_0) = c'_i(\omega)$$

故有

$$c'_i(\omega) = s^* \pi_0^* c'_i(\phi) = c'_i(\phi)$$

则得证。 □

Lemma 5.2

存在唯一的整系数多项式 $p_{m,n} = p_{m,n}(c'_1, \cdots, c'_m; \overline{c'}_1, \cdots, \overline{c'}_n)$，使得对在任意仿紧空间 B 上的任意的 m 维复向量丛 ω 和 n 维复向量丛 ϕ，均有

$$c'(\omega \oplus \phi) = p_{m,n}(c'_1(\omega), \cdots, c'_m(\omega); c'_1(\phi), c'_n(\phi)))$$

♡

证明 定义 $\pi_1 : G_m \times G_n \to G_m$ 为第一分量投影，$\gamma_1^m = \pi^*(\gamma^m)$，同理定义 π_2 和 $\gamma_2^n = \pi_2^*(\gamma^n)$，则 $\gamma_1^m \oplus \gamma_2^n$ 可以视为 $\gamma^m \times \gamma^n$。

由 Kunneth 公式有同构 $H^*(G_m; \mathbb{Z}) \otimes H^*(G_n; \mathbb{Z}) \approx H^*(G_m \times G_n; \mathbb{Z})$。故 $H^*(G_m \times G_n; \mathbb{Z})$ 是一个 $\mathbb{Z}$ 系数多项式环，变元为 $c'_i(\gamma_1^m), c'_j(\gamma_2^n)(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$，故存在唯一多项式 $p_{m,n}$

使得

$$c'(\gamma_1^m \oplus \gamma_2^n) = p_{m,n}(c_1'(\gamma_1^m), \cdots, c_m'(\gamma_1^m); c_1'(\gamma_2^n), \cdots, c_n'(\gamma_2^n))$$

由命题5.4，取映射 $f: B \to G_m$ 和 $g: B \to G_n$ 使得 $f^*(\gamma^m) \simeq \omega, g^*(\gamma^n) \simeq \phi$。定义 $h: B \to G_m \times G_n, b \mapsto (f(b), g(b))$，则有交换图表

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\
G_m & G_m \times G_n \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & G_n
\end{tikzcd}$$

则有

$$c'(\omega \oplus \phi) = h^*(c'(\gamma_1^m \oplus \gamma_2^n)) = p_{m,n}(c_1'(\omega), \cdots, c_m'(\omega); c_1'(\phi), c_n'(\phi)))$$

故得证。 □

下面我们具体计算 $p_{m,n}$。对 $m+n$ 归纳：

归纳假设 $c'(\gamma_1^{m-1} \oplus \gamma_2^n) = (1 + c_1'(\gamma_1^{m-1}) + \cdots + c_{m-1}'(\gamma_1^{m-1})))(1 + c_1'(\gamma_2^n) + \cdots + c_n'(\gamma_2^n))$，再考虑 $G_{m-1} \times G_n$ 上的两个从 $\gamma_1^{m-1} \times \varepsilon^1$ 和 γ_2^n，则由引理

$$c'(\gamma_1^{m-1} \oplus \varepsilon^1 \oplus \gamma_2^n) = p_{m,n}(c_1'(\gamma_1^{m-1} \oplus \varepsilon^1), \cdots, c_m'(\gamma_1^{m-1} \oplus \varepsilon^1); c_1'(\gamma_2^n), \cdots, c_n'(\gamma_2^n))$$

由引理5.1，Whitney 和上一个平凡丛不影响 c' 类，即

$$c'(\gamma_1^{m-1} \oplus \gamma_2^n) = p_{m,n}(c_1'(\gamma_1^{m-1}), \cdots, c_{n-1}'(\gamma_1^{m-1}), 0; c_1'(\gamma_2^n), \cdots, c_n'(\gamma_2^n))$$

则利用归纳假设

$$p_{m,n}(c_1', \cdots, c_{m-1}', 0; \overline{c_1'}, \cdots, \overline{c_n'}) = (1 + c_1' + \cdots + c_{m-1}')(1 + \overline{c'}_1 + \cdots + \overline{c'}_n)$$

故

$$p_{m,n}(c_1', \cdots, c_{m-1}', c_m'; \overline{c_1'}, \cdots, \overline{c_n'}) \equiv (1 + c_1' + \cdots + c_{m-1}' + c_m')(1 + \overline{c'}_1 + \cdots + \overline{c'}_n) \mod c_m'$$

完全类似地，有

$$p_{m,n}(c'_1,\cdots,c'_{m-1},c'_m;\overline{c'_1},\cdots,\overline{c'_n})\equiv(1+c'_1+\cdots+c'_{m-1}+c'_m)(1+\overline{c'}_1+\cdots+\overline{c'}_n)\mod \overline{c}'_n$$

则有

$$p_{m,n}(c'_1,\cdots,c'_{m-1},c'_m;\overline{c'_1},\cdots,\overline{c'_n})=(1+c'_1+\cdots+c'_{m-1}+c'_m)(1+\overline{c'}_1+\cdots+\overline{c'}_n)+uc'_m\overline{c'_n}$$

但 u 必须为零次的，否则 $\gamma_1^m\oplus\gamma_2^n$ 将会有大于 $2(m+n)$ 维的非零陈类，显然矛盾。

又对最高维陈类，有

$$c_{m+n}(\omega\oplus\phi)=e((\omega\oplus\phi)_{\mathbb{R}})=e(\omega_{\mathbb{R}}\oplus\phi_{\mathbb{R}})=c_m(\omega)c_n(\phi)$$

则必须有 $u=0$，故公理三得到验证。

综上我们完全证明了定理5.2，也即我们构造的 c' 就是想要的陈类。唯一性的证明与 Stiefel-Whitney 类的唯一性证明一致，在此省略。

Remark 陈类也有其代数几何定义方式，具体见 Griffiths 的《Principles of Algebraic Geometry》。

在本节的最后给出一个计算抽象陈类的例子。

对一个 n 维复向量丛 ω，其**共轭丛**$\overline{\omega}$ 与 ω 有相同的全空间、底空间和投影，但有 "相反" 的复结构。

Proposition 5.5

对 n 维复向量丛 ω，有 $c_k(\overline{\omega})=(-1)^kc_k(\omega)$。进而有

$$c(\overline{\omega})=1-c_1(\omega)+c_2(\omega)\cdots+(-1)^nc_n(\omega)$$

证明 对 ω 的任意一个纤维 F，取一组 $\mathbb{C}$ 基 $v_1,\cdots,v_n$，则由之前的论证，$v_1,iv_1,\cdots,v_n,iv_n$ 是 $F_{\mathbb{R}}$ 的一组基，且给出了 $\omega_{\mathbb{R}}$ 的定向。同样 $v_1,-iv_1,\cdots,v_n,-iv_n$ 也给出了 $\overline{\omega}_{\mathbb{R}}$ 的一组定向。

通过讨论行列式易知当 n 维偶数时两个定向相同，奇数时两个定向相反，则

$$c_n(\overline{\omega}) = e(\overline{\omega_{\mathbb{R}}}) = (-1)^n e(\omega_{\mathbb{R}}) = (-1)^n c_n(\omega)$$

对 $i < n$，由陈类的构造 $c_k(\omega) = (\pi_0^*)^{-1} c_k(\omega_0)$。显然 $\overline{\omega_0}$ 是与 $(\overline{\omega})_0$ 是同构的，故归纳地可以得出

$$c_k(\overline{\omega}) = (\pi_0^*)^{-1} c_k(\overline{\omega_0}) = (\pi_0^*)^{-1}(-1)^k c_k(\omega_0) = (-1)^k c_k(\omega)$$

故得证。 □

5.3 Pontrjagin 类

给定一个 n 维实向量丛 $\xi(E,B,F)$，我们将每一个纤维 F 进行复化，则得到一个新的复向量丛，其每一个纤维为 $F\otimes\mathbb{C}$，我们将该丛记作 $\xi\otimes\mathbb{C}$，称为实向量丛 ξ 的**复化**。

不难看出由于 $F\otimes\mathbb{C}=F\oplus iF$，$\xi\otimes\mathbb{C}$ 对应的实向量丛 $(\xi\otimes\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ 与 Whitney 和 $\xi\oplus\xi$ 是同构的。$\xi\otimes\mathbb{C}$ 上的自然复结构给出了 $\xi\oplus\xi$ 上的复结构：

$$J(x,y)=(-y,x)$$

Lemma 5.3

$\xi\otimes\mathbb{C}$ 与其共轭丛 $\overline{\xi\otimes\mathbb{C}}$ 是同构的

证明 显然 $x+iy\mapsto x-iy$ 将 $E(\xi\otimes\mathbb{C})$ 映到自身且是 $\mathbb{R}$-线性的，故给出了 $\xi\otimes\mathbb{C}$ 到 $\overline{\xi\otimes\mathbb{C}}$ 之间的同构。 □

则考虑总陈类

$$c(\xi\otimes\mathbb{C})=1+c_1(\xi\otimes\mathbb{C})+c_2(\xi\otimes\mathbb{C})+\cdots+c_n(\xi\otimes\mathbb{C})$$

由命题5.5，有

$$c(\overline{\xi\otimes\mathbb{C}})=1-c_1(\xi\otimes\mathbb{C})+c_2(\xi\otimes\mathbb{C})\cdots+(-1)^n c_n(\xi\otimes\mathbb{C})$$

又二者相等，故 $c_{2i-1}(\xi\otimes\mathbb{C})$ 均为二阶元。忽略这些二阶元，下面我们给出 Pontrjagin 类的定义。

Definition 5.6

对 n 维实向量丛 ξ，第 i 维的***Pontrjagin 类***$p_i\in H^{4i}(B;\mathbb{Z})$ 被定义为 $(-1)^i c_{2i}(\xi\otimes\mathbb{C})$，总 ***Pontrjagin 类*** 为

$$p(\xi)=1+p_1(\xi)+\cdots+p_{[n/2]}(\xi)\in H^{\Pi}(B;\mathbb{Z})$$

由陈类的性质，首先我们立即得到

Lemma 5.4

（1）*Pontrjagin* 类具有自然性。

（2）对平凡丛 ε^k，有 $p(\xi\otimes\varepsilon^k)=p(\xi)$。

Pontrjagin 类的 Whitney 公式相对于陈类的需要做一定修正。

Theorem 5.4

$p(\xi\oplus\eta)$ 与 $p(\xi)p(\eta)$ 模 2 阶元同余，也即

$$2(p(\xi\oplus\eta)-p(\xi)p(\eta))=0$$

证明 由陈类的 Whitney 乘积公式

$$c_k((\xi\oplus\eta)\otimes\mathbb{C})=\sum_{i+j=k}c_i(\xi\otimes\mathbb{C})c_j(\eta\otimes\mathbb{C})$$

只考虑偶数维的类，则

$$c_{2k}((\xi\oplus\eta)\otimes\mathbb{C})=\sum_{i+j=k}c_{2i}(\xi\otimes\mathbb{C})c_{2j}(\eta\otimes\mathbb{C})+u$$

其中 u 是奇数维陈类的组合，为二阶元，两边各乘 $(-1)^k=(-1)^i(-1)^j$ 即得结果。 □

目前为止我们接触了三类向量丛，分别是一般实向量丛、可定向实向量丛、复向量丛，我们希望建立它们的示性类之间的关系。上面我们从一个实向量丛 ξ 出发，得到了复向量丛 $\xi\otimes\mathbb{C}$，可定向实向量丛 $(\xi\otimes\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$。下面我们从复向量丛开始。

Lemma 5.5

对任意复向量丛 ω，$\omega_{\mathbb{R}}\otimes\mathbb{C}$ 与 $\omega\oplus\overline{\omega}$ 同构。

证明 F 为 ω 的一个纤维，令 $V=F_{\mathbb{R}}$，则 $V\oplus V$ 上有自然复结构 $J(x,y)=(y,-x)$。

分别考虑 $g:F\to V\oplus V,x\mapsto(x,-ix)$ 和 $h:F\to V\oplus V,x\mapsto(x,ix)$，它们分别是复线性的和共轭线性的。又任意 $(x,y)\in V\oplus V\simeq V\otimes\mathbb{C}$ 可以被唯一写成直和分解 $g(\frac{x+iy}{2})+h(\frac{x-iy}{2})$，

故有同构 $V\otimes\mathbb{C}\simeq F\oplus\overline{F}$。

由于 F 是任意一个纤维，故有从同构 $\omega_{\mathbb{R}}\otimes\mathbb{C}\simeq\omega\oplus\overline{\omega}$。 □

结合陈类的第三条公理和命题5.5立即有

Corollary 5.2

对任意 n 维复向量丛 ω，陈类 $c_i(\omega)$ 能够决定 $p(\omega_{\mathbb{R}})$:

$$1-p_1+p_2\cdots+(-1)^n p_n=(1-c_1+c_2\cdots+(-1)^n c_n)(1+c_1+c_2+\cdots+c_n)$$

故有

$$\begin{aligned}p_k(\omega_{\mathbb{R}})&=c_k(\omega)^2-2c_{k-1}(\omega)c_{k+1}(\omega)+\cdots+2(-1)^{k-1}c_1(\omega)c_{2k-1}(\omega)+2(-1)^k c_{2k}(\omega)\\&=c_k(\omega)^2+2\sum_{i=1}^{k}(-1)^i c_{k+i}(\omega)c_{k-i}(\omega)\end{aligned}$$

♡

然后我们再从可定向实向量丛作为出发点。ξ 为 n 维实向量丛，则命题5.1给出了 $(\xi\otimes\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ 的典范定向。

Lemma 5.6

ξ 为 n 维可定向实向量丛，则 $(\xi\otimes\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ 与 $\xi\otimes\xi$ 同构，且该同构保定向与否取决于 $\frac{(n-1)n}{2}$ 的奇偶。

♡

证明 对 ξ 的一个纤维，取一组有序基 $v_1,\cdots,v_n$，则同前有 $v_1,iv_1,\cdots,v_n,iv_n$ 给出了 $(\xi\otimes\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ 的典范有序基。

在直和同构 $F\oplus iF\simeq F\oplus F$ 下，$v_1,\cdots,v_n$ 对应第一个分量的有序基，$iv_1,\cdots,iv_n$ 对应第二个分量的有序基，故只需考虑将 $\{v_1,iv_1,\cdots.v_n,iv_n\}$ 映成 $\{v_1,\cdots,v_n,iv_1,\cdots,iv_n\}$ 的基变换，对应的行列式为 $(-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$，故得证。 □

Corollary 5.3

若 ξ 为 $2k$ 维可定向实向量丛，则 $p_k(\xi)=e(\xi)^2$。

♡

证明 由定义

$$p_k(\xi) = (-1)^k c_{2k}(\xi \otimes \mathbb{C}) = (-1)^k e((\xi \otimes \mathbb{C})_{\mathbb{R}})$$

又由引理5.6和欧拉类的 Whitney 乘积公式

$$e((\xi \otimes \mathbb{C})_{\mathbb{R}}) = e(\xi \oplus \xi) = e(\xi)^2$$

故得证。 □

5.4 具体的例子与计算

首先我们计算几个具体的陈类和 Pontrjagin 类。首先是球面：

Example 5.2 对于 n 维球面的切丛 S^n，又 $\tau^n \oplus \nu^1 \simeq \tau^n \oplus \varepsilon^1$ 是平凡的，故由引理5.4，$p(\tau^n) = 1$。

下面我们来讨论复射影空间。

Theorem 5.5

对 $\mathbb{CP}^n$ 的切丛 τ^n，有 $c(\tau^n) = (1-\alpha)^{n+1}$，其中 α 是命题5.3中的 $c_1(\gamma^1(\mathbb{C}^{n+1}))$。

证明　考虑 ω^n 是 $\mathbb{CP}^n$ 上典范线丛 $\gamma^1(\mathbb{C}^{n+1})$ 在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中的正交补，利用与引理??一样的论证，可以得到

$$\tau^n \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\gamma^1(\mathbb{C}^{n+1}), \omega^n)$$

则

$$\begin{aligned}
\tau^n \oplus \varepsilon^1 &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\gamma^1(\mathbb{C}^{n+1}), \omega^n) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\gamma^1(\mathbb{C}^{n+1}), \gamma^1(\mathbb{C}^{n+1})) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\gamma^1(\mathbb{C}^{n+1}), \varepsilon^1 \oplus \cdots \oplus \gamma^1(\mathbb{C}^{n+1})) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\gamma^1(\mathbb{C}^{n+1}), \varepsilon^1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\gamma^1(\mathbb{C}^{n+1}), \varepsilon^1)
\end{aligned}$$

又由于对任意的复向量丛 ω，任取其纤维 F，$v_2 \mapsto \langle \cdot, v_2 \rangle$ 给出了 $\overline{F}$ 到 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(F, \mathbb{C})$ 之间的同构，故有

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\omega, \varepsilon^1) \simeq \overline{\omega}$$

则代入 $\omega = \gamma^1(\mathbb{C}^{n+1})$ 并结合上式，有

$$\tau^n \simeq \overline{\gamma^1(\mathbb{C}^{n+1})} \oplus \cdots \oplus \overline{\gamma^1(\mathbb{C}^{n+1})}$$

故结合引理5.1和命题5.5可知

$$c(\tau^n) = c(\tau^n \oplus \varepsilon^1) = (c(\overline{\gamma^1(\mathbb{C}^{n+1})}))^{n+1} = (1 - c_1(\gamma^1(\mathbb{C}^{n+1})))^{n+1}$$

则代入 α 即可。 □

Remark 由上面的计算立得 $c_n(\tau^n) = (n+1)(-\alpha)^n$，则由命题4.4，有

$$\chi(\mathbb{CP}^n) = \langle e(\tau^n_{\mathbb{R}}), \mu_{2n}\rangle = (n+1)(-1)^n\langle \alpha^n, \mu_{2n}\rangle$$

又我们知道 $\chi(\mathbb{CP}^n) = n+1$，故有 $\langle \alpha^n, \mu_{2n}\rangle = (-1)^n$，或者说 $\langle (-\alpha)^n, \mu_{2n}\rangle = 1$。此时我们称 $(-\alpha)^n$ 是 $H^{2n}(\mathbb{CP}^n; \mathbb{Z})$ 的**与定向相容**的生成元。

Proposition 5.6

对 $\mathbb{CP}^n$ 的切丛 τ^n 和 $k \leq \frac{n}{2}$，有 $p_k(\tau^n_{\mathbb{R}}) = p_k(\mathbb{CP}^n) = \binom{n+1}{k}\alpha^{2k}$。

证明 由上面的定理，$c(\tau^n) = (1-\alpha)^{n+1}$，则代入引理5.1，有

$$1-p_1+p_2+\cdots+(-1)^n p_n = (1-c_1+c_2+\cdots+(-1)^n c_n)(1+c_1+\cdots+c_n) = (1+\alpha)^{n+1}(1-\alpha)^{n+1} = (1-\alpha^2)^{n+1}$$

则显然有

$$1 + p_1 + p_2 + \cdots + p_n = (1+\alpha^2)^{n+1}$$

故 $p_k(\mathbb{CP}^n) = \binom{n+1}{k}\alpha^{2k}$。 □

前面我们介绍了 Stiefel-Whitney 数，这里我们类似地引入陈数和 Pontrjagin 数的概念。

Definition 5.7

K^n 为一个 n 维的紧复流形，τ^n 为其切丛，μ_{2n} 为其复结构诱导定向所对应的基本同调类。则对任意 n 的划分 $I=\{i_1,\cdots,i_r\}$（见定义1.5），定义其第 I-陈数为

$$c_I[K^n]=c_{i_1}\cdots c_{i_r}[K^n]=\langle c_{i_1}(\tau^n)\cdots c_{i_r}(\tau^n),\mu_{2n}\rangle$$

♣

Definition 5.8

M^{4n} 为一个 n 维的紧可定向实流形，τ^{4n} 为其切丛，μ_{4n} 为其基本同调类。则对任意 n 的划分 $I=\{i_1,\cdots,i_r\}$，定义其第 I-*Pontrjagin* 数为

$$p_I[M^{4n}]=p_{i_1}\cdots p_{i_r}[M^{4n}]=\langle p_{i_1}(\tau^{4n})\cdots p_{i_r}(\tau^{4n}),\mu_{4n}\rangle$$

♣

对于 1 维复流形 K^1，它只有一个陈数 $c_1[K^1]$；对二维复流形 K^2，只有两个陈数 $c_2[K^2]$ 和 $c_1c_1[K^2]$。更一般地，对 n 维复流形 K^n，它有 $p(n)$ 个陈数，$p(n)$ 是 n 的划分数。

我们也可以用另一种视角来理解陈数：

对任意 n 维复流形 K^n，其切丛可以推到万有丛：

$$f:K^n\to G_n(\mathbb{C}^\infty)$$

有 $f^*(\gamma^n)\simeq\tau^n$，故 K^n 的基本同调类给出秩为 $p(n)$ 的自由 Abel 群 $H_{2n}(G_n(\mathbb{C}^\infty);\mathbb{Z})$ 中的一个元素 $f_*(\mu_{2n})$。

同时由定理5.3，$H^{2n}(G_n(\mathbb{C}^\infty);\mathbb{Z})$ 是由 $c_1(\gamma^n),\cdots,c_n(\gamma^n)$ 生成的 $2n$ 维多项式代数，也即秩为 $p(n)$，基为所有的 $c_{i_1}(\gamma^n)\cdots c_{i_r}(\gamma^n)$，其中 $I=\{i_1,\cdots,i_r\}$ 为 n 的划分。

则为了确定 $f_*(\mu_{2n})$，只需要计算所有的 Kronecker 记号

$$\langle c_{i_1}(\gamma^n)\cdots c_{i_r}(\gamma^n),f_*(\mu_{2n})\rangle$$

但注意到这事实上就是

$$\langle f^*(c_{i_1}(\gamma^n)\cdots c_{i_r}(\gamma^n)), \mu_{2n}\rangle = c_{i_1}\cdots c_{i_r}[K^n]$$

所以说所有的陈数可以用于确定同调类 $f_*(\mu_{2n})$。

Example 5.3 对复射影空间 $\mathbb{CP}^n$，定理5.5给出其总陈类为 $c(\tau^n) = (1-\alpha)^{n+1}$，同时我们已经计算过 $\langle(-\alpha)^n, \mu_{2n}\rangle = 1$，故有

$$c_{i_1}\cdots c_{i_r}[\mathbb{CP}^n] = \langle(-1)^{i_1}\binom{n+1}{i_1}\alpha^{i_1}\cdots(-1)^{i_r}\binom{n+1}{i_r}\alpha^{i_r}, \mu_{2n}\rangle = \binom{n+1}{i_1}\cdots\binom{n+1}{i_r}$$

完全类似地，可以给出 $\mathbb{CP}^{2n}$ 的所有 Pontrjagin 数

$$p_{i_1}\cdots p_{i_r}[\mathbb{CP}^{2n}] = \binom{2n+1}{i_1}\cdots\binom{2n+1}{i_r}$$

现在对一个可定向的 $4n$ 维实流形 M^{4n}，改变其定向，则其 Pontrjagin 类均保持不变，但基本同调类发生反转，则其 Pontrjagin 数会变为其相反数，于是我们有

Proposition 5.7

如果可定向 $4n$ 维实流形 M^{4n} 有非零的 Pontrjagin 数，则 M 上不可能有反转定向的自微分同胚。 ♠

Example 5.4 例5.3中计算了 $\mathbb{CP}^{2n}$ 的 Pontrjagin 数，显然不为 0，故 $\mathbb{CP}^{2n}$ 没有反转定向的自微分同胚。

下面我们利用对称多项式的视角来观察陈数和 Pontrjagin 数，这一思想在本讲义后半部分将会再次得到体现。首先需要介绍一些基本记号。

Definition 5.9

（1）对 k 的划分 $I = i_1, \cdots, i_r$ 和 l 的划分 $J = j_1, \cdots, j_s$，则定义划分的形式乘法

$$IJ = i_1 \cdots i_r, j_1 \cdots j_s$$

为 $k+l$ 的划分。使用更代数的语言，即所有非负整数的所有划分构成的全体是一个交换含幺半群。

（2）对一个划分 $I = i_1, \cdots, i_r$，I 的一个**加细**是指形式乘法 $I_1 \cdots I_r$，其中 I_j 是 i_j 的划分。♣

Definition 5.10

一个多项式 $f(t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{Z}[t_1, \cdots, t_n]$ 称为**对称**的，若它在 $t_1, \cdots, t_n$ 的一个置换下保持不变。

所有对称多项式全体构成的环用 $\mathscr{S}$ 表示，同时 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ 为基本对称多项式，则 $\mathscr{S} = \mathbb{Z}[\sigma_1. \cdots, \sigma_n]$。

给每个 t_i 赋予次数 *1*，则得到了 $\mathbb{Z}[t_1, \cdots, t_n]$ 和 $\mathscr{S}$ 的分次环结构，记赋予了分次结构的 $\mathscr{S}$ 为 $\mathscr{S}^*$，k 次的部分为 $\mathscr{S}^k$。则自然地 $\mathscr{S}^k = \{\sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_r} : i_1, \cdots, i_r$ 是将 k 分割成不超过 n 个正整数的划分 $\}$。

两个多项式 f, g 称为**等价**的，若 g 可以通过 f 复合上某个 $t_1, \cdots, t_n$ 的置换得到。记 $\sum t_1^{a_1} \cdots t_r^{a_r}$ 为所有与 $t_1^{a_1} \cdots t_r^{a_r}$ 等价的多项式全体的和。例如 $\sigma_k = \sum t_1 \cdots t_k$、♣

在如上记号下不难有如下引理

Lemma 5.7

$\{\sum t_1^{a_1} \cdots t_n^{a_r} : a_1, \cdots, a_r$ 是 k 的长度不超过 n 的划分 $\}$ 构成 $\mathscr{S}^k$ 的一组基。♡

Definition 5.11

对任意 k 的划分 $I=i_1,\cdots,i_r$，取 $n\geq k$ 使得 n 元的前 k 个基本对称多项式 $\sigma_1,\cdots,\sigma_k$ 是无关的，此时定义 $s_I=s_{i_1,\cdots,i_r}$ 为唯一满足

$$s_I(\sigma_1,\cdots,\sigma_k)=\sum t_1^{i_1}\cdots t_r^{i_r}$$

的 k 元多项式，显然 s_I 的定义与 n 的选取无关，且 $p(k)$ 个多项式 s_I 构成了 $\mathscr{S}^k$ 的基。

对底空间 B 上的 n 维复向量丛 ω，其总陈类为 $c=1+c_1+\cdots+c_n$，则对任意 $k\geq 0$ 和 k 的划分 $I=i_1,\cdots,i_r$，可以取 $s_I(c_1,\cdots,c_k)\in H^{2k}(B;\mathbb{Z})$，我们简记该上同调类为 $s_I(c)$。♣

Thom 给出了如下的乘积公式。

Lemma 5.8 (Thom)

$s_I(c(\omega\oplus\omega'))=\sum_{JK=I}s_J(c(\omega))s_K(c(\omega'))$ ♡

证明 考虑 $\mathbb{Z}[t_1,\cdots,t_{2n}]$，$\sigma_k$ 为 $t_1,\cdots,t_n$ 的基本对称多项式，σ_k' 为 $t_{n+1},\cdots,t_{2n}$ 对应的基本对称多项式，则

$$\sigma_k''=\sum_{i=0}^{k}\sigma_i\sigma_{k-i}'$$

是 $t_1,\cdots,t_{2n}$ 对应的基本对称多项式。则只需要证明

$$s_I(\sigma_1'',\cdots,\sigma_k'')=\sum_{JK=I}s_J(\sigma_1,\sigma_2,\cdots)s_K(\sigma_1',\sigma_2',\cdots)$$

由定义，$s_I(\sigma_1'',\cdots,\sigma_k'')$ 等于所有形如 $t_{a_1}^{i_1}\cdots t_{a_r}^{i_r}$ 的单项式之和，其中 $a_1,\cdots,a_r$ 为 1 到 $2n$ 中不同的整数。对每个这样的单项式，取 $J(K)$ 为所有满足 $1\leq a_q\leq n(n+1\leq a_q\leq 2n)$ 的 i_q 构成的分割，则显然 $JK=I$，且每一种这样的 J,K 对应的单项式之和为

$$s_J(\sigma_1,\sigma_2,\cdots)s_K(\sigma_1',\sigma_2',\cdots)$$

且显然所有满足 $JK=I$ 的划分 J,K 在上面的过程中均被取到，则对所有这样的 J,K 求和即得结果。□

Corollary 5.4

$s_k(c(\omega \oplus \omega')) = s_k(c(\omega)) + s_k(c(\omega'))$ ♡

现在对一个 n 维紧复流形 K^n，对每个 n 的划分 I，定义 $s_I(c)[K^n]$（或简写为 $s_I[K^n]$）为

$$\langle s_I(c(\tau^n)), \mu_{2n} \rangle \in \mathbb{Z}$$

Corollary 5.5

$s_I[K^m \times L^n] = \sum_{I_1 I_2 = I} s_{I_1}[K^m] s_{I_2}[L^n]$，其中 I_1, I_2 分别为 m 和 n 的划分。♡

证明 π_i 为 $K^m \times L^n$ 的第 i 分量投影，则有

$$\tau_{K^m \times L^n} \simeq (\pi_1^* \tau_{K^m}) \oplus (\pi_2^* \tau_{L^n})$$

则由引理5.8，有

$$s_I[K^m \times L^n] = \langle \sum_{I_1 I_2 = I} s_{I_1}(c(\pi_1^* \tau_{K^m})) s_{I_2}(c(\pi_2^* \tau_{L^n})), \mu_{2m} \times \mu_{2n} \rangle = \sum_{I_1 I_2 = I} \langle s_{I_1}(\tau_{K^m}), \mu_{2m} \rangle \langle s_{I_2}(\tau_{L^n}), \mu_{2n} \rangle$$

由于所有运算均在奇数维下进行，故不存在符号问题，则得证。 □

Corollary 5.6

对任意复流形的乘积 $K^m \times L^n$，有 $s_{m+n}[K^m \times L^n] = 0$。♡

上述的例子说明 $s_m[K^m]$ 具有不同的意义，它可以判定一个流形能否写成两个流形之积。

Example 5.5 再次考虑复射影流形 $\mathbb{CP}^n$，我们知道其陈类为 $c(\mathbb{CP}^n) = (1-\alpha)^{n+1}$，则 c_i 是关于 $n+1$ 个 $-\alpha$ 的基本对称多项式，则由 s_I 的定义有

$$s_k(c_1, \cdots, c_k) = (n+1)(-\alpha)^k$$

则 $s_n[\mathbb{CP}^n] = \langle (n+1)(-\alpha)^n, \mu_{2n} \rangle = n+1 \neq 0$，即 $\mathbb{CP}^n$ 不能分裂成两个复流形的乘积。

在陈类的有关讨论的最后，我们来证明陈类之间是没有线性关系的，规范化的表述如下

Theorem 5.6 (Thom)

$K^1, \cdots, K^n$ 为满足 $s_k[K^k] \neq 0$ 的复流形，则 $p(n) \times p(n)$ 矩阵

$$(c_{i_1} \cdots c_{i_r}[K^{j_1} \times \cdots \times K^{j_s}])$$

是非奇异的，其中 $\{i_1, \cdots, i_r\}, \{j_1, \cdots, j_s\}$ 均取于 n 的所有划分。♡

证明 推论5.4的显然推广给出

$$s_I[K^{j_1} \times \cdots \times K^{j_q}] = \sum_{I_1 \cdots I_q = I} s_{I_1}[K^{j_1}] \cdots s_{I_q}[K^{j_q}]$$

则 $s_I[K^{j_1} \times \cdots \times K^{j_q}]$ 为零，除非 I 是 $j_1, \cdots, j_q$ 的加细，特别地，当 $r \leq q$ 时必为零，则所求矩阵是三角的，只需考虑对角元即可，而对角元为

$$s_{i_1, \cdots, i_r}[K^{i_1} \times \cdots \times K^{i_r}] = s_{i_1}[K^{i_1}] \cdots s_{i_r}[K^{i_r}] \neq 0$$

则得证。□

上面是关于陈类和陈数的讨论，对于 Pontrjagin 类和 Pontrjagin 数均有类似的讨论。对 B 上实向量丛 ξ，记 $s_I(p(\xi)) = s_I(p_1(\xi), \cdots, p_k(\xi)) \in H^{4k}(B; \mathbb{Z})$，上面的类似结果在这里罗列出来，不再给出证明：

Proposition 5.8

（1）$s_I(p(\xi \oplus \xi'))$ 与 $\sum\limits_{JK=I} s_J(p(\xi)) s_K(p(\xi'))$ 关于某个二阶元同余。

（2）$s_I(p)[M \times N] = \sum\limits_{JK=I} s_J(p)[M] s_K(p)[N]$。

（3）$M^4, \cdots, M^{4n}$ 为可定向实流形且 $s_k(p)[M^{4k}] \neq 0$，则 $p(n) \times p(n)$ 矩阵

$$(p_{i_1} \times p_{i_r}[M^{4j_1} \times \cdots \times M^{4j_s}])$$

是非奇异的。♠

在本节的最后我们讨论 Pontrjagin 类的应用，即定向配边问题。回忆我们在 3.2 节利用 Stiefel-Whitney 数研究过不定向配边类的问题。这里我们首先需要介绍定向配边问题的基本概念。

M 是一个可定向流形，则记 $-M$ 为 M 赋予相反定向得到的流形，$M+N$ 代表 M 和 N 的拓扑和。

Definition 5.12

两个 n 维可定向紧流形 M 和 M' 称为定向配边的，或属于同一个定向配边类，是指存在一个紧的可定向带边流形 X，使得 ∂X（赋予诱导定向）与 $M+(-M')$ 之间有保定向微分同胚。♣

与不定向的情形相同地，同样有

Proposition 5.9

属于同一个定向配边类是一个等价关系。♠

证明　显然 $M+(-M)$ 与 $M\times[0,1]$ 的边界之间有保定向的微分同胚，故有自反性。

若 $M+(-M')\simeq\partial X$，则 $M'+(-M)\simeq\partial(-X)$，故有对称性。

若 $M+(-M')\simeq\partial X, M'+(-M'')\simeq\partial Y$，则由带边流形的管状邻域定理可知 X 和 Y 可以沿着公共边界的 M' 部分粘合成一个新的可定向紧流形，使得其边界为 $M+(-M'')$，故有传递性。□

现在令 Ω_n 为所有 n 维流形的定向配边类全体构成的集合，并在拓扑和意义下成为 Abel 群，零元为空流形对应的定向配边类。同时又由于 $(M_1^m, M_2^n)\mapsto M_1^m\times M_2^n$ 给出了可交换的双线性映射 $\Omega_m\times\Omega_n\to\Omega_{m+n}$，故序列

$$\Omega_*=(\Omega_0,\Omega_1,\Omega_2,\cdots)$$

具有分次环结构, 且在分次意义 $M_1^m\times M_2^n=(-1)^{mn}M_2^n\times M_1^m$ 下可交换。

首先与定理3.3一样地，我们有

Theorem 5.7 (Pontrjagin)

若 M^{4k} 是一个紧可定向 $4k+1$ 维流形的边界，则 M 的所有 *Pontrjagin* 数为 *0*。♡

证明 与定理3.3一致，此处省略。□

又由于 $p_I[M_1+M_2]=p_I[M_1]+p_I[M_2]$，立即有

Proposition 5.10

对 k 的任意划分 I，映射 $M^{4k}\mapsto p_I[M^{4k}]$ 给出了 Ω_{4k} 到 $\mathbb{Z}$ 的同态。♠

结合命题（3）可得关于 Ω_{4k} 的秩的一个下界估计

Corollary 5.7

所有的乘积流形 $\mathbb{CP}^{i_1}\times\cdots\mathbb{CP}^{i_r}$，其中 $i_1,\cdots,i_r$ 取遍 k 的划分，构成了 Ω_{4k} 中的线性无关的元素，则 Ω_{4k} 的秩至少为 $p(k)$。♡

Remark 事实上，Ω_{4k} 的秩就是 $p(k)$，具体证明需要 Thom 空间有关知识，可以参考 Milnor 的《Characteristic Classes》的第 18 节。

Chapter 6 微分几何的预备知识

6.1 形式与紧支形式

在微分几何中我们研究的向量丛均应当有光滑性条件，为此我们给出光滑向量丛的定义

Definition 6.1

对实向量丛 $\xi(E,M,\pi)$，若 E 和 M 均为光滑流形，且丛投影 π 和局部平凡化映射 h_b 均为光滑的，则称 E 为 M 上的光滑向量丛，或简称 E 是光滑向量丛。♣

在微分几何中，形式是基本的研究对象之一，流形上的形式空间为我们产生了 de Rham 上同调，它与代数拓扑中的奇异上同调之间被如下的 de Rham 定理等同起来

Theorem 6.1 (de Rham)

$H^k_{dR}(M) \simeq H^k_{sing}(M;\mathbb{R})(\forall k)$ ♡

然而流形上的积分理论中，更本质的对象实际上是紧支的形式，故紧支 de Rham 上同调也具有重要的地位，而紧支与非紧支的 de Rham 上同调之间由 Poincaré 对偶联系起来：

Theorem 6.2

对任意 m 维定向流形和任意 k，线性映射：

$$\mathcal{P}^k_M : H^k_{dR}(M) \to (H^{m-k}_c(M))^*.[\omega] \mapsto \{\eta \mapsto \int_M \omega \wedge \eta\}$$

是一个同构。♡

下面我们考虑光滑向量丛 (M,E)。我们还可以定义**按纤维紧支**形式 $\Omega^*_{cv}(E)$ 和按纤维紧支 de Rham 上同调群 $H^*_{cv}(E)$，其中的元素不一定在 E 上紧支，但限制在每一个纤维上是紧支的。

往往我们需要考虑形式的拉回，然而一般情况下紧支形式的拉回不一定是紧支的，但我

们可以定义如下的“沿纤维积分”运算 $\pi_*:\Omega^*_{cv}(E)\to\Omega^{*-n}(M)$，作为“推出”运算的类比：

首先当 E 是平凡丛，即 $E=M\times\mathbb{R}^n$ 时，则 E 上的形式必为来自于如下两种情况：

(i) 存在 ϕ 是 M 上的形式和对每个 x 紧支的函数 f，使得该形式为

$$(\pi^*\phi)f(x,t_1,\cdots,t_n)dt_{i_1}\cdots dt_{i_r}(r<n)$$

此时令该形式在 π_* 下的像为 0。

(ii) 存在 ϕ 是 M 上的形式和对每个 x 紧支的函数 f，使得该形式为

$$(\pi^*\phi)f(x,t_1,\cdots,t_n)dt_1\cdots dt_n$$

此时令该形式在 π_* 下的像为 $\phi\int_{\mathbb{R}^n}f(x,t_1,\cdots,t_n)dt_1\cdots dt_n$。

再令 E 为一般的定向丛，记其所有平凡化邻域为 $\{U_\alpha\}$，并令 M 在 U_α 和 U_β 上的坐标为 $x_1,\cdots,x_m$ 和 $y_1,\cdots,y_m$，E 在 U_α 和 U_β 上的坐标为 $t_1,\cdots,t_n$ 和 $u_1,\cdots,u_n$。对 E 上的形式 ω。如 ω 如上的第一种情况，仍然令它的像为 0. 否则，记 $\omega_\alpha=\omega|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}$，则

$$\omega_\alpha=(\pi^*\phi)f(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n)dt_1\cdots dt_n$$

此时定义其像为

$$\pi_*\omega_\alpha=\phi\int_{\mathbb{R}^n}f(x,t)dt_1\cdots dt_n$$

可以验证这种局部的定义在 $U_\alpha\cap U_\beta$ 上是相容的，则我们得到了 π_* 的整体定义。

在如上的记号下，我们证明如下的“投射公式”

Proposition 6.1

设 τ 是 M 上的形式，ω 是 E 上按纤维紧支的形式，则有

$$\pi_*((\pi^*\tau)\cdot\omega)=\tau\cdot\pi_*\omega$$

♠

证明 由于判断两个形式相等是一个局部的问题，故不妨设 $E=M\times\mathbb{R}^n$。若 ω 是如上第一种

形式，即

$$\omega = \pi^*\phi \cdot f(x,t)dt_{i_1} \cdots dt_{i_r}(r < n)$$

则有

$$\pi_*((\pi^*\tau) \cdot \omega) = \pi_*(\pi^*(\tau\phi \cdot)f(x,t)dt_{i_1} \cdots dt_{i_r}) = 0 = \tau \cdot \pi_*\omega$$

若 ω 是第二种形式，即

$$\omega = \pi^*\phi \cdot f(x,t)dt_1 \cdots dt_n$$

则

$$\pi_*((\pi^*\tau) \cdot \omega) = \pi_*(\pi^*(\tau\phi) \cdot f(x,t)dt_1 \cdots dt_n) = \tau\phi \int_{\mathbb{R}^n} f(x,t)dt_1 \cdots dt_n = \tau \cdot \pi_*\omega$$

故得证。 □

6.2 联络与曲率

首先回顾联络，协变导数和曲率的概念。

Definition 6.2

对（复）流形 M 上的（复）向量丛 E，E 上的**联络**是一个线性算子：$\nabla^E:\Omega^*(M,E)\to\Omega^{*+1}(M,E)$，满足对任意的 $\omega\in\Omega^*(M), s\in\Gamma(E)$：

$$\nabla^E(\omega s)=(d\omega)s+(-1)^{|\omega|}\omega\wedge\nabla^E s$$

特别地对 $X\in\Gamma(TM)$，定义

$$\nabla^E_X:\Gamma(E)\to\Gamma(E), \nabla^E_X s=(\nabla^E s)(X)\quad\forall s\in\Gamma(E)$$

为联络 ∇^E 沿着 X 的**协变导数**。

对 E 上的联络 ∇^E，定义其**曲率**为

$$R^E=\nabla^E\circ\nabla^E:\Omega^*(M,E)\to\Omega^{*+2}(M,E)$$

♣

我们熟知 R^E 是 $\Omega^*(M)$ 线性的，即对 $\omega\in\Omega^*(M), s\in\Omega^*(M,E)$，均有 $R^E(\omega\wedge s)=\omega\wedge R^E s$，故 R^E 可以视为 $\Omega^2(M,\mathrm{End}(E))$ 中的元素。

此外，对 $\mathrm{End}(E)$ 中的反自伴元素构成的全体 $so(E)$，有如下的一一对应

$$A\in so(E)\mapsto\sum_{i<j}\langle Ae_i,e_j\rangle e_i\wedge e_j\in\Lambda^2(E)$$

其中 $s_1,\cdots,s_r$ 为 E 的一组定向标正基，并不难验证该对应与基的选取无关。故我们可以把曲率 R^E 还视为 $\Omega^2(M,\Lambda^2(E))$ 中的元素:

记 $\Omega_i^j=g^E(R^E s_i,s_j)=\langle R^E s_i,s_j\rangle\in\Omega^2(M)$，则可以把 R^E 写作

$$R^E=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\Omega_i^j s_i\wedge s_j\in\Omega^2(M,\Lambda^2(E))$$

取 M 上 2-形式矩阵 $\Omega=(\Omega_i^j)$，称之为**曲率形式矩阵**。对上述的基 $s=(s_1,\cdots,s_r)$，有 $R^E s=s\Omega$。

同时对两个不同的联络 ∇_1^E,∇_2^E，由 Leibniz 公式立即有 $\nabla_1^E-\nabla_2^E\in\Omega^1(M,\mathrm{End}(E))$。我们将在 Chern-Weil 理论的部分使用该事实。

我们称一个联络 ∇^E 是与度量 g^E 相容的，是指如下等式成立：

$$X(g^E(e_1,e_2))=g^E(\nabla_X^E e_1,e_2)+g^E(e_1,\nabla_X^E e_2)\quad\forall e_1,e_2\in\Gamma(E),X\in\Gamma(TM)$$

关于联络和曲率，我们有 Bianchi 恒等式：

Theorem 6.3 (Bianchi)

$\nabla^E\Omega=0$ ♡

对复流形和复向量丛而言，联络若要有好的性质，不仅需要与度量相容，还应当与其“全纯结构”相容，故我们需要定义全纯结构。

Definition 6.3

一个复向量丛上全纯结构指的是算子 $\overline{\partial_E}:\Gamma(\wedge^{p,q}E)\to\Gamma(\wedge^{p,q+1}E)$，满足：

$$\overline{\partial_E}(\omega\wedge\sigma)=\overline{\partial_E}\omega\wedge\sigma+(-1)^{p+q}\omega\wedge\overline{\partial_E}\sigma\quad\forall\omega\in\Omega^{p,q}(E),\sigma\in\Omega^{r,s}(E)$$

且 $\overline{\partial_E}^2=0$。

此时称 E 上的一个截面 σ 是全纯的，若 $\overline{\partial_E}\sigma=0$。♣

事实上我们有如下命题

Proposition 6.2

一个复向量丛 (E,π,M) 是全纯的当且仅当其上有全纯结构。♠

证明 可以参考 Kobayashi 的《Differential Geometry of Complex Vector Bundles》的 1.3 节。□

则对全纯向量丛，我们可以定义所谓的陈联络。

Definition 6.4

对全纯向量丛 $(E, \overline{\partial_E}, M)$ 和其上的 *Hermitian* 度量 g^E，称 E 上的联络为 ∇^E 为<u>陈联络</u>，若 E 与 g^E 相容，且 $(\nabla^E)^{0,1} = \overline{\partial_E}$。♣

现在对全纯向量丛 E 和 E 上的陈联络 ∇^E，取 E 的一组全纯基 $s_1. \cdots, s_r$，则存在一系列 M 上的 1-形式 ω_α^β，使得

$$\nabla^E s_i = \sum s_j \omega_i^j$$

则称这些 ω_i^j 为联络 1-形式，$A = (\omega_i^j)_{i,j}$ 称为联络矩阵。

在如上的记号下，对任意 $\xi = \sum \xi^i s_i \in \Omega^*(M, E), \xi^i \in \Omega^*(M)$，有

$$\nabla^E \xi = \sum s_i (d\xi^i + \sum \omega_j^i \xi^j)$$

故将 ξ 视为列向量 $(\xi^1, \cdots, \xi^r)^T$，则上式可以简记为 $\nabla^E \xi = d\xi + A\xi, \nabla^E = d + A$。

对邻域 U 上的另外一组基 s'，使得 $s = s' \cdot a$，其中

$$a : U \to GL(r; \mathbb{C})$$

设 A' 为关于 s' 的联络矩阵，则

$$s\xi = \nabla s = \nabla(s'a) = (\nabla s')a + s'da$$

$$= s'A'a + s'da = s(a^{-1}\omega' a + a^{-1}da)$$

则有过渡公式

$$A = a^{-1}A'a + a^{-1}da$$

进一步地，对 $X=(s_1,\cdots,s_t)(x^1,\cdots,x_t)^T\in E$，有

$$\begin{aligned}R^EX&=\nabla^E((s_1,\cdots,s_r)(d+A)(x_1,\cdots,x_r)^T)\\&=A\wedge[(d+A)X]+d[(d+A)X]=(s_1,\cdots,s_r)(dA+A\wedge A)(x_1,\cdots,x_r)^T\end{aligned}$$

也即 $\Omega=dA+A\wedge A$。

6.3 Berezin 积分

为了讨论 Mathai 和 Quillen 对 Thom 形式的定义，我们需要定义 **Berezin 积分**。

首先取 $E = \mathbb{R}^m$，视为单点上的实向量丛，并取 $\mathbf{x} = (x^1, \cdots, x^m)$ 为 E 上的一组定向坐标，则简单的计算给出对

$$U(\mathbf{x}) = (\sqrt{2\pi})^{-m} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2}} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$$

有 $\int_E U = 1$。

定义定向欧氏空间 E 上的 Berezin 积分为：

$$\int^B : \Lambda^*(E) \to \mathbb{R}, \omega \mapsto \langle \omega, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m \rangle$$

再将 $\Lambda^*(E)$ 视为 E 上的向量丛，则可以把 Berezin 积分拓展定义到 $\Omega^*(E, \Lambda^*(E))$ 上：

$$\int^B : \Omega^*(E, \Lambda^*(E)) \to \Omega^*(E), \alpha \wedge \beta \mapsto \alpha \int^B \beta \quad (\alpha \in \Omega^*(E), \beta \in \Gamma(\Lambda^*(E)))$$

自然地将 $\mathbf{x} = \mathrm{Id}|_E$ 视为 $\Omega^0(E, E)$ 中的元素，则 $d\mathbf{x} \in \Omega^1(E, E)$，则

Proposition 6.3

在 $\Omega^*(E)$ 中

$$U(\mathbf{x}) = (-1)^{m(m+1)/2} (\sqrt{2\pi})^{-m} \int^B \exp(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2} - d\mathbf{x})$$

证明　直接计算则有

$$\begin{aligned}
(-1)^{m(m+1)/2} \int^B e^{-d\mathbf{x}} &= (-1)^{m(m+1)/2} \int^B \prod_{k=1}^{m} (1 - dx^k \wedge e_k) \\
&= (-1)^{m(m-1)/2} \int^B (dx^1 \wedge e_1) \wedge \wedge \cdots \wedge (dx^m \wedge e_m) \\
&= dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m
\end{aligned}$$

故代入 $U(\mathbf{x})$ 的定义即得证。 □

再令 E 是流形 M 上的 m 维实向量丛，则可以按纤维扩张定义 Berezin 积分到：

$$\int^B : \Omega^*(M, \Lambda^*(E)) \to \Omega^*(M)$$

现在对一个 E 上的与 g^E 相容的联络 ∇^E，我们有如下结论

Proposition 6.4

对任意的 $\alpha \in \Omega^*(M, \Lambda^*(E))$，有

$$d\int^B \alpha = \int^B \nabla^E \alpha$$

证明 取 $e_1, \cdots, e_r$ 为 E 的一组定向标正基，则不妨 $\alpha = \omega \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_m (\omega \in \Omega^*(M))$。由于 ∇^E 与度量相容，则

$$\nabla^E(e_1 \wedge \cdots \wedge e_m) = 0$$

故有

$$\begin{aligned}
\int^B \nabla^E \alpha &= \int^B (d\omega) \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_m + (-1)^{|\omega|}\omega \wedge \nabla^E(e_1 \wedge \cdots \wedge e_m) \\
&= \int^B (d\omega) \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_m \\
&= d\omega = d\int^B \alpha
\end{aligned}$$

故得证。 □

6.4 Kähler 流形

在研究复流形时，Kähler 流形是重要的一类，下面介绍它的基本定义。

Definition 6.5

对一个近复流形 (M, J)，g 上的一个***Hermitian* 度量** 指的是一个满足

$$g(X, Y) = g(JX, JY)\forall X, Y \in TM$$

的 *Riemann* 度量。

M 的**基本形式**$\omega \in \Omega^2(M)$ 定义为 $w(X, Y) = g(JX, Y)$，若 ω 是闭的，则称 (M, J, g) 为**近 *Kähler* 流形**。如果 M 还是复流形，则称 (M, J, g) 为***Kähler* 流形**。♣

首先我们介绍 Kähler 流形的一些等价条件。

Theorem 6.4

对一个近 *Hermitian* 流形 (M, J, g)，其上的 *Levi-Civita* 联络记为 ∇，则 M 是 *Kähler* 的当且仅当 $\nabla J = 0$。♡

证明 若 $\nabla J = 0$，则

$$\begin{aligned}
N^J(X, Y) &= [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY] \\
&= \nabla_X Y - \nabla_Y X + J(\nabla_{JX} Y - \nabla_Y JX) + J(\nabla_X JY - \nabla_{JY} X) - \nabla_{JX} JY + \nabla_{JY} JX \\
&= J(\nabla_X JY - J\nabla_X Y) + (\nabla_{JY} JX - J\nabla_{JY} X) - (\nabla_{JX} JY - J\nabla_{JX} Y) - J(\nabla_Y JX - J\nabla_Y X) \\
&= J((\nabla_X J)Y) + (\nabla_{JY} J)X - (\nabla_{JX} J)Y - J(\nabla_Y J)X \\
&= 0
\end{aligned}$$

由5.1，可知 M 为复流形。再计算

$$
\begin{aligned}
(\nabla_X\omega)(Y,Z) &= \nabla_X(\omega(Y,Z)) - \omega(\nabla_X Y, Z) - \omega(Y, \nabla_X Z)\\
&= \nabla_X(g(JY,Z)) - g(J\nabla_X Y, Z) - g(JY, \nabla_X Z)\\
&= g(\nabla_X JY, Z) + g(JY, \nabla_X Z) - g(J\nabla_X Y, Z) - g(JY, \nabla_X Z)\\
&= g((\nabla_X J)Y, Z) = 0
\end{aligned}
$$

则有

$$
\begin{aligned}
d\omega(X,Y,Z) &= (\nabla_X\omega)(Y,Z) + (\nabla_Y\omega)(Z,X) + (\nabla_Z\omega)(X,Y)\\
&= g((\nabla_X J)Y, Z) - g((\nabla_Y J)X, Z) + g((\nabla_Z J)X, Y) = 0
\end{aligned}
$$

故 M 为 Kähler 流形。

反之如果 M 为 Kähler 流形，则由 $d\omega(JX,Y,Z)=0$ 有

$$
g((\nabla_{JX}J)Y,Z) - g((\nabla_Y J)JX, Z) + g((\nabla_Z J)JX, Y) = 0
$$

再由 $d\omega(X,JY,Z)=0$，有

$$
g((\nabla_X J)JY, Z) - g((\nabla_{JY}J)X, Z) + g((\nabla_Z J)X, JY) = 0
$$

将两式相加，有

$$
\begin{aligned}
0 &= g((\nabla_{JX}J)Y + (\nabla_X J)JY - (\nabla_Y J)JX - (\nabla_{JY}J)X, Z) + 2g((\nabla_Z J)X, JY)\\
&= g(\nabla_{JX}JY - J\nabla_{JX}Y - \nabla_X Y - J\nabla_X JY + \nabla_Y X + J\nabla_Y JX - \nabla_{JY}JX + J\nabla_{JY}X, Z)\\
&+ 2g((\nabla_Z J)X, JY)\\
&= g([JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] - [X,Y], Z) + 2g((\nabla_Z J)X, JY)\\
&= 2g((\nabla_Z J)X, JY) - g(N^J[X,Y], Z)
\end{aligned}
$$

则由 X, Y, Z 的任意性和 $N^J = 0$，有 $\nabla J = 0$。 □

Proposition 6.5

(M, J, g) 为 Hermitian 流形，令 $g_{i\bar{j}} = g(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j})$，则如下等价：

（1）*M 是 Kähler 的*

（2）$\frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial z^k} = \frac{\partial g_{k\bar{j}}}{\partial z^i}$

（3）$\frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial \bar{z}^k} = \frac{\partial g_{i\bar{k}}}{\partial \bar{z}^j}$

（4）*存在局部定义的实值函数 f，使得 $g_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}$* ♠

证明 首先注意到 $\omega = \sqrt{-1}\sum g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$，故（2）等价于 $\partial\omega = 0$，（3）等价于 $\bar{\partial}\omega = 0$，又由于 $\bar{\partial}\omega = \overline{\partial\omega}$，故显然有（1）（2）（3）之间等价。

若（4）成立，则显然有 $\omega = \partial\bar{\partial}f$，则

$$d\omega = (\partial + \bar{\partial})\partial\bar{\partial}f = 0$$

反之若（1）成立，即 ω 是闭的，则由 Poincaré 引理（叙述见 6.5 节），可知存在局部定义的实的 1-形式 ψ，使得

$$\omega = d\psi$$

设 $\psi = \phi + \overline{\psi}$，其中 ϕ 是 (1,0)-形式。又 ω 是 (1,1)-形式，故

$$\partial\phi = \overline{\partial\phi} = 0$$

即 $\psi = \bar{\partial}\phi + \partial\overline{\phi}$，再又复的 Poincaré 引理（见 6.5 节），存在局部定义的函数 p 使得 $\phi = \partial p$，故

$$\omega = \bar{\partial}\phi + \partial\overline{\phi} = \bar{\partial}\partial p + \partial\bar{\partial}\overline{p} = \partial\bar{\partial}(\overline{p} - p) = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}f$$

其中 $f = \sqrt{-1}(\overline{p} - p)$，故得证。 □

下面我们用基本形式来表示 Kähler 流形的体积元。设实坐标为 $(x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^n)$，复坐标为 $(z^1,\cdots,z^n)$，其中 $z^\alpha = x^{alpha} + \sqrt{-1}y^{alpha}$，则体积元应为

$$dV_g = \sqrt{\det(g_{ij})}dx^1 \wedge dy^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \wedge dy^n$$

再计算

$$\begin{aligned}
\frac{\omega^n}{n!} &= \frac{1}{n!}(\sqrt{-1}g_{\alpha_1\overline{\beta}_1}dz^{\alpha_1} \wedge d\overline{z}^{\beta_1}) \wedge \cdots \wedge (\sqrt{-1}g_{\alpha_n\overline{\beta}_n}dz^{\alpha_n} \wedge d\overline{z}^{\beta_n}) \\
&= \frac{(\sqrt{-1})^n}{n!}g_{\alpha_1\overline{\beta}_1}\cdots g_{\alpha_n\overline{\beta}_n}dz^{\alpha_1} \wedge d\overline{z}^{\beta_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\alpha_n} \wedge d\overline{z}^{\beta_n} \\
&= \frac{(\sqrt{-1})^n}{n!}\sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}(-1)^{\mathrm{sgn}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)}(-1)^{m(m-1)/2}\det(g_{\alpha\overline{\beta}})dz^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\alpha_n} \wedge d\overline{z}^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}^{\alpha_n} \\
&= (\sqrt{-1})^n\det(g_{\alpha\overline{\beta}})dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n \wedge d\overline{z}^1 \wedge \cdots \wedge d\overline{z}^n \\
&= 2^m\det(g_{\alpha\overline{\beta}})dx^1 \wedge dy^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \wedge dy^n \\
&= dV_g
\end{aligned}$$

故对 Kähler 流形，其体积元可以用 $\frac{\omega^n}{n!}$ 代替。

6.5 复几何中的一些计算

首先我们主要利用局部坐标来进行复几何中的一些计算。

Proposition 6.6

对复向量丛 E，其上的 *Hermitian* 度量为 H，并赋予与 H 相容的联络 ∇^E，则对对应的联络矩阵 A 和曲率形式矩阵 Ω，有 A 和 Ω 关于 H 是反自伴的。

证明 取一组基 $s_1, \cdots, s_r$，则

$$dh_{ij} = h(\nabla^E s_i, s_j) + h(s_i, \nabla^E s_j) = \sum \omega_i^a h_{aj} + h_{ib}\omega_j^b$$

用矩阵表示即

$$dH = A^T H + H\overline{A}$$

将 d 同时作用在等式两端，则

$$0 = \Omega^T H + H\overline{\Omega}$$

其中 Ω 的每个位置的元素为之前定义的 Ω_{ij}。

取 $s_1, \cdots, s_r$ 为一组幺正基，即 $H = I$，则有 $\Omega^T + \overline{\Omega} = 0, A^T + \overline{A} = 0$。 □

下面取全纯丛 (E, h) 上的陈联络 ∇^E，并取一组全纯基 $(s_1, \cdots, s_r)$，即 $\overline{\partial} s_i = 0$，则立即有联络矩阵 A 中的元素 ω_{ij} 均为 (1,0) 形式。上述命题的证明中我们有式子

$$dH = A^T H + H\overline{A}$$

取 (1,0) 部分有 $\partial H = A^T H$ 故有

$$A^T = \partial H \cdot H^{-1}$$

又对于全纯丛，$\partial\circ\partial=\overline{\partial}\circ\overline{\partial}=0$，故

$$R^E=\nabla^E\circ\nabla^E=(\partial+\overline{\partial})\circ=(\partial+\overline{\partial})=\partial\circ\overline{\partial}+\overline{\partial}\circ\partial$$

是 (1,1) 的。又

$$\Omega=dA+A\wedge A$$

故取 (1,1) 部分有

$$\Omega=\overline{\partial}A$$

再对 Kähler 流形 (M,J,g)，∇ 为 Levi-Civita 联络，则我们知道 $\nabla g=\nabla J=0$。令 R 为曲率张量，$R(X,Y)Z$ 的定义与黎曼几何中定义一致。首先 $\nabla J=0$ 告诉我们如下性质成立：

Proposition 6.7

在 Kähler 流形上，若 Y 是 (1,0) 的，则对任意 X，有 $\nabla_X Y$ 也是 (1,0) 的。

证明 $Y\in T^{1,0}M$，故 $Y=\sqrt{-1}JY$。为了证明原命题，只需要证 $\nabla_XY-\sqrt{-1}J\nabla_XY=0$，直接计算即可：

$$\begin{aligned}
&\nabla_XY-\sqrt{-1}J\nabla_XY\\
&=\nabla_XY-\sqrt{-1}(\nabla_XJY-(\nabla_XJ)Y)\\
&=\nabla_X(Y-\sqrt{-1}JY)+\sqrt{-1}(\nabla_XJ)Y=0
\end{aligned}$$

故得证。 □

故可以有如下记号：

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^\alpha}}\frac{\partial}{\partial z^\beta}=\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial z^\gamma}$$

类似地有

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}^\alpha}}\frac{\partial}{\partial \overline{z}^\beta}=\Gamma^{\overline{\gamma}}_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}\frac{\partial}{\partial \overline{z}^\gamma}$$

同时显然有

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^\alpha}}\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta}=\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha}}\frac{\partial}{\partial z^\beta}=0$$

又 Levi-Civita 联络与度量相容，有

$$\frac{\partial g_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial z^\gamma}=\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^\gamma}}\frac{\partial}{\partial z^\alpha},\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta}\rangle=\Gamma^\delta_{\gamma\alpha}g_{\delta\bar{\beta}}$$

变换指标并将 g 的下标上移，即有

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}=g^{\gamma\bar{\delta}}\frac{\partial g_{\beta\bar{\delta}}}{\partial z^\alpha}$$

同样的计算给出 $\Gamma^{\bar{\gamma}}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}=\overline{\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}}$。

再来计算黎曼曲率张量：

$$\begin{aligned}R(\frac{\partial}{\partial z^\alpha},\frac{\partial}{\partial z^\beta})\frac{\partial}{\partial z^\gamma}&=\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^\alpha}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^\beta}}\frac{\partial}{\partial z^\gamma}-\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^\beta}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^\alpha}}\frac{\partial}{\partial z^\gamma}\\&=\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^\alpha}}(\Gamma^\delta_{\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial z^\delta})-\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^\beta}}(\Gamma^\delta_{\alpha\gamma}\frac{\partial}{\partial z^\delta})\\&=\frac{\partial\Gamma^\delta_{\beta\gamma}}{\partial z^\alpha}\frac{\partial}{\partial z^\delta}+\Gamma^\delta_{\beta\gamma}\Gamma^\eta_{\alpha\delta}\frac{\partial}{\partial z^\eta}-\frac{\partial\Gamma^\delta_{\alpha\gamma}}{\partial z^\beta}\frac{\partial}{\partial z^\delta}-\Gamma^\delta_{\alpha\gamma}\Gamma^\eta_{\beta\delta}\frac{\partial}{\partial z^\eta}\end{aligned}$$

又由上面 $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ 的表达式有

$$\frac{\partial\Gamma^\delta_{\beta\gamma}}{\partial z^\alpha}=\frac{\partial g^{\delta\bar{\xi}}}{\partial z^\alpha}\frac{\partial g_{\gamma\bar{\xi}}}{\partial z^\beta}+g^{\delta\bar{\xi}}\frac{\partial^2 g_{\gamma\bar{\xi}}}{\partial z^\alpha\partial z^\beta}$$

关于 α,β 对称，故 $\frac{\partial\Gamma^\delta_{\beta\gamma}}{\partial z^\alpha}-\frac{\partial\Gamma^\delta_{\alpha\gamma}}{\partial z^\beta}=0$。同理有 $\Gamma^\delta_{\beta\gamma}\Gamma^\eta_{\alpha\delta}\frac{\partial}{\partial z^\eta}-\Gamma^\delta_{\alpha\gamma}\Gamma^\eta_{\beta\delta}\frac{\partial}{\partial z^\eta}=0$。故 $R(\frac{\partial}{\partial z^\alpha},\frac{\partial}{\partial z^\beta})\frac{\partial}{\partial z^\gamma}=0$。同理 $R(\frac{\partial}{\partial z^\alpha},\frac{\partial}{\partial z^\beta})\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\gamma}=0$。综上

$$R(\frac{\partial}{\partial z^\alpha},\frac{\partial}{\partial z^\beta})X=R(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha},\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta})X=0$$

我们采取如下记号

$$R(\frac{\partial}{\partial z^\alpha},\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta})\frac{\partial}{\partial z^\gamma}=R^\delta_{\alpha\bar{\beta}\gamma}\frac{\partial}{\partial z^\delta}$$

则

$$
\begin{aligned}
R(\frac{\partial}{\partial z^\alpha},\frac{\partial}{\partial \overline{z}^\beta})\frac{\partial}{\partial z^\gamma} &= R^\delta_{\alpha\overline{\beta}\gamma}\frac{\partial}{\partial z^\delta} \\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial z^\alpha}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}^\beta}}\frac{\partial}{\partial z^\gamma} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}^\beta}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^\alpha}}\frac{\partial}{\partial z^\gamma} \\
&= -\nabla_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}^\beta}}(\Gamma^\delta_{\alpha\gamma}\frac{\partial}{\partial z^\delta}) \\
&= -\frac{\partial}{\partial \overline{z}^\beta}(g^{\delta\overline{\xi}}\frac{\partial g_{\gamma\overline{\xi}}}{\partial z^\alpha})\frac{\partial}{\partial z^\delta}
\end{aligned}
$$

故

$$
R^\delta_{\alpha\overline{\beta}\gamma} = -\frac{\partial}{\partial \overline{z}^\beta}(g^{\delta\overline{\xi}}\frac{\partial g_{\gamma\overline{\xi}}}{\partial z^\alpha})
$$

和黎曼几何中一样，我们定义 Ricci 张量为

$$
\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{tr}(Z \mapsto R(X,Z,Y))
$$

同时将 R 视为 (0,4) 张量，则有 $R(X,Y,Z,W) = \langle R(X,Y)Z,W\rangle$ 和局部坐标表示

$$
R_{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\eta}} = R^\delta_{\alpha\overline{\beta}\gamma}g_{\delta\overline{\eta}} = -g_{\delta\overline{\eta}}\frac{\partial}{\partial \overline{z}^\beta}(g^{\delta\overline{\xi}}\frac{\partial g_{\gamma\overline{\xi}}}{\partial z^\alpha})
$$

则有 Ricci 张量的局部表示

$$
\begin{aligned}
R_{\alpha\overline{\beta}} = R_{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\eta}}g^{\gamma\overline{\eta}} &= R^\delta_{\alpha\overline{\beta}\gamma}g_{\delta\overline{\eta}}g^{\gamma\overline{\eta}} \\
&= R^\gamma_{\alpha\overline{\beta}\gamma} = -\frac{\partial}{\partial \overline{z}^\beta}(g^{\gamma\overline{\xi}}\frac{\partial g_{\gamma\overline{\xi}}}{\partial z^\alpha}) \\
&= -\frac{\partial}{\partial \overline{z}^\beta}\frac{\partial}{\partial z^\alpha}(\mathrm{logdet}(g_{\gamma\overline{\eta}}))
\end{aligned}
$$

我们定义 M 上的 Ricci 形式为

$$
\rho(X,Y) = \mathrm{Ric}(JX,Y)
$$

故立即有局部表示

$$
\rho = \sqrt{-1}\sum R_{\alpha\overline{\beta}}dz^\alpha \wedge d\overline{z}^\beta
$$

故立即有 Ricci 形式是一个闭的 (1,1) 形式。

接下来我们引入 Kähler 流形上的如下一系列微分算子：

首先考虑实流形的情形

Definition 6.6

定义 m 维实流形 M 上的 *Hodge* 星算子 $*:\wedge^r M\to\wedge^{m-r}M$ 如下：

$$\omega\wedge *\tau=\langle\omega,\tau\rangle dV_g\quad\forall\omega,\tau\in\wedge^r M$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 在 $\wedge^r M$ 上有拓展定义：

$$\langle\omega,\tau\rangle=\sum_{i_1<\cdots<i_r,j_1<\cdots<j_r}g^{i_1j_1}\cdots g^{i_rj_r}\omega_{i_1\cdots i_r}\tau_{j_1\cdots j_r}$$

其中 $\omega=\sum\limits_{i_1<\cdots i_r}\omega_{i_1\cdots i_r}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}$，$\tau=\sum\limits_{j_1<\cdots j_r}\tau_{j_1\cdots j_r}dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_r}$。

不难验证 Hodge 星算子有如下性质

Proposition 6.8

(1) $*1=dV_g,*dV_g=1$

(2) 对 $\alpha\in\wedge^r M$，有 $**\alpha=(-1)^{r(m-r)}\alpha$

(3)$*(\alpha+\beta)=*\alpha+*\beta,*(f\alpha)=f*\alpha(f\in C^\infty M)$

(4)$\langle *\omega,*\tau\rangle=\langle\omega,\tau\rangle$

验证是平凡的，这里省略。利用如上的 Hodge 星算子我们可以定义微分算子 d 的形式伴随如下：

Definition 6.7

定义 $d^*:\Gamma(\wedge^r M)\to\Gamma(\wedge^{r-1}M),\omega\mapsto(-1)^{m(r-1)+1}*d*\omega$ 为 d 的**形式伴随**。

下面的计算说明了“伴随”一词的合理性：

定义 $(\omega,\tau)=\int_M\langle\omega,\tau\rangle dV_g$。则对 $\tau\in\Gamma(\wedge^{r-1}M),\omega\in\Gamma(\wedge^r M)$，有

$$\begin{aligned}\langle d\tau,\omega\rangle dV_g &= d\tau\wedge *\omega = d(\tau\wedge *\omega)-(-1)^{r-1}\tau\wedge d*\omega\\ &= d(\tau\wedge *\omega)-(-1)^{r-1+(m-r+1)(r-1)}\tau\wedge **d*\omega\\ &= d(\tau\wedge *\omega)-(-1)^{m(r-1)}\langle\tau,*d*\omega\rangle dV_g\\ &= d(\tau\wedge *\omega)+\langle\tau,d^*\omega\rangle dV_g\end{aligned}$$

故自然有

$$(d\tau,\omega)=(\tau,d^*\omega)$$

我们可以利用 d^* 定义流形上的 Laplace 算子

Definition 6.8

$\triangle=-dd^*-d^*d:\Gamma(\wedge^r M)\to\Gamma(\wedge^r M)$ 被定义为流形 M 上的 *Laplace* 算子。♣

$\triangle$ 有如下性质。

Proposition 6.9

(1)$\triangle$ 与 $d,d^*,*$ 均可交换

(2)$(\triangle\omega,\tau)=(\omega,\triangle\tau)$

(3) 若 M 是闭流形，则 $\triangle\omega=0$ 当且仅当 $d\omega=d^*\omega=0$。♠

证明仍旧是简单的验证，在此省略。

接下来再来看复流形的情形。(M^{2n},J,g) 为复流形，ω 为基本形式，则上面的 Hodge 星算子可以表示为 $\theta\wedge *\tau=\langle\omega,\tau\rangle\frac{\omega^n}{n!}$。不难看出 $*$ 将 (p,q) 形式映为 $(n-q,n-p)$ 形式。

Definition 6.9

Lefschetz 算子 L_ω 定义为:

$$L_\omega:\wedge^p_{\mathbb{C}}M\to\wedge^{p+2}_{\mathbb{C}}M,\theta\mapsto\theta\wedge\omega$$

缩并算子 $\wedge_\omega$ 定义为：

$$\wedge_\omega : \wedge^p_{\mathbb{C}} M \to \wedge^{p-2}_{\mathbb{C}} M, \theta \mapsto (-1)^p * L_\omega * \theta$$

对 d^* 和 $\triangle$，在复流形中也有对应的算子：

Definition 6.10

∂ 的形式伴随为 $\partial^* : \wedge^{p,q} M \to \wedge^{p-1,q} M, \theta \mapsto - * \overline{\partial} * \theta$。同理 $\overline{\partial}$ 的形式伴随为 $\partial^* : \wedge^{p,q} M \to \wedge^{p,q-1} M, \theta \mapsto - * \partial * \theta$。

定义 $\triangle^{\partial} = -\partial\partial^* - \partial^*\partial, \triangle^{\overline{\partial}} = -\overline{\partial}\overline{\partial}^* - \overline{\partial}^*\overline{\partial}$。

同上可以验证“伴随”性质：$(\overline{\partial}\theta, \tau) = (\theta, \partial^*\tau), (\partial\theta, \tau) = (\theta, \overline{\partial}^*\tau)$。而对于 M 是 Kähler 流形的情形，有如下的 Kähler 恒等式。

Theorem 6.5 (Kähler 恒等式)

(1) $[\overline{\partial}, L_\omega] = [\partial, _\omega] = 0, [\overline{\partial}^*, \wedge_\omega] = [\partial^*, \wedge_\omega] = 0$

(2)$[\overline{\partial}^*, L_\omega] = \sqrt{-1}\partial, [\partial^*, L_\omega] - \sqrt{-1}\overline{\partial}$

(3)$[\wedge_\omega, \overline{\partial}] = -\sqrt{-1}\partial^*, [\wedge_\omega, \partial] = \sqrt{-1}\overline{\partial}^*$

(4)$\triangle^{\partial} = \triangle^{\overline{\partial}} = \frac{1}{2}\triangle$，且 $\triangle$ 与 $\partial, \overline{\partial}, \partial^*, \overline{\partial}^*$ 可交换。

关于 $\triangle$ 和 $\triangle^{\overline{\partial}}$ 有下面的 Hodge 定理和 Dolbeault 定理。

Theorem 6.6 (Hodge)

M 为紧定向的黎曼流形，若 $\triangle\omega = 0$，则称 ω 为**调和形式**。所有 r 维的调和形式构成的集合为 $\mathcal{H}^r(M)$，则有如下的直和分解

$$\begin{aligned}\Omega^r(M) &= \triangle(\Omega^r(M)) \oplus \mathcal{H}^r(M)\\ &= d(\Omega^{r-1}(M)) \oplus d^*(\Omega^{r-1}(M)) \oplus \mathcal{H}^r(M)\end{aligned}$$

Theorem 6.7 (Dolbeault)

M 为紧的 Hermitian 流形，若 $\triangle^{\overline{\partial}}\omega = 0$，则称 ω 为调和形式。所有调和的 (p,q) 形式构成的集合为 $\mathcal{H}^{p,q}(M)$，则有如下的直和分解

$$\wedge^{p,q}(M) = \overline{\partial}(\wedge^{p,q-1})(M)) \oplus \overline{\partial}^*(\wedge^{p,q+1}(M)) \oplus \mathcal{H}^{p,q}(M)$$

以上的所有算子的定义均可以自然延拓到取值为向量丛的形式当中：

对 Kähler 流形 M 上的向量丛 E，取其陈联络 ∇^E，则可以将 ∇^E 写为 (0,1) 和 (1,0) 部分，其中由定义 (0,1) 部分为 $\overline{\partial}_E$，为了记号方便，记 (0,1) 部分为 ∂_E。

首先显然 $*, L_\omega, \wedge_\omega$ 可以通过只作用在 M 上的形式的方式拓展定义到 E 取值形式上。

再定义伴随算子如下：

$$\nabla^{E*} = -*\nabla^E* \quad \overline{\partial_E}^* = -*\partial_E* \quad \partial_E^* = -*\overline{\partial_E}*$$

并同样定义调和算子

$$\triangle_E = -\nabla^{E*}\nabla^E - \nabla^E\nabla^{E*} \quad \triangle_E^{\partial} = -\overline{\partial}_E^*\overline{\partial_E} = \sqrt{-1}\wedge_\omega \partial_E\overline{\partial_E} \quad \triangle_E^{\overline{\partial}} = -\sqrt{-1}\wedge_\omega \overline{\partial}_E\partial_E$$

关于如上的记号有类似于定理6.5的 Kähler 恒等式，这里不再重复。

最后我们先来叙述在上一节中我们用到的 Poincaré 引理：

Lemma 6.1 (Poincaré)

（1）M 为一个光滑流形，θ 为一个闭的 r 形式，则任意 $p \in M$，存在 p 的邻域 U 和 U 上定义的 $r-1$ 形式 ψ，使得 $\theta = d\psi$。

（2）M 为一个复流形，θ 是一个 $\overline{\partial}$-闭的 (p,q) 形式，则对任意的 $p \in M$，存在 p 的邻域 U 和 U 上定义的 $(p,q-1)$ 形式 ψ，使得 $\theta = \overline{\partial}\psi$。

证明 （1）的证明在微分流形课程中已经学习过，（2）的情形与（1）基本完全类似，在此省略。 □

在复流形上，与之类似地还有如下的 $\partial\bar{\partial}$ 引理：

Lemma 6.2

M 是一个复流形，$\omega \in \Omega^{1,1}(M) \cap \Omega^2(M;\mathbb{R})$，则 ω 是闭的当且仅当对任意的 $p \in M$，存在 p 的一个邻域 U 和 U 上定义的实函数 u，使得 $\omega = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u$。

证明 首先若 $\omega = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u$，显然在 U 上

$$d\omega = \sqrt{-1}(\partial + \bar{\partial})(\partial\bar{\partial})u = 0$$

由 p 的任意性，ω 在 M 上是闭的。

反之，若 ω 是闭的，由上述 Poincaré 引理的 (1)，存在 $p \in M$ 和邻域 U，以及 U 上的实的 1 形式 θ，使得 $\omega = d\theta$。

令 $\theta = \theta^{1,0} + \theta^{0,1}$，其中 $\theta^{1,0} = \overline{\theta^{0,1}}$，则

$$d\omega = \partial\theta^{1,0} + (\bar{\partial}\theta^{1,0} + \partial\theta^{0,1}) + \bar{\partial}\theta^{0,1}$$

又由于 ω 是 (1,1) 的，故 $\partial\theta^{1,0} = \bar{\partial}\theta^{0,1} = 0$，故

$$\omega = \partial\theta^{0,1} + \bar{\partial}\theta^{1,0}$$

由上述 Poincaré 引理的第二条，存在 f，使得 $\theta^{0,1} = \bar{\partial}f$，则 $\theta^{1,0} = \partial\bar{f}$，故

$$\omega = \partial\theta^{0,1} + \bar{\partial}\theta^{1,0} = \partial\bar{\partial}(f - \bar{f}) = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}(2\mathrm{Im}f)$$

则取 $u = 2\mathrm{Im}f$ 即可。 □

而对 Kähler 流形有更强的结论如下：

Lemma 6.3

(M, J, g) 为 Kähler 流形，$\phi_1, \phi_2 \in \Omega^{1,1}(M, \mathbb{C}) \cap \Omega^2(M, \mathbb{R})$，且 ϕ_1 与 ϕ_2 属于同于上同调类，即存在实的 1-形式 ψ 使得 $\phi_1 = \phi_2 + d\psi$，则存在 M 上整体定义的实值函数 f，使得 $\phi_1 - \phi_2 = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}f$。

证明 令 $\psi=\psi^{0,1}+\psi^{1,0}$，其中 $\partial\psi^{1,0}=\overline{\partial}\psi^{0,1}=0$，同上有

$$\phi_1-\phi_2=\overline{\partial}\psi^{1,0}+\partial\psi^{0,1}$$

由如下的 Dolbeault 直和分解

$$\Omega^{p,q}(M)=\mathcal{H}^{p,q}(M)\oplus\overline{\partial}^*\Omega^{p,q+1}(M)\oplus\overline{\partial}\Omega^{p,q-1}(M)$$

故取 $\psi^{0,1}$ 在如上直和分解中的调和项为 $H\psi^{0,1}$, 故存在整体定义的 (0,2) 形式 α 和函数 u 使得

$$\psi^{0,1}=H\psi^{0,1}+\overline{\partial}^*\alpha+\overline{\partial}u$$

又

$$(\overline{\partial}^*\alpha,\overline{\partial}^*\alpha)=(\overline{\partial}^*\psi^{0,1},\psi^{0,1})=(\psi^{0,1},\overline{\partial}\psi^{0,1})=0$$

故 $\overline{\partial}^*\alpha$=0，则

$$\psi^{0,1}=H\psi^{0,1}+\overline{\partial}u,\psi^{1,0}=\overline{H\psi^{0,1}}+\partial\overline{u}$$

即

$$\phi_1-\phi_2=\partial\overline{\partial}u+\overline{\partial}\partial\overline{u}=\partial\overline{\partial}(u-\overline{u})=\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}f$$

取 $f=2\mathrm{Im}u$ 即可。 □

6.6 Clifford 代数

为了后续讨论 Kervaire 半示性数，我们在这一节先介绍 Clifford 代数的基本概念。

设 V 为一个 m 维实欧氏空间，并在 V 上赋予欧氏度量 g^V，则可以定义对偶 $v^*(\cdot) = g^V(v,\cdot) \in V^*$。我们定义 $v \in V$ 在外代数 $\wedge^*(V^*)$ 上的 Clifford 作用：

$$c(v) = v^* \wedge (-i_v) \quad \hat{c}(v) = v^* \wedge i_v$$

首先有如下引理

Lemma 6.4

对任意的 $v, v' \in V$，有

$$c(v)c(v') + c(v')c(v) = -2g^V(v,v')$$

$$\hat{c}(v) + \hat{c}(v') + \hat{c}(v')\hat{c}(v) = 2g^V(v,v')$$

$$c(v)\hat{c}(v') + \hat{c}(v)c(v) = 0$$

证明 注意到

$$[i_{v'}, v^*\wedge] = i_{v'}v^* \wedge + v^* \wedge i_{v'} = v^*(v') = g^V(v,v')$$

即可。故

$$\begin{aligned}
c(v)c(v') + c(v')c(v) &= [v^* \wedge i_{-v}][v'^* \wedge i_{-v'}] \\
&= v^* \wedge v'^* + v^* \wedge i_{-v'} + i_{-v}v'^* \wedge + i_{-v} \wedge i_{-v'} \\
&+ v^* \wedge v'^* + v'^* \wedge i_{-v} + i_{-v'}v^* \wedge + i_{-v'} \wedge i_{-v} \\
&= v^* \wedge i_{-v'} + i_{-v'}v^* \wedge + v'^* \wedge i_{-v} + i_{-v}v'^* \wedge \\
&= -2g^V(v,v')
\end{aligned}$$

其他两个等式类似，在此省略。 □

下面的一些代数的结果进一步告诉了我们 c 和 c' 的一些性质

Proposition 6.10

(1)$e_1,\cdots,e_m$ 为 V 的一组标准正交基，则 $\mathrm{End}(\wedge^*(V^*))$ 由 $c(e_i),\hat{c}(e_i)(i=1,\cdots,m)$ 生成。

(2) 记 $c(e_I)=c(e_{i_1})\cdots c(e_{i_k}),I=(i_1,\cdots,i_k)$，$\hat{c}(e_J)$ 同理，则

$$\mathrm{tr}[c(e_I)\hat{c}(e_J)]=\begin{cases}2^m & I=J=\emptyset\\ 0 & \text{other}\end{cases}$$

下面我们用 Clifford 作用的语言来描述微分几何中的各种量：

对任意的 $A\in\mathrm{End}(V)$，则可以将 A 提升为 $A^\natural$ 如下

$$A^\natural(v^{*,1}\wedge\cdots\wedge v^{*,k})=\sum_l v^{*,1}\wedge\cdots\wedge(A^*v^{*,l})\wedge\cdots\wedge v^{*,k}$$

其中 $v^{*,1},\cdots,v^{*,k}\in V^*$，$A^*$ 被定义为 $(A^*v^*)(v)=-v^*(Av)$。

用基和局部坐标的语言也可以叙述如上结果：令 $e_1,\cdots,e_m$ 为 V 的标准正交基，则令 $Ae_i=\sum\limits_j A_i^je_j$，则

$$A^\natural=-\sum_{i,j}A_i^je_i^*\wedge i_{e_j}=-\frac{1}{4}\sum_{i,j}A_i^j(\hat{c}(e_i)+c(e_i))(\hat{c}(e_j)-c(e_j))$$

下面令 M 为 $2n$ 维闭定向流形，E 为 $2n$ 维定向实向量丛，赋予了欧氏度量 g^E，∇^E 为一个与 g^E 相容的联络。我们记 $\nabla^{\wedge_{\mathbb{C}}^*(E^*)}$ 为 ∇^E 在 $\wedge_{\mathbb{C}}^*(E^*)$ 上的自然提升。

令 $e_1,\cdots,e_{2n}$ 为 E 上的标准正交基，(ω_i^j) 为对应的联络矩阵，则由上面的讨论

$$\nabla^{\wedge_{\mathbb{C}}^*(E^*)}=d-\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{2n}\omega_i^j(\hat{c}(e_i)+c(e_i))(\hat{c}(e_j)-c(e_j))$$

注意到对与度量相容的联络，联络矩阵是反对称的，故

$$\nabla^{\wedge_{\mathbb{C}}^*(E^*)}=d-\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{2n}\omega_i^j(c(e_i)c(e_j)-\hat{c}(e_i)\hat{c}(e_j))$$

我们有如下的命题：

Proposition 6.11

对 $X \in \Gamma(TM), e \in \Gamma(E)$，有

$$[\nabla_X^{\wedge_{\mathbb{C}}^*(E^*)}, c(e)] = c(\nabla_X^E e) \quad [\nabla_X^{\wedge_{\mathbb{C}}^*(E^*)}, \hat{c}(e)] = \hat{c}(\nabla_X^E)$$

证明　首先对任意的 $\omega \in \Gamma(\wedge_{\mathbb{C}}^*(E^*))$，有

$$\nabla^{\wedge_{\mathbb{C}}^*(E^*)}(e^* \wedge \omega) = (\nabla^{E^*} e^*) \wedge \omega + e^* \wedge \nabla^{\wedge_{\mathbb{C}}^*(E^*)}\omega$$

故

$$[\nabla_X^{\wedge_{\mathbb{C}}^*(E^*)}, e^* \wedge]\omega = (\nabla_X^{E^*} e^*) \wedge \omega$$

又注意到对任意 $e' \in \Gamma(E)$

$$\begin{aligned}(\nabla_X^E e^*)(e') &= X(e^*(e')) - e^*(\nabla_X^E e') = X(g^E(e, e')) - g^E(e, \nabla_X^E e') \\ &= g^E(\nabla_X^E e, e') = (\nabla_X^E e)^*(e')\end{aligned}$$

故

$$[\nabla_X^{\wedge_{\mathbb{C}}^*(E^*)}, e^* \wedge] = (\nabla_X^E e)^* \wedge$$

另一方面，对任意 $\eta \in \Gamma(E^*)$，有

$$\begin{aligned}[\nabla_X^{\wedge_{\mathbb{C}}^*(E^*)}, e^* \wedge], i_e]\eta &= \nabla_X^E(i_e\eta) - i_e(\nabla_X^{E^*}\eta) \\ &= X(\eta(e)) - i_e(\nabla_X^{E^*}\eta) \\ &= (\nabla_X^{E^*}\eta)(e) = \eta(\nabla_X^E) - (\nabla_X^{E^*})(e) \\ &= i_{\nabla_X^E e}\eta\end{aligned}$$

则由 c 和 $\hat{c}$ 的定义立即得到结论。 □

在联络之后再来考虑曲率：

记 $R^{\wedge^*_{\mathbb{C}}(E^*)}$ 为 $\nabla^{\wedge^*_{\mathbb{C}}(E^*)}$ 对应的曲率，则仍然由上面的提升方式，可以将其重新写为：

$$R^{\wedge^*_{\mathbb{C}}(E^*)} = -\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{2n} \Omega_i^j(\hat{c}(e_i) = c(e_i))(\hat{c}(e_j) - c(e_j))$$

同样对保度量联络，曲率形式矩阵式反对称的，故也有

$$R^{\wedge^*_{\mathbb{C}}(E^*)} = \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{2n} \Omega_i^j(c(e_i)c(e_j) - \hat{c}(e_i)\hat{c}(e_j))$$

在后面证明 Gauss-Bonnet-Chern 公式的过程中，我们还需要引入超向量空间的概念：

Definition 6.11

V 为一个实（复）向量空间，$\tau \in \mathrm{End}(V)$，称 (V, τ) 为一个**超向量空间**，若 $\tau^2 = I_V$，此时称 τ 给出了 V 上的 $\mathbb{Z}_2$ 分次：

将 V 关于 τ 的特征值 ± 1 进行直和分解 $V = V_+ \oplus V_-$，V_+ 中的元素称为偶的，V_- 中的元素称为奇的。

超向量空间必有直和分解，反之有直和分解（也称为 $\mathbb{Z}_2$ 分次）的向量空间必有超向量空间结构。

对于超向量空间 (V, τ)，定义 V 上的线性变换 A 的**超迹** 为

$$\mathrm{str}[A] = \mathrm{tr}[\tau A]$$

♣

利用上述的语言可以自然地定义超向量丛、超联络的概念，此处不再赘述。

下面我们再用 Clifford 作用的语言来处理分次结构：

对任意的 m 维向量空间 V，外代数 $\wedge^*(V^*)$ 中自然有关于奇偶性的分次结构，并可以表示为

$$\tilde{\tau} = (-1)^{m(m+1)/2} c(e_1)\cdots c(e_m)\hat{c}(e_1)\cdots\hat{c}(e_m)$$

而当 $m=2n$ 时，取标准正交基 $(e_1,\cdots,e_{2n})$，考虑复值外代数 $\wedge^*_{\mathbb{C}}(V^*)$，定义

$$\tau=(\sqrt{-1})^n c(e_1)\cdots c(e_{2n})$$

可以验证 τ 给出了复值外代数上的分次，并将该 $\mathbb{Z}_2$ 分次称为 $\wedge^*_{\mathbb{C}}(V^*)$ 上的符号差分次。

命题6.11告诉我们 $\nabla^{\wedge^*_{\mathbb{C}}(E^*)}$ 给出了 $\wedge^*_{\mathbb{C}}(E^*)$ 上的超联络。

在本节的最后，我们有类似于命题6.10的结论：

Proposition 6.12

（*1*）V 为 m 维实欧氏空间，关于 $\wedge^*(V^*)$ 中的自然奇偶性分次，有

$$\operatorname{str}[c(e_I)\hat{c}(e_J)]=\begin{cases}(-1)^{m(m+1)/2}2^m & I=J=\{1,\cdots,m\}\\ 0 & \text{other}\end{cases}$$

（*2*）V 为 $2m$ 维定向欧氏空间，则关于 $\wedge^*_{\mathbb{C}}(V^*)$ 中的符号差分次，有

$$\operatorname{str}[c(e_I)\hat{c}(e_J)]=\begin{cases}(-\sqrt{-1})^n 2^{2n} & I=\{1,\cdots,2n\},J=\emptyset\\ 0 & \text{other}\end{cases}$$

Chapter 7 Gauss-Bonnet-Chern 公式

7.1 微分几何中的 Thom 形式与 Euler 形式

首先对 M 上的一个 n 维定向光滑向量丛 E，有如下形式的 Thom 同构

Proposition 7.1

$$H^k(M) \simeq H_{cv}^{k+n}(E)(\forall k)$$

证明 若 E 和 M 均紧且其紧支 de Rham 上同调群均为有限维的，则连续两次运用 Poincaré 对偶：$H_c^{k+n}(E) \simeq H_{dR}^{m+n-k-n}(E) \simeq H_{dR}^{m-k}(M) \simeq H_c^k(M)$ 即得结果。对一般的情况可以考虑 M 的覆盖，具体细节见 Bott 和 Tu 的《Differential Forms in Algebraic Topology》的第十二节。□

Remark 利用 Poincaré 对偶的具体形式可以计算得到 Thom 同构 $\Phi : H^*(M) \to H_{cv}^{*+n}(E)$ 实际上就是我们在之前定义的沿纤维积分 π_* 的逆映射。具体计算在此省略。

下设 M 为紧流形，E 为 r 维定向光滑向量丛，则由上述命题 $\Phi : H_{dR}^0(M) \simeq H_r^c(E)$。取 $[1] \in H_{dR}^0(M)$ 对应的类 $\tau(E) \in H_c^r(E)$，则称 $\tau(E)$ 为该向量丛的 Thom 形式。

为了后面讨论的合理性，我们需要证明这里定义的 $\tau(E)$ 与之前在拓扑理论中对 Thom 类的定义是等价的：

Proposition 7.2

如上定义的 $\tau(E)$ 是 $H_c^r(E)$ 中唯一一个限制在每个纤维 F 上均为 $H_c^n(F)$ 的生成元的形式。

证明 由于 Thom 同构 $\Phi = \pi_*^{-1}$，故 $\pi_*(\tau(E)) = \Phi^{-1}(\tau(E)) = 1$，则 $\tau(E)$ 在每个纤维上的积分

均为 1，故在纤维上的限制为 $H_c^n(F)$ 的生成元。

反之若一个形式 $\eta \in H_{cv}^n(E)$ 在每个纤维上的限制为生成元，再取如上定义的 $\tau(E)$，由 $\pi_*\tau(E) = 1$，则由投射公式（见6.1），有

$$\pi_*(\pi^*\omega \wedge \tau(E)) = \omega \wedge \pi_*\tau(E) = \omega$$

故 Thom 同构可以表示为 $\Phi(\omega) = \pi^*(\omega) \wedge \tau(E)$（注意到这与拓扑理论中的 Thom 同构的形式也具有一致性）

同时又由于 η 在每个纤维上的限制为生成元，再由投射公式

$$\pi_*(\pi^*\omega \wedge \eta) = \omega \wedge \pi_*\eta = \omega$$

故 Thom 同构也可以表示为 $\pi^*(\cdot) \wedge \eta$，则 $\eta = \Phi^{-1}(1) = \tau(E)$。 □

Corollary 7.1

一个形式 $\eta \in \Omega_{cv}^r(E)$ 能够代表 $\tau(E)$ 当且仅当 η 是闭的，且在每一个纤维上的积分为 1。

与在拓扑理论中一致地，对向量丛的一个截面 $s : M \to E$，定义该丛的 Euler 形式为 $s^*(\tau(E)) \in H_{dR}^r(M)$。显然由同伦不变性，Euler 形式与截面的选取无关，故特别地我们可以取 s 为零截面。

下面我们采取 Mathai 和 Quillen 的构造来建立 Thom 形式和 Euler 形式。

M 为一定向闭流形，$\pi : E \to M$ 是 M 上 m 维定向向量丛。∇^E 是一个与度量相容的联络，则可以提升为拉回丛 π^*E 上的联络，记 $\nabla : \Omega^*(E, \Lambda^*(\pi^*E)) \to \Omega^*(E, \Lambda^*(\pi^*E))$。此外，对任意 $s \in \Gamma(E, \pi^*E)$，可以在 $\Omega^*(E, \Lambda^*(\pi^*E))$ 上定义内乘 i_s。

故 $\Omega^*(E, \Lambda^*(\pi^*E))$ 中有如下元素:恒等截面 $\mathbf{x} \in \Omega^0(E, \pi^*E)$,$|\mathbf{x}|^2 \in \Omega^0(E)$,$\nabla\mathbf{x} \in \Omega^1(M, \pi^*E)$ 和 $\pi^*R^E \in \Omega^2(M, \Lambda^2(\pi^*E))$（我们在 6.2 节中给出了将 R^E 视为 $\Omega^2(M, \Lambda^2(E))$ 中的元素的方

法。关于如上元素我们有如下结论：

Proposition 7.3

令

$$\mathcal{A} = \frac{|\mathbf{x}|^2}{2} + \nabla\mathbf{x} - \pi^* R^E \in \Omega^*(M, \Lambda^*(\pi^* E))$$

有

$$(\nabla + i_{\mathbf{x}})\mathcal{A} = 0$$

证明 首先由联络的定义立即有

$$\nabla(|\mathbf{x}|^2) = -2i_{\mathbf{x}}\nabla\mathbf{x}$$

又

$$\nabla(\nabla\mathbf{x}) = \nabla^2\mathbf{x} = (\pi^* R^E)\mathbf{x} = i_{\mathbf{x}}\pi^* R^E$$

并结合 Bianchi 恒等式 $\nabla\pi^* R^E = 0$ 和显然的 $i_{\mathbf{x}}|\mathbf{x}|^2 = 0$，有

$$(\nabla + i_{\mathbf{x}})\mathcal{A} = -i_{\mathbf{x}}\nabla\mathbf{x} + i_{\mathbf{x}}\pi^* R^E + i_{\mathbf{x}}\nabla\mathbf{x} - i_{\mathbf{x}}\pi^* R^E = 0$$

故得证。 □

结合如上的结果我们可以得到如下的定理，它给出了 Thom 形式的具体构造

Theorem 7.1

定义

$$\begin{aligned} U &= (-1)^{m(m+1)/2}(\sqrt{2\pi})^{-m}\int^B e^{-\mathcal{A}} \in \Omega^*(E) \\ &= (-1)^{m(m+1)/2}(\sqrt{2\pi})^{-m}\int^B e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2} - \nabla\mathbf{x} + \pi^* R^E} \end{aligned}$$

则 U 是 E 上的 *Thom* 形式。

证明 由推论7.1，只需证 U 是闭的，且在每个纤维上的积分为 1。

首先由于 $i_{\mathbf{x}}$ 降低元素的次数，由命题6.4，有

$$d\int^B e^{-\mathcal{A}} = \int^B (\nabla + i_{\mathbf{x}})e^{-\mathcal{A}}$$

故结合命题7.3

$$dU = (-1)^{m(m+1)/2}(\sqrt{2\pi})^{-m}\int^B (\nabla + i_{\mathbf{x}})e^{-\mathcal{A}} = (-1)^{m(m+1)/2}(\sqrt{2\pi})^{-m}\int^B (1 - \mathcal{A} + \frac{1}{2}\mathcal{A}^2 + \cdots) = 0$$

再由命题6.3，显然有每个纤维上的积分为 1，故得证。 □

则现在设定向实向量丛 E 的维数为 $2n$，我们知道对任意的截面 $v \in \Gamma(E)$，可以定义 Euler 形式为

$$v^*U = (\frac{-1}{2\pi})^n \int^B \exp(-\frac{|v|^2}{2} - \nabla^E v + R^E) \in \Omega^{2n}(M)$$

特别地取 $v = 0$，则定义了关于 (E, g^E, ∇^E) 的 Euler 形式

$$e(E, g^E, \nabla^E) = (\frac{-1}{2\pi})^n \int^B \exp(R^E) = (\frac{-1}{2\pi})^n \mathrm{Pf}(R^E)$$

其中 $\mathrm{Pf}(R^E) = \int^B \exp(R^E)$。

Remark 事实上可以证明 $\mathrm{Pf}(R^E)$ 对应的上同调类不依赖于 g^E 与 ∇^E 的选取，故可以定义向量丛 E 的 **Euler 类**，记为 $e(E)$。有关证明见下一节。

作为本节的结束我们来利用局部坐标计算上面的 $\mathrm{Pf}(R^E)$，这在陈省身对 Gauss-Bonnet 公式的原始证明中需要用到，可以参考其原始论文《On the curvatura integra in a Riemannian manifold》。

我们在 6.2 节中指出了将曲率 R^E 视为 $\Omega^2(M, \Lambda(E))$ 中元素的方式：

$$R^E = \frac{1}{2}\sum_i^j \Omega_i^j e_i \wedge e_j$$

则有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pf}(R^E) &= \int^B \exp(R^E) = \int^B \exp(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2n}\Omega_i^j e_i \wedge e_j) \\
&= \frac{1}{2^n n!}\int^B (\sum_{i,j=1}^{2n}\Omega_i^j e_i \wedge e_j)^n \\
&= \frac{1}{2^n n!}\sum_{i_1,\cdots,i_{2n}} \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_{2n}} \Omega_{i_1}^{i_2} \cdots \Omega_{i_{2n-1}}^{i_{2n}}
\end{aligned}$$

其中如果 $i_1.\cdots,i_{2n}$ 为 $\{1,\cdots,2n\}$ 的一个奇排列，则令 $\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_{2n}}$ 为-1，若为偶排列则为 1，否则为 0。

7.2 Gauss-Bonnet-Chern 公式的证明

本节我们来证明如下的 Gauss-Bonnet-Chern 公式（对比命题4.4）：

Theorem 7.2 (Gauss-Bonnet-Chern)

对 $2n$ 维闭 *Riemann* 流形 M，∇^{TM} 为切丛 TM 上的 *Levi-Civita* 联络，R^{TM} 为对应曲率，则

$$\chi(M) = (\frac{-1}{2\pi})^n \int_M \mathrm{Pf}(R^{TM})$$

在证明该公式之前我们首先微分几何课程中如下公式是上面的定理的特殊情况：

Theorem 7.3 (高维整体 Gauss-Bonnet 公式)

M 为 n 维紧流形，浸入在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中，n 为偶数，则有

$$\int_M K_n dV = \frac{\mathrm{vol}(S^n)}{2}\chi(M)$$

证明 取 $\{e_i\}$ 为主方向，λ_i 为对应的主曲率，则

$$\begin{aligned} R^i_{jkl} &= \langle R(e_i, e_j)e_k, e_l\rangle \\ &= l(e_j, e_k)l(e_i, e_l) - l(e_j, e_l) \\ &= \lambda_i\lambda_j(\delta_{jk}\delta_{il} - \delta_{ik}\delta_{jl}) \end{aligned}$$

则代入 Ω 的定义有

$$\Omega^j_i = \sum_{kl} R^i_{jkl} e_k \wedge e_l = 2\lambda_i\lambda_j e_i \wedge e_j$$

代入上节最后 $\mathrm{Pf}(R^{TM})$ 的表达式计算即可。 □

下面我来证明定理7.2。主要的思路是利用“超渡”的思想，说明我们研究的上同调在某种对度量和联络的变化下具有不变性，从而将原本的情形转化为经过形变的度量的情形，再

将考虑形变无穷大时的极端情形。为了展现这种思想，我们首先看一个证明中需要的引理，它说明了 Thom 类在向量丛的 Euclid 度量的伸缩变化下保持不变。

Lemma 7.1

对 m 维向量丛 E，将其上的 *Euclid* 度量作伸缩，也即将命题7.3中的 $\mathcal{A}$ 变化为

$$\mathcal{A}_t = \frac{t^2|\mathbf{x}|^2}{2} + t\nabla\mathbf{x} - \pi^* R^E$$

此时取对应的 *Thom* 形式

$$U_t = (-1)^{m(m+1)/2}(\sqrt{2\pi})^{-m}\int^B e^{-\mathcal{A}_t}$$

有

$$\frac{dU_t}{dt} = -(-1)^{m(m+1)/2}(\sqrt{2\pi})^{-m} d\int^B (\mathbf{x}e^{-\mathcal{A}_t})$$

♡

证明 由 $\mathcal{A}_t$ 的定义有

$$\frac{d\mathcal{A}_t}{dt} = t|\mathbf{x}|^2 + \nabla|\mathbf{x}| = (\nabla + t i_{\mathbf{x}})$$

同时用命题7.3完全一样的方法有

$$(\nabla + t i_{\mathbf{x}})\mathcal{A}_t = 0$$

故由 $i_{\mathbf{x}}$ 降低元素的次数和命题6.4有

$$\begin{aligned}
\frac{dU_t}{dt} &= (-1)^{m(m+1)/2}(\sqrt{2\pi})^{-m}\int^B \frac{d}{dt}e^{-\mathcal{A}_t} \\
&= -(-1)^{m(m+1)/2}(\sqrt{2\pi})^{-m}\int^B \frac{d\mathcal{A}_t}{dt}e^{-\mathcal{A}_t} \\
&= -(-1)^{m(m+1)/2}(\sqrt{2\pi})^{-m}\int^B (\nabla + t i_{\mathbf{x}})(\mathbf{x}e^{-\mathcal{A}_t}) \\
&= -(-1)^{m(m+1)/2} d\int^B (\mathbf{x}e^{-\mathcal{A}_t})
\end{aligned}$$

故得证。 □

现在取 V 为 TM 的一个截面，其零点离散且均非退化，零点全体记为 $\mathrm{zero}(V)$，则由 Euler 类的定义

$$e(E,\nabla^E)=V^*((-1)^{m(m+1)/2}(\sqrt{2\pi})^{-m}\int^B e^{-\mathcal{A}})=V^*U_1$$

和引理7.1，有

$$\begin{aligned}\int_M \mathrm{Pf}(R^{TM})&=\int_M\int^B V^*U_1=\int_M\int^B V^*U_t\\&=\int_M\int^B \exp(-\frac{t^2|V|^2}{2}-t\nabla^{TM}V+R^{TM})\end{aligned}$$

对 $\forall p\in\mathrm{zero}(V)$，存在 p 的一个小的开邻域 U_p 和其上的一个定向坐标系 $\mathbf{y}=(y^1,\cdots,y^{2n})$，使得在 U_p 上有

$$\mathbf{y}(p)=(0,\cdots,0),V(\mathbf{y})=\mathbf{y}A_p\partial_{\mathbf{y}}$$

其中 $\partial_{\mathbf{y}}=(\frac{\partial}{\partial y^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial y^{2n}})$，$A_p$ 为一个 $2n\times 2n$ 的不依赖于 $\mathbf{y}$ 的非退化矩阵。则将原式进行拆分：

$$\begin{aligned}(-\frac{1}{2\pi})^n\int_M \mathrm{Pf}(R^{TM})&=(-\frac{1}{2\pi})^n\sum_{p\in\mathrm{zero}(V)}\int_{U_p}\int^B\exp(-\frac{t^2|V|^2}{2}-t\nabla^{TM}V+R^{TM})\\&+(-\frac{1}{2\pi})^n\int_{M\setminus\underset{p\in\mathrm{zero}(V)}{\cup}U_p}\int^B\exp(-\frac{t^2|V|^2}{2}-t\nabla^{TM}V+R^{TM})\end{aligned}$$

由于在 $M\setminus\underset{p\in\mathrm{zero}(V)}{\cup}U_p$ 上 $|V|$ 有正的下界，故 $t\to+\infty$ 时，

$$(-\frac{1}{2\pi})^n\int_{M\setminus\underset{p\in\mathrm{zero}(V)}{\cup}U_p}\int^B\exp(-\frac{t^2|V|^2}{2}-t\nabla^{TM}V+R^{TM})\to 0$$

故只需要考虑上述分拆中的第一项，为了简化问题，我们希望在这些 U_p 上 g^{TM} 均为平凡度量，即

$$g^{TM}=(dy^1)^2+\cdots+(dy^{2n})^2$$

事实上这一”修改度量”的操作是可以进行的，如下引理保证了这一点：

Lemma 7.2

若 $\tilde{g}^{TM}$ 为 TM 上另一个度量，$\tilde{\nabla}^{TM}$ 是 TM 上另一个保持度量 $\tilde{g}^{TM}$ 的联络，$\tilde{R}^{TM}$ 为 $\tilde{\nabla}^{TM}$ 的曲率，则存在 $\omega \in \Omega^{2n-1}(M)$，使得

$$\mathrm{Pf}(R^{TM}) - \mathrm{Pf}(\tilde{R}^{TM}) = d\omega$$

进而

$$\int_M \mathrm{Pf}(R^{TM}) = \int_M \mathrm{Pf}(\tilde{R}^{TM})$$

♡

证明 首先考虑拉回从 $\pi^*TM \to TM$ 的如下典范截面：

$$Y(y) = (\pi(y), y) \in \pi^*TM \quad \forall y \in TM$$

Y 可以在 $\pi^* \wedge^* (TM^*)$ 上给出 Clifford 作用：

$$c(Y) = Y^* \wedge i_{-Y}$$

其中 $Y^*(\cdot) = (\pi^* g^{TM})(Y, \cdot)$。利用 $c(Y)$ 定义如下的一族超联络

$$\nabla_T = \pi^* \nabla^{\wedge^*(TM^*)} + Tc(Y) : \Omega^*(E, \pi^* \wedge^* (TM^*)) \to \Omega^*(TM, \pi^* \wedge^* (TM^*))$$

则

$$\nabla_T^2 = \pi^* R^{\wedge^*(TM^*)} + T[\pi^* \nabla^{\wedge^*(TM^*)}, c(Y)] - T^2 |Y|^2$$

由于表示中 $e^{-T^2|Y|^2}$ 项的存在，有

$$\int_{TM/M} \mathrm{str}[\exp(\nabla_T^2)] = \int_{TM/M} e^{-T^2|Y|^2} \mathrm{str}[\exp(\pi^* R^{\wedge^*(TM^*)} + T[\pi^* \nabla^{\wedge^*(TM^*)}, c(Y)])]$$

是良定的闭 $2n$ 次光滑形式，我们证明它所在的上同调类与 ∇^{TM}, g^{TM} 无关。

对另一个 $\nabla^{\tilde{T}M}, \tilde{g}^{TM}$，则定义

$$\nabla_u^E = (1-u)\nabla^{TM} + u\tilde{\nabla}^{TM} \quad g_u^{TM} = (1-u)g^{TM} + u\tilde{g}^{TM}$$

则有与上面类似的一族超联络：

$$\nabla_{u,T}=\pi^*\nabla_u^{\wedge^*(TM^*)}+Tc_u(Y):\Omega^*(TM,\pi^*\wedge^*(TM^*))\to\Omega^*(TM,\pi^*\wedge^*(TM^*))$$

直接计算：

$$\begin{aligned}&\int_{TM/M}\mathrm{str}[\exp(\nabla_{1,T}^2)]-\int_{TM/M}\mathrm{str}[\exp(\nabla_{0,T}^2)]\\&=\int_0^1\{\frac{\partial}{\partial u}\int_{TM/M}\mathrm{str}[\exp(\nabla_{u,T}^2)]\}du\\&=\int_0^1\{\int_{TM/M}\frac{\partial}{\partial u}\mathrm{str}[\exp(\nabla_{u,T}^2)]\}du\\&=d\int_0^1\{\int_{TM/M}\mathrm{str}[\exp(\frac{\partial\nabla_{u,T}}{\partial u}\nabla_{u,T}^2)]\}du\end{aligned}$$

故有

$$[\int_{TM/M}\mathrm{str}[\exp(\nabla_{0,T}^2)]]=[\int_{TM/M}\mathrm{str}[\exp(\nabla_{1,T}^2)]]$$

则任选与 g^{TM} 相容的联络 ∇^E。$\forall x\in M$，则取 x 的标准正交基 $\{e_1,\cdots,e_{2n}\}$，使得 $(\nabla^{TM}e_i)(x)=0$。下面记 $\{\omega\}^{(i)}$ 为微分形式 ω 的 i 次项，则有

$$\begin{aligned}&\int_{T_xM}\{\mathrm{str}[\exp(\nabla_T^2)]\}^{(4n)}\\&=\int_{T_xM}\{e^{-T^2|Y|^2}\mathrm{str}[\exp(\pi^*R^{\wedge^*(TM^*)}+Tc(\pi^*\nabla^{TM}Y))]\}^{(4n)}\\&=\int_{T_xM}e^{-T^2\sum\limits_{i=1}^{2n}(y^i)^2}\{\mathrm{str}[\exp(\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{2n}\Omega_i^j(x)(c(e_i)c(e_j)-\hat{c}(e_i)\hat{c}(e_j))+T\sum_{i=1}^{2n}dy^ic(e_i))]\}^{(4n)}\\&=\int_{T_xM}\frac{(-1)^n}{2^n}e^{-T^2\sum\limits_{i=1}^{2n}(y^i)^2}\{\mathrm{str}[\frac{1}{2^nn!}(\sum_{i,j=1}^{2n}\Omega_i^j(x)\hat{c}(e_i)\hat{c}(e_j)^n\prod_{i=1}^{2n}(1+Tdy^tc(e_i)))]\}^{(4n)}\\&=\int_{T_xM}\frac{(-1)^nT^{2n}}{2^n}e^{-T^2\sum\limits_{i=1}^{2n}(y^i)^2}\{\mathrm{str}[\pi^*\mathrm{Pf}(R^{TM})(x)\hat{c}(e_1)\cdots\hat{c}(e_{2n})\prod_{i=1}^{2n}dy^ic(e_i)]\}^{(4n)}\\&=(-\frac{1}{2})^n\int_{T_xM}T^{2n}e^{-T^2\sum\limits_{i=1}^{2n}(y^i)^2}\pi^*\mathrm{Pf}(R^{TM})(x)\wedge dy^1\wedge\cdots\wedge dy^{2n}\cdot\mathrm{str}[\hat{c}(e_1)c(e_1)\cdots\hat{c}(e_{2n})c(e_{2n})]\end{aligned}$$

利用命题6.12，有

$$
\begin{aligned}
&\int_{T_xM}\{\mathrm{str}[\exp(\nabla_T^2)]\}^{(4n)}\\
&=(-2)^n\mathrm{Pf}(R^E)(x)\int_{\mathbb{R}^{2n}}T^{2n}e^{-T^2\sum\limits_{i=1}^{2n}(y^i)^2}dy^1\wedge\cdots\wedge dy^{2n}\\
=&(-2\pi)^n\mathrm{Pf}(R^E)(x)
\end{aligned}
$$

也即

$$
\mathrm{Pf}(R^E)=(-2\pi)^{-n}\int_{TM/M}\{\mathrm{str}[\exp(\nabla_T^2)]\}^{(4n)}
$$

故得证。 □

故下面我们取 g 使得在 U_p 上它是平凡的，则对任意 $p\in\mathrm{zero}(V)$，可以计算当 $t\to+\infty$ 时，有

$$
\begin{aligned}
&(-\frac{1}{2\pi})^n\int_{U_p}\int^B\exp(-\frac{t^2|V|^2}{2}-t\nabla^{TM}V+R^{TM})\\
&=(-\frac{1}{2\pi})^n\int_{U_p}\int^B\exp(-\frac{t^2|V|^2}{2}-tdV)\\
&=(-\frac{1}{2\pi})^n\int_{U_p}\int^B\exp(-\frac{t^2|\mathbf{y}A_p|^2}{2}-td(\mathbf{y}A_p)\partial_{\mathbf{y}})\\
&=t^{2n}\mathrm{det}A_p(\frac{1}{2\pi})^n\int_{U_p}\exp(-\frac{t^2|\mathbf{y}A_p|^2}{2})dy^1\wedge\cdots\wedge dy^{2n}\\
&\to\mathrm{sgn}(\mathrm{det}A_p)(\frac{1}{2\pi})^n\int_{\mathbb{R}^{2n}}\exp(-\frac{|\mathbf{y}|^2}{2})dy^1\wedge\cdots\wedge dy^{2n}\\
&=\mathrm{sgn}(\mathrm{det}A_p)
\end{aligned}
$$

则微分流形课程中证明过的如下定理：

Theorem 7.4 (Poincaré-Hopf)

M 为闭定向光滑流形，V 是 M 上的只有非退化零点的光滑向量场，其零点集为 $\mathrm{zero}(V)$，

则有

$$\chi(M) = \sum_{p \in \text{zero}(V)} \text{sgn}(\det A_p)$$

有

$$\begin{aligned}
&(-\frac{1}{2\pi})^n \sum_{p \in \text{zero}(V)} \int_{U_p} \int^B \exp(-\frac{t^2|V|^2}{2} - t\nabla^{TM} V + R^{TM}) \\
&= \sum_{p \in \text{zero}(V)} \text{sgn}(\det A_p) \\
&= \chi(M)
\end{aligned}$$

则综上我们证明了 Gauss-Bonnet-Chern 公式。

Chapter 8 微分几何中的陈类与 Pontrjagin 类

8.1 Chern-Weil 理论基本定理

假设 V 为一个向量空间，记 k-线性对称映射 $\tilde{p}: V\times\cdots V\to\mathbb{C}$ 的全体构成的集合为 $S^k(V)^*$。再记 V 上所有齐次 k 次多项式全体为 $S_k(V)$，则对每一个 $\tilde{p}\in S^k(V)*$，可以定义 $p(B)=\tilde{p}(B,\cdots,B)\in S_k(V)$。反之，对每一个 $p\in S_k(V)$，可以构造

$$\tilde{p}(B_1,\cdots,B_k)=\frac{(-1)^k}{k!}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i_1<\cdots<i_j}(-1)^j P(B_{i_1}+\cdots+B_{i_j})\in S^k(V)^*$$

下面取 $V=\mathfrak{gl}(r,\mathbb{C})$

Definition 8.1

$\tilde{p}\in S^k(\mathfrak{gl}(r,\mathbb{C}))^*$ 被称为是<u>不变的</u>，若对任意的 $g\in GL(r,\mathbb{C}), A_i\in\mathfrak{gl}(r,\mathbb{C})$，有

$$\tilde{p}(gA_1g^{-1}.\cdots,gA_kg^{-1})=\tilde{p}(A_1,\cdots,A_k)$$

如上所有不变的齐次 k-线性对称映射的全体记为 $\tilde{I}_k(\mathfrak{gl}(r,\mathbb{C}))$。♣

上面的不变性的条件可以帮助我们将 $\tilde{p}$ 进行如下的扩张定义：

Proposition 8.1

对任意维数为 r 的复向量丛 E 和 m 的划分 $m=i_1+\cdots+i_k$，$\tilde{\varphi}\in\tilde{I}_k(\mathfrak{gl}(r,\mathbb{C}))$ 可以被扩张为

$$\tilde{\varphi}:(\wedge_M^{i_1}\otimes\mathrm{End}(E))\times\cdots\times(\wedge_M^{i_k}\otimes\mathrm{End}(E))\to\wedge_{\mathbb{C}}^m M$$

♠

证明 如下写出扩张映射的具体定义：

$$\tilde{\varphi}(\alpha_1\otimes\theta_1,\cdots,\alpha_k\otimes\theta_k)=(\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_k)\tilde{\varphi}(\theta_1,\cdots,\theta_k)$$

由不变性的条件可以验证良定性，具体计算在此省略。 □

为了将复流形的几何结构，即联络和曲率运用到上面的结果中，我们需要如下引理

Lemma 8.1

对任意维数为 r 的复向量丛 E 和 m 的划分 $m = i_1 + \cdots + i_k$，$\tilde{\varphi} \in \tilde{I}_k(\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C}))$，再对任意的形式 $\eta_j \in \Omega^{i_j}(M, \mathrm{End}(E))$，则有

$$d\tilde{\varphi}(\eta_1, \cdots, \eta_k) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{\sum_{i=1}^{j-1} i_l} \tilde{\varphi}(\eta_1, \cdots, \nabla\eta_j, \cdots, \eta_k)$$

其中 ∇ 是 E 上的联络 ∇^E 在 $\Omega^*(M, \mathrm{End}(E))$ 上的自然扩张，其作用为

$$\nabla\eta = d\eta + [A, \eta] \quad \forall \eta \in \Omega^*(M, \mathrm{End}(E))$$

其中 $\nabla^E = d + A$，A 为联络 *1*-形式矩阵。

证明 首先显然有

$$d\tilde{\varphi}(\eta_1, \cdots, \eta_k) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{\sum_{i=1}^{j-1} i_l} \tilde{\varphi}(\eta_1, \cdots, \nabla\eta_j - [A, \eta_j], \cdots, \eta_k)$$

故只需要证

$$\sum_{j=1}^{k} (-1)^{\sum_{i=1}^{j-1} i_l} \tilde{\varphi}(\eta_1, \cdots, [A, \eta_j], \cdots, \eta_k) = 0$$

进行如下计算：令 $\eta_j = \alpha_j \otimes \theta_j$，$A = \beta \otimes B$，则

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} (-1)^{\sum_{i=1}^{j-1} i_l} \tilde{\varphi}(\eta_1, \cdots, [A, \eta_j], \cdots, \eta_k) &= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{\sum_{i=1}^{j-1} i_l} \tilde{\varphi}(\alpha_1 \otimes \theta_1, \cdots, \beta \wedge \alpha_j \otimes [B, \theta_j], \cdots, \alpha_k \otimes \theta_k) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \beta \wedge \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \tilde{\varphi}(\theta_1 \cdot \cdots, [B, \theta_j], \theta_k) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \beta \wedge \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \tilde{\varphi}(\theta_1 \cdot \cdots, \frac{d}{dt}(e^{tB}\theta_j e^{-tB})|_{t=0}, \theta_k) \\
&= \beta \wedge \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \frac{d}{dt}|_{t=0} \tilde{\varphi}(e^{tB}\theta_1 e^{-tB}, \cdots, e^{tB}\theta_k e^{-tB})
\end{aligned}$$

由不变性的条件，上述式子为 0，故得证。 □

在如上的准备工作之后，我们来证明本节的主要定理。

Theorem 8.1 (Chern-Weil)

我们有如下的同态：

$$f_{CW}:\tilde{I}_k(\mathfrak{gl}(r,\mathbb{C}))\to H^{2k}(M;\mathbb{C})$$

其中 $f_{CW}(\tilde{\varphi})=[\tilde{\varphi}(\Omega,\cdots,\Omega)]=[\varphi(\Omega)]$。该同态被称为 *Chern-Weil* 同态，并独立于 ∇^E 的选取。♡

证明 首先需要证明对任意一个 E 上的联络 ∇^E 和对应的曲率矩阵 Ω,$\varphi(\Omega)$ 是闭的，这是因为

$$d\varphi(\Omega)=\sum_{j=1}^{k}\tilde{\varphi}(\Omega,\cdots,\nabla^E\Omega,\cdots,\Omega)=0$$

第一步来自于引理8.1（此处 $i_1=\cdots=i_k=2$），第二步来自于 Bianchi 恒等式。

则我们只需要证明该同态不依赖于 ∇^E 的选取，也即对两个 E 上的联络 ∇_1^E,∇_2^E，有 $[\varphi(\Omega_1)]=[\varphi(\Omega_2)]$。

令 $A=\nabla_2^E-\nabla_1^E\in\Omega^1(M,\mathrm{End}(E))$，则

$$\Omega_2=(\nabla_1^E+A)\circ(\nabla_1^E+A)=\Omega_1+A\wedge A+D\circ A+A\circ D=\Omega_1+A\wedge A+D(A)$$

记 $\nabla_t^E=\nabla_1+tA$，对应的曲率为 Ω_t，则同上

$$\Omega_t=\Omega_1+tD(A)+t^2A\wedge A$$

故有

$$\begin{aligned}\varphi(\Omega_t)&=\tilde{\varphi}(\Omega_t,\cdots,\Omega_t)\\&=\tilde{\varphi}(R_1^E,\cdots,R_1^E)+t\sum_{j=1}^{k}\tilde{\varphi}(\Omega_t,\cdots,\frac{d}{dt}|_{t=0}\Omega_t,\cdots,\Omega_1)+o(t^2)\\&=\varphi(\Omega_1)+kt\tilde{\varphi}(\Omega_1,\cdots,\Omega_1,D(A))+o(t^2)\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\varphi(\Omega_t)|_{t=t_0} &= \frac{d}{ds}\varphi(\Omega_{t_0+s})|_{s=0}\\ &= k\tilde{\varphi}(\Omega_{t_0},\cdots,\Omega_{t_0},\nabla^E_{t_0}(A))\\ &= kd\varphi(\Omega_{t_0},\cdots,\Omega_{t_0},A)\end{aligned}$$

故

$$\varphi(\Omega_2)-\varphi(\Omega_1)=\int_0^1\frac{d}{dt}\varphi(\Omega_t)dt=\int_0^1 kd\varphi(\Omega_t,\cdots,\Omega_t,A)dt$$

也即 $[\varphi(\Omega_2)]=[\varphi(\Omega_1)]$，故得证。 $\square$

8.2 曲率多项式定义

上一节的最后我们证明了 Chern-Weil 理论基本定理，它可以帮助我们定义陈类和陈特征。

Definition 8.2

对一个 r 维复向量丛，令 Φ_k 为如下定义的齐次 k 次多项式：

$$\det(I+tB)=1+\sum_{k=1}^{r}t^k\Phi_k(B)$$

则由 *Chern-Weil* 理论基本定理，对任意的联络 ∇^E，可以得到一个形式

$$c_k(E,\nabla^E)=\Phi_k(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega)\in\Omega^{2k}(M)$$

此外，对所有的联络，如上的形式属于同一 *de Rham* 上同调类

$$c_k(E)=[c_k(E,\nabla^E)]\in H^{2k}_{dR}(M;\mathbb{C})$$

称为向量丛 E 的第 k陈类。

再令 P_k 为如下定义的齐次 k 次多项式：

$$\mathrm{tr}(e^{tB})=P_0(B)+tP_1(B)+\cdots$$

则同上可以定义 E 的第 k陈特征 为

$$ch_k(E)=[ch_k(E,\nabla^E)]=[P_k(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega)]\in H^{2k}_{dR}(M;\mathbb{C})$$

当 ∇^E 取为某个 *Hermitian* 度量 h 对应的陈联络时，也将 $c_k(E,\nabla^E)$ 或 $ch_k(E,\nabla^E)$ 写作 $c_k(E,h)$ 或 $ch_k(E,h)$。

对一个流形 M 而言，定义 M 的陈类与陈特征为其切丛的陈类与陈特征。♣

由定义我们不难写出上面的陈类和陈特征的等价表达式，即

$$c_k(E)=[(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi})^k\frac{1}{k!}\sum\delta^{i_1\cdots i_K}_{j_1\cdots j_k}\Omega^{j_1}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\Omega^{j_k}_{i_k}]$$

$$ch_k(E) = [\mathrm{tr}(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega \wedge \cdots \wedge \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega)] = (\frac{\sqrt{-1}}{2\pi})^k \frac{1}{k!} \sum \Omega_{i_1}^{i_2} \wedge \wedge \Omega_{i_k}^{i_1}$$

在进一步的讨论之前，我们首先说明上面定义的各种形式实际上是实的形式，也即陈类是实上同调类。

由命题6.6，在幺正基下，$\overline{\Omega} = -\Omega^T$，则

$$\overline{\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega^T$$

故

$$c(E, \nabla^E) = \det(I + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega) = \det(I + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega^T) = \overline{\det(I + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega)} = \overline{c(E, \nabla^E)}$$

则 $c_k(E) = \overline{c_k(E)}$，即 $c_k \in H^{2k}(M; \mathbb{R})$。对陈特征通过同样的论证也有一样的结果。

我们再来验证这里定义的 $\mathbb{R}$ 系数陈类拉回到 $\mathbb{Z}$ 系数上与之前在拓扑理论中的陈类具有一致性，则回忆陈类的公理化定义：

（1）$c_0(\omega) = 1$，且 $c_i(\omega) = 0 (i > n)$

（2）$f : B(\omega) \to B(\omega')$ 来自于从映射 $\omega \to \omega'$，则 $c_i(\omega) = f^*(c_i(\omega'))$

（3）若 ω 和 ω' 有相同的底空间，则

$$c_k(\omega \oplus \omega') = \sum_{i=0}^{k} c_i(\omega) \cup c_{k-i}(\omega')$$

（4）对 $\mathbb{CP}^1$ 上的典范线从 γ_1^1，有 $c_1(\gamma_1^1) \neq 0$。

第一条显然成立，则下面我们对如上的（2）（3）（4）逐一进行验证。

对第二条，只需要证明对 E 上的曲率形式 Ω，拉回从 f^*E 上的曲率形式为 $f^*\Omega$ 即可。

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

取 $s=(s_1,\cdots,s_r)$ 为 E 的 M 的一个局部平凡化邻域 U 上的标架，则显然 f^*s 为 f^*E 在 $f^{-1}U\subset N$ 上的标架。令 A 为 E 上关于标架 s 的联络矩阵，则自然有 f^*A 是 f^*E 上关于标架 f^*s 的联络矩阵，故 $f^*\Omega$ 为 f^*E 上对应的曲率形式，故得证。

对第三条，设 E_1,E_2 为 M 上的两个向量丛，基分别为 $(e_1,\cdots,e_{r_1})$ 和 $(\tilde{e_1},\cdots,\tilde{e_{r_2}})$，$E_1,E_2$ 上的联络为 ∇_1^E,∇_2^E，在上面的基下的对应联络矩阵分别为 A_1,A_2，曲率矩阵为 Ω_1^E,Ω_2^E。则可以验证在 $E_1\oplus E_2$ 的基 $(e_1,\cdots,e_{r_1},\tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_{r_2})$ 上，矩阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

给出了 $E_1\oplus E_2$ 的一个联络矩阵，则 $\Omega_1^E\oplus\Omega_2^E$ 为 $E_1\oplus E_2$ 的曲率矩阵，故由分块矩阵的行列式计算

$$c(E_1\oplus E_2,\nabla^{E_1\oplus E_2})=\det(I+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega_1)\det(I+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega_2)=c(E_1,\nabla_1^E)c(E_2,\nabla_2^E)$$

故 $[c(E_1\oplus E_2)]=[c(E_1)][c(E_2)]$。

对第四条，取 $\mathbb{CP}^1$ 上的典范线丛 γ_1^1，每一个纤维均为 $\mathbb{C}^2$ 中过原点的直线，可以用 $(\xi^0,\xi^1)\in\mathbb{C}^2$ 表示。令 $z=\frac{\xi^1}{\xi^0}$ 为 $U=\mathbb{CP}^1-\{(0,1)\}$ 上的坐标，s 为 γ_1^1 在 U 上的标架，在每个纤维处取值为 $s(z)=(1,z)$，则 γ_1^1 上的 Hermitian 度量由

$$H(z)=h(s(z),s(z))=1+|z|^2$$

给出。

则由 6.5 节中的计算可知 γ_1^1 上陈联络的联络形式和曲率形式为

$$A=\partial H\cdot H^{-1}=\frac{\overline{z}dz}{1+|z|^2}$$

和

$$\Omega = \overline{\partial} A = \frac{-dz \wedge d\overline{z}}{(1+|z|^2)^2}$$

为了计算方便，采用极坐标 (r,t)，则由 $z = re^{2\pi it}$

$$c_1(\gamma_1^1) = [-\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\frac{-dz \wedge d\overline{z}}{(1+|z|^2)^2}] = [\frac{-2rdr \wedge dt}{(1+r^2)^2}]$$

则

$$\int_{\mathbb{CP}^1} c_1(\gamma_1^1) = \int_U c_1(\gamma_1^1) = -\int_0^1\int_0^{+\infty}\frac{2r}{(1+r^2)^2}drdt = -1 \neq 0$$

故 $c_1(\gamma_1^1) \neq 0$，则得证。

对于实向量丛而言，我们仍然可以利用之前的定义

$$p(E) = c(E \otimes \mathbb{C})$$

来定义 Pontrjagin 类。

但利用上面的这个式子我们很容易看出 Pontrjagin 类也可以有如下的多项式类型定义：

$$p(E, \nabla^E) = \det((I - (\frac{R^E}{2\pi})^2)^{\frac{1}{2}})$$

对于对偶丛的陈类，我们有如下结论：

Proposition 8.2

对 r 维复向量丛 E 及其对偶丛 E^*，有

$$c_j(E^*) = (-1)^j c_j(E)$$

证明 取 E 的一组基 $(e_1, \cdots, e_r)$ 与对应的联络形式矩阵 A，设 E^* 上的联络为 ∇^*，对应曲率矩阵为 Ω^*，在对偶基 $(e_1^*, \cdots, e_r^*) = (\theta_1, \cdots, \theta_r)$ 下的联络形式矩阵为 $A^* = A^*_{ik}$，则

$$A^*_{ik}\delta^k_j = A^*_{ik}\theta^k(e_j) = \nabla^*\theta^i(e_j) = -\theta^i(\nabla e_j) = -\theta^i(A^k_j e_k) = -A^i_j$$

故 $A^* = -A^T$，则

$$\Omega^* = dA^* + A^* \wedge A^* = -dA^T - A^T \wedge A^T = -\Omega^T$$

则类似于上面的计算有 $c_j(E^*) = (-1)^j c_j(E)$。 □

对陈特征也有一些简单的结论，这里直接不加证明地给出：

Proposition 8.3

(1) $ch(E) = \mathrm{rank}(E) + c_1(E) + \frac{c_1^2(E)-c_2(E)}{2} + \frac{c_1^3(E)-3c_1(E)c_2(E)+3c_3(E)}{6} + \cdots$

(2) $ch(E_1 \oplus E_2) = ch(E_1) + ch(E_2)$

(3) $ch(E_1 \otimes E_2) = ch(E_1)ch(E_2)$

由 6.5 节中的计算可知，对全纯丛 E 和其上的 Hermitian 度量 h，其陈联络 ∇^E 对应的曲率形式是 (1,1) 的，故 c_k 是 (k,k) 的，且有

$$c_1(E,h) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum_k \Omega_{kk} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum R_{\alpha\overline{\beta}} dz^\alpha \wedge d\overline{z}^\beta$$

反之有如下结论：

Proposition 8.4

M 为紧 Kähler 流形，E 为 M 上全纯丛，则对任意能够表示 $c_1(E)$ 的闭的实 (1,1) 形式 φ，存在 E 上的 Hermitian 度量 h，使得 $\varphi = c_1(E,h)$。

证明 设 φ 有如下形式

$$\varphi = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum S_{\alpha\overline{\beta}} dz^\alpha \wedge d\overline{z}^\beta$$

再任取一个 Hermitian 度量 h'，并令其对应的 Ricci 形式为 $\sum \sqrt{-1} R_{\alpha\overline{\beta}} dz^\alpha \wedge d\overline{z}^\beta$，则由引理6.3，存在 M 上的实值函数 f 使得

$$\sum (R_{\alpha\overline{\beta}} - S_{\alpha\overline{\beta}}) dz^\alpha \wedge d\overline{z}^\beta = \partial\overline{\partial} f$$

也即

$$R_{\alpha\bar{\beta}} - S_{\alpha\bar{\beta}} = \partial_\alpha \partial_{\bar{\beta}} f$$

又由 6.5 节中的计算可知

$$R_{\alpha\bar{\beta}} = -\sqrt{-1}\partial_\alpha \partial_{\bar{\beta}}(\mathrm{logdet}(h'_{i\bar{j}}))$$

则取 $h = e^{\frac{f}{r}} h'$，则 $\det(h_{i\bar{j}}) = e^f \det(h'_{i\bar{j}})$，故 h' 为所求。 □

上面的命题的特例就是 Ricci 形式。在 6.5 节中，我们已经计算得到对 Kähler 流形 (M, J, g) 与其上的 Levi-Civita 联络 ∇，对应的曲率为 Ω，则

$$\sqrt{-1}\sum_k \Omega_{kk} = \sqrt{-1}\sum R_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta = \rho$$

故 $\rho \in 2\pi c_1(M)$。反之，有如下的 Calabi-Yau 定理：

Theorem 8.2 (Calabi-Yau)

(M, h_0) 为 Kähler 流形，则对任意的实 (1,1) 形式 $\psi \in 2\pi c_1(M)$，存在唯一的 Kähler 度量 h 与 h_0 属于同一上同调类（这里自然地将度量视为 (1,1) 形式），使得在 h 下的 Ricci 形式 $\rho(h) = \psi$。 ♡

证明 不妨记 $h_0 = \sqrt{-1}(g_0)_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$。由引理6.3，存在 M 上的实值函数 φ 和 F 使得

$$h = h_0 + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi$$

和

$$\rho(h_0) = \psi + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}F$$

则 $\rho(h) = \psi$ 等价于 $\rho(h) - \rho(h_0) = \psi - \rho(h_0)$。又利用

$$\rho(h) = -\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\mathrm{logdet}(h)$$

即等价于

$$-\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log\frac{\det h}{\det h_0}=-\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}F$$

故

$$\log\frac{\det h}{\det h_0}=F+c$$

其中 $c\in\mathbb{C}$ 为常数，我们要求对 F 进行如下的单位化：

$$\int_M(e^F-1)h_0^n=0$$

则可确定唯一的 c，为了方便下面将其并入 F，则原命题等价于

$$\frac{\det(h_0+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)}{\det h_0}=e^F$$

故最终划归为方程

$$\det((g_0+\varphi)_{i\bar{j}})=e^F\det((g_0)_{i\bar{j}})$$

该方程被称为蒙日-安培方程。Calabi-Yau 定理即为该方程的解的存在唯一性问题，具体的证明参见 Yau 的原始论文。 □

8.3 消灭定理

本节我们来讨论消灭定理。所谓的消灭定理指的是上同调群的“消灭“，即在某些条件之下，一些与上同调群有关的量会变成 0，从某种程度上而言这与拓扑理论中的障碍作用有一定的相似之处。下面我们先来看一个”消灭“的例子：

M 是一个 n 维复流形，E 是 M 上的 r 维 Hermitian 丛，∇ 为与度量 h 相容的联络, 曲率为 R。对一组基 $s=(s_1,\cdots,s_r)$ 和 $\xi=\sum\xi^i s_i\in\Omega^0(E)$，我们知道有

$$\nabla\xi=\sum(d\xi+\sum\omega_j^i\xi^j)s_i$$

根据 (1,0) 形式和 (0,1) 形式进行分划，则有

$$\nabla^{1,0}\xi=\sum(\partial\xi^i+\sum\omega_j^i\xi^j)s_i,\nabla^{0,1}=\sum\overline{\partial}\xi^i s_i$$

则分别采用如下记号

$$\partial\xi^i+\sum\omega_j^i\xi^j=\sum\nabla_\alpha\xi^i dz^\alpha,\overline{\partial}\xi^i=\sum\nabla_{\overline{\beta}}\xi^i d\overline{z}^\beta$$

再回忆我们定义曲率

$$R(s_j)=\sum\Omega_j^i s_i$$

其中

$$\Omega_j^i=\sum R^i_{\alpha\overline{\beta}j}dz^\alpha\wedge d\overline{z}^\beta$$

我们有

Proposition 8.5

ξ 是 (E,h) 上的全纯截面，则

$$\partial\overline{\partial}h(\xi,\xi)=h(\nabla^{1,0}\xi,\nabla^{1,0}\xi)-h(R(\xi),\xi)$$

在局部坐标下，即

$$\frac{\partial^2 h(\xi,\xi)}{\partial z^\alpha \partial \overline{z}^\beta} = \sum h_{i\overline{j}} \nabla_\alpha \xi^i \nabla_{\overline{\beta}} \overline{\xi}^j - \sum h_{i\overline{k}} R^i_{\alpha\overline{\beta}j} \xi^j \overline{\xi}^k$$

证明 对函数 f 显然有 $\overline{\partial}\partial f = \nabla^{0,1}\nabla^{1,0} f$，取 $f = h(\xi,\xi)$，并注意到 $\nabla^{0,1}\xi = \nabla^{1,0}\overline{\xi} = 0$，有

$$\begin{aligned}\partial\overline{\partial} h(\xi,\xi) &= -\overline{\partial}\partial h(\xi,\xi) = -\nabla^{0,1}\nabla^{1,0} h(\xi,\xi) \\ &= -\nabla^{0,1} h(\nabla^{1,0}\xi,\xi) = -h(\nabla^{0,1}\nabla^{1,0}\xi,\xi) + h(\nabla^{1,0}\xi,\nabla^{1,0}\xi)\end{aligned}$$

又由于

$$\nabla^{0,1}\nabla^{1,0}\xi = \nabla^{0,1}\xi + \nabla^{0,1}\xi = \nabla\nabla\xi = R(\xi)$$

故得证。 □

现在再取 g 为底流形 M 上的 Hermitian 度量

$$g = \sum g_{\alpha\overline{\beta}} dz^\alpha d\overline{z}^\beta$$

则定义

$$K^i_j = \sum g^{\alpha\overline{\beta}} R^i_{\alpha\overline{\beta}j}, K_{j\overline{k}} = \sum h_{i\overline{k}} K^i_j$$

则 $K = (K^i_j)$ 定义了 E 的一个自同态，$\hat{K} = (K_{j\overline{k}})$ 定义了 E 的 Hermitian 形式如下：

$$K(\xi) = \sum K^i_j \xi^j s_i \quad \hat{K}(\xi,\eta) = \sum K_{j\overline{k}} \xi^j \overline{\eta}^k$$

我们称 K 为 E 的**平均曲率**，$\hat{K}$ 为**平均曲率形式**。

利用上面的记号我们给出如下的定理，它初步告诉了我们平均曲率对全纯截面的限制作用：

Theorem 8.3

(E,h) 为紧 *Hermitian* 流形 (M,g) 上的 *Hermitian* 丛，∇ 是与 h 相容的联络，R 为曲率，$\hat{K}$ 为平均曲率形式。则

（1）若 $\hat{K}$ 在 M 上处处半负定，则任意 E 上的全纯截面是平行的，即

$$\nabla\xi = 0$$

且

$$\hat{K}(\xi,\xi) = 0$$

（2）若 $\hat{K}$ 在 M 上处处半负定，且在某点处负定，则 E 上无非零的全纯截面。

证明 我们首先需要如下偏微分方程中的引理

Lemma 8.2

U 为 $\mathbb{R}^m$ 中的区域，$f, g^{ij}, h^i (1 \le i,j \le m)$ 均为 U 上的实光滑函数，(g^{ij}) 是对称矩阵，且在 U 上处处正定。若在 U 上有

$$L(f) = \sum g^{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + \sum h^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \ge 0$$

且在 U 的内部 f 可以取到局部最大值，则 f 是常值函数。

则对定理的（1），令 $f = h(\xi,\xi), g^{ij} = g^{\alpha\overline{\beta}}, h^i = 0$，令 A 是 f 在 M 上的最大值，取任意 x_0 使得 $f(x_0) = A$，并取 U 为 x_0 的一个坐标邻域，则运用命题8.5，有

$$L(f) = \sum g^{\alpha\overline{\beta}}\partial_\alpha\partial_{\overline{\beta}} h(\xi,\xi) = \sum g^{\alpha\overline{\beta}} h_{i\overline{j}} \nabla_\alpha \xi^i \nabla_{\overline{\beta}} \overline{\xi}^j - \sum g^{\alpha\overline{\beta}} h_{i\overline{k}} R^i_{\alpha\overline{\beta}j} \xi^j \overline{\xi}^k$$

令

$$||\nabla^{1,0}\xi||^2 = \sum g^{\alpha\overline{\beta}} h_{i\overline{j}} \nabla_\alpha \xi^i \nabla_{\overline{\beta}} \overline{\xi}^j$$

则有

$$L(f) = ||\nabla^{1,0}\xi||^2 - \hat{K}(\xi,\xi) \ge 0$$

由引理8.2，在 U 上恒有 $f=A$，故 $f^{-1}(A)$ 是开的，同时显然 $f^{-1}(A)$ 也是闭的，故在 M 上 f 恒等于 A，故 $L(f)=0$，由 $L(f)$ 的表达式可知

$$||\nabla^{1,0}\xi||^2=\hat{K}(\xi,\xi)=0$$

故 $\nabla^{1,0}\xi=0$，又 ξ 全纯，即 $\nabla^{0,1}\xi=0$，故 $\nabla\xi=0$。

对定理的（2），若 ξ 为非零的全纯截面，由（1）ξ 是平行的，则 ξ 处处非零，再由 $\hat{K}(\xi,\xi)=0$ 可知 $\hat{K}$ 是处处非负定的，矛盾！。 □

下面的推论将陈类与如上的“消灭”现象建立联系：

Corollary 8.1

(F,h) 是紧复流形 M 上的 *Hermitian* 线丛。若在任意的 $x\in M$，第一陈形式 $c_1(F,h)$ 在某一个方向是负的，即

$$c_1(F,h)(X,X)<0(\exists X\in T_xM)$$

则 F 上无非零的全纯截面。 ♡

证明 对于线丛，曲率形式可以局部写成

$$\Omega=\sum R_{\alpha\overline{\beta}}dz^\alpha\wedge d\overline{z}^\beta$$

由条件，在每一点处，$(R_{\alpha\overline{\beta}})$ 的特征值中都至少有一个是负的，则我们可以选取 M 上的 Hermitian 度量 $g^{\alpha\overline{\beta}}$ 使得平均曲率 $K=\sum g^{\alpha\overline{\beta}}R_{\alpha\overline{\beta}}$ 是处处负定的，则由定理8.3即得结果。 □

在 Kähler 流形的情况下，我们可以利用如下的记号来重新书写上述结果。(M,g) 是 Kähler 流形，ω 是基本形式，对全纯丛 E，我们定义 E 的<u>度</u> 为

$$\deg(E)=\int_M c_1(E)\wedge\omega^{n-1}$$

首先我们需要一个来自于局部计算的命题

Proposition 8.6

对线丛 (F,h) 和其上的一个截面 ξ，有

$$\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}h(\xi,\xi)\wedge\omega^{n-1}=\frac{1}{n}(||\nabla^{1,0}\xi||^2\omega^n-2n\pi||\xi||^2c_1(F,h)\wedge\omega^{n-1})$$

证明 我们取 $\theta^1,\cdots,\theta^n$ 为 M 上余切丛的一组标架，使得

$$\omega=\sqrt{-1}\sum\theta^\alpha\wedge\overline{\theta}^\alpha$$

则对任意的 (1,1) 形式 $\alpha=\sqrt{-1}\sum a_{\alpha\overline{\beta}}\theta^\alpha\wedge\overline{\theta}^\beta$，有

$$\alpha\wedge\omega^{n-1}=\frac{1}{n}\sum a_{\alpha\overline{\alpha}}\omega^n$$

取 $\alpha=\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}h(\xi,\xi)$ 有

$$\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}h(\xi,\xi)\wedge\omega^{n-1}=\frac{1}{n}(||\nabla^{1,0}\xi||^2-\hat{K}(\xi,\xi))\omega^n$$

再取 $\alpha=c_1(F,h)=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum R_{\alpha\overline{\beta}}\theta^\alpha\overline{\theta}^\beta$ 有

$$c_1(F,h)\wedge\omega^{n-1}=\frac{1}{2n\pi}(\sum R_{\alpha\overline{\alpha}})\omega^n$$

再计算线丛中的平均曲率形式

$$\begin{aligned}\hat{K}(\xi,\xi)&=\sum g^{\alpha\overline{\beta}}h_{i\overline{k}}R^i_{\alpha\overline{\beta}j}\xi^j\overline{\xi}^k\\&=\sum R_{\alpha\overline{\alpha}}||\xi||^2\end{aligned}$$

故有

$$\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}h(\xi,\xi)\wedge\omega^{n-1}=\frac{1}{n}(||\nabla^{1,0}\xi||^2\omega^n-2n\pi||\xi||^2c_1(F,h)\wedge\omega^{n-1})$$

则得证。 □

利用命题8.4，存在 Hermitian 度量 h，使得 $c_1(F,h)$ 是调和形式。又 M 是紧的，故存在常

数 c 使得

$$\sum R_{\alpha\bar{\alpha}} \equiv c$$

利用这一结果由上面的证明有：

$$2n\pi c_1(F,h) \wedge \omega^{n-1} = (\sum R_{\alpha\bar{\alpha}})\omega^n = c\omega^n$$

两边积分有

$$2n\pi \deg(F) = \int_M c\omega^n$$

故由命题8.6

$$0 = \int_M ||\nabla^{1,0}\xi||^2 - c||\xi||^2)\omega^n$$

由上面的式子我们立即得到如下的结果：

Theorem 8.4

F 是紧 Kähler 流形 M 上的全纯线丛，则

（1）若 $\deg(F) < 0$，则 F 上没有非零的全纯截面；

（2）若 $\deg(F) = 0$，则 F 上的全纯截面要么恒为零，要么没有零点；此外，F 上的全纯截面均为平行的。

Corollary 8.2

M 为一个紧 Kähler 流形，且切丛的度是正的。令 $K_M = \wedge^n T^*M$ 为 M 上的一个线丛，$K_M^m = K_M^{\otimes m}$，则有

$$P_m = \dim H^0(M, K_M^m) = 0$$

证明 注意到 $c_1(M) = -c_1(K_M)$ 即可。 □

下面我们再定义线丛的正负性

Definition 8.3

对 n 维紧 *Kähler* 流形 M 上的全纯线丛 F，其第一陈类可以由如下的实的闭 *(1,1)* 形式代表：

$$\varphi = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum \varphi_{\alpha\overline{\beta}} dz^{\alpha} \wedge \overline{z}^{\beta}$$

若在 M 上，*Hermite* 矩阵 $(\varphi_{\alpha\overline{\beta}})$ 是处处（半）负（正）定的，则称 F 是（半）负（正）的。♣

关于正的线丛我们有如下的小平-中野消灭定理。

Theorem 8.5 (Kodaira-Nakano)

L 是紧 *Kähler* 流形 M 上的正线丛，则

$$H^p(M, \Omega^q(L)) = 0 \quad \forall p+q>n$$

♡

为了证明之，我们需要如下的 Nakano 恒等式

Lemma 8.3 (Nakano 恒等式)

$\varphi \in \Omega^{p,q}(M, L)$，$H$ 为 L 上的 *Hermitian* 度量，∇ 为对应的陈联络，R 为对应曲率。则

$$((\sqrt{-1}\wedge_{\omega} R - \sqrt{-1}R\wedge_{\omega})\varphi, \varphi) = ||\partial_L \varphi||^2 + ||\partial_L^* \varphi||^2 - ||\overline{\partial}_L \varphi||^2 - ||\overline{\partial}_L^* \varphi||^2$$

♡

证明　首先由于

$$R\varphi = (\partial_L \overline{\partial}_L + \overline{\partial}_L \partial_L)\varphi$$

有

$$(\sqrt{-1}\wedge_{\omega} R\varphi, \varphi) = (\sqrt{-1}(\wedge_{\omega}\partial_L - \partial_L\wedge_{\omega})\overline{\partial}_L\varphi, \varphi) + (\sqrt{-1}\partial_L \wedge_{\omega} \overline{\partial_L}\varphi, \varphi)$$
$$+ (\sqrt{-1}(\wedge_{\omega}\overline{\partial_L} - \overline{\partial_L}\wedge_{\omega})\partial_L\varphi, \varphi) + (\sqrt{-1}\overline{\partial}_L \wedge_{\omega} \partial_L\varphi, \varphi)$$

注意到 Kähler 恒等式

$$\sqrt{-1}[\wedge_{\omega}, \partial_L] = -\overline{\partial}_L^* \quad \sqrt{-1}[\wedge_{\omega}, \overline{\partial}] = \partial_L^*$$

故有

$$(\sqrt{-1} \wedge_\omega R\varphi, \varphi) = (-\overline{\partial}_L^* \overline{\partial}_L \varphi, \varphi) + (\sqrt{-1}\partial_L \wedge_\omega \overline{\partial_L} \varphi, \varphi) + (\partial_L^* \partial_L \varphi, \varphi) + (\sqrt{-1}\partial_L \wedge_\omega \partial_L \varphi, \varphi)$$

同样的方法可以证明

$$(\sqrt{-1}R \wedge_\omega \varphi, \varphi) = (-\overline{\partial}_L \overline{\partial}_L^* \varphi, \varphi) - (\sqrt{-1}\partial_L \wedge_\omega \overline{\partial_L} \varphi, \varphi) + (\partial_L \partial_L^* \varphi, \varphi) - (\sqrt{-1}\partial_L \wedge_\omega \partial_L \varphi, \varphi)$$

两式相加即得结果。 □

回到定理8.5的证明：

利用 Dolbeault 直和分解定理，我们只需要证明 $\surd, \mathrm{II}(\mathcal{M}, \mathcal{L}) = \prime$ 即可。考虑 (p, q) 的调和形式 φ 使得 $\triangle^{\overline{\partial}} \varphi = 0$。

首先有 $\overline{\partial}_L \varphi = \overline{\partial}_L^* \varphi = 0$，故代入 Nakano 恒等式，有

$$((\sqrt{-1} \wedge_\omega R - \sqrt{-1}R\wedge_\omega)\varphi, \varphi) = ||\partial_L \varphi||^2 + ||\partial_L^* \varphi||^2 \geq 0$$

又由线丛的正性条件，$\sqrt{-1}R > 0$，故可以在 M 上取 Kähler 度量，使得 $\omega = \sqrt{-1}R$，故

$$((\sqrt{-1} \wedge_\omega R - \sqrt{-1}R\wedge_\omega)\varphi, \varphi) = ((\wedge_\omega L_\omega - L_\omega \wedge_\omega)\varphi, \varphi) = (n - p - q)||\varphi||^2 \geq 0$$

故只能 $\varphi = 0$，原定理得证。 □

小平消灭定理有如下一般形式：

Theorem 8.6

M 为一个 n 维的射影代数流形，F 为其上一个线丛，若

（1）对 M 上的任意一个曲线 C，有 $\int_C c_1(F) \geq 0$

（2）$\int_M c_1(F)^n > 0$

则 $H^q(M, \Omega^n(F)) = 0 (q \geq 1)$。

Gigante 和 Girbau 对上面的8.5进行了加强，为此我们需要定义第一陈类的秩：

若第一陈类由如下的实的闭 (1,1) 形式代表：

$$\varphi = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum \varphi_{\alpha\overline{\beta}} dz^\alpha \wedge \overline{z}^\beta$$

若矩阵 $(\varphi_{\alpha\overline{\beta}})$ 在 M 上是处处半正 (负) 定的，且秩恒大于等于 k，则记 $c_1(F) \geq (\leq) 0$，且 $\mathrm{rank} c_1(F) \geq k$。利用这一记号我们可以叙述如下的定理：

Theorem 8.7 (Gigante-Girbau)

若 M 为紧 Kähler 的，L 为其上线丛，且 $c_1(L) \leq 0, \mathrm{rank} c_1(L) \geq k$，则

$$H^q(M, \Omega^p(L)) = 0 \quad \forall p + q \leq k - 1$$

♡

不难看出该定理蕴含了前面的 Kodaira-Nakano 消灭定理。该定理的证明需要对上面介绍的 Nakano 恒等式进行更精细化的处理，此处省略具体细节。

在本节的最后我们看一个实流形的关于 Pontrjagin 类的消灭现象。

Theorem 8.8 (Bott)

M 为一个实流形，F 为其切丛 TM 的可积子丛，则若 $2(i_1 + \cdots + i_k) > \dim(M) - \mathrm{rank}(F)$，则在 $H_{dR}^{4(i_1+\cdots+i_k)}(M; \mathbb{R})$ 中有

$$p_{i_1}(TM/F) \cdots p_{i_k}(TM/F) = 0$$

♡

证明 取定 TM 上的 Riemann 度量 g^{TM}，并在此度量下作正交分解 $TM = F \oplus F^\perp$，自然地可以将 TM/F 与 $F^\perp$ 等价起来。

取 ∇^{TM} 为 TM 上的 Levi-Civita 联络，$g^F, g^{F^\perp}$ 为子丛上自然继承的度量，并记 TM 到 $F, F^\perp$ 上的投影为 $p, p^\perp$，则

$$\nabla^F = p\nabla^{TM}p \quad \nabla^{F^\perp} = p^\perp \nabla^{TM} p^\perp$$

可以验证 $\nabla^F, \nabla^{F^\perp}$ 为 $F, F^\perp$ 上的联络，且分别与 $g^F, g^{F^\perp}$ 相容。

故原命题转化为：存在 $\omega \in \Omega^*(M)$，使得

$$p_{i_1}(F^\perp, \nabla^{F^\perp}) \cdots p_{i_k}(F^\perp, \nabla^{F^\perp}) = d\omega$$

利用 Chern-Weil 理论，只需要找到一个 $F^\perp$ 上的新的联络 $\tilde{\nabla}^{F^\perp}$，使得

$$p_{i_1}(F^\perp, \tilde{\nabla}^{F^\perp}) \cdots p_{i_k}(F^\perp, \tilde{\nabla}^{F^\perp}) = 0$$

我们具体构造 $\tilde{\nabla}^{F^\perp}$ 如下：

对 $X \in \Gamma(TM), U \in \Gamma(F^\perp)$，若 $X \in \Gamma(F)$，定义

$$\tilde{\nabla}_X^{F^\perp} U = p^\perp[X, U]$$

若 $X \in \Gamma(F^\perp)$，定义

$$\tilde{\nabla}_X^{F^\perp} U = \nabla_X^{F^\perp} U$$

仍然可以验证 $\tilde{\nabla}^{F^\perp}$ 是一个联络，且记 $\tilde{R}^{F^\perp}$ 为之曲率。

对任意的 $X, Y \in \Gamma(F), Z \in \Gamma(F^\perp)$，则计算

$$\begin{aligned}
\tilde{R}^{F^\perp}(X,Y)Z &= \tilde{\nabla}_X^{F^\perp}\tilde{\nabla}_Y^{F^\perp} Z - \tilde{\nabla}_Y^{F^\perp}\tilde{\nabla}_X^{F^\perp} Z - \tilde{\nabla}_{[X,Y]}^{F^\perp} Z \\
&= \tilde{\nabla}_X^{F^\perp} p^\perp[Y,Z] - \tilde{\nabla}_Y^{F^\perp} p^\perp[X,Z] - p^\perp[[X,Y],Z] \\
&= p^\perp([X, p^\perp[Y,Z]] + [Y, p^\perp[Z,X]] + [Z,[X,Y]]) \\
&= p^\perp([X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]]) - p^\perp[X, p[Y,Z]] - p^\perp[Y, p[Z,X]] \\
&= 0
\end{aligned}$$

上面的计算中使用了 Jacobi 恒等式和 Frobenius 的可积性等价条件。

记 $F^\perp$ 的对偶丛为 $F^{\perp,*}$，故

$$\tilde{R}^{F^\perp} \in \Gamma(F^{\perp,*}) \wedge \Omega^*(M, \mathrm{End}(F^\perp))$$

故立即有

$$p_{i_j}(F^\perp, \tilde{\nabla}^{F^\perp}) \in \Gamma(\wedge^{2i_j}(F^{\perp,*})) \wedge \Omega^*(M)$$

则

$$p_{i_1}(F^\perp, \tilde{\nabla}^{F^\perp}) \cdots p_{i_k}(F^\perp, \tilde{\nabla}^{F^\perp}) \in \Gamma(\wedge^{2(i_1+\cdots+i_k)}(F^{\perp,*})) \wedge \Omega^*(M)$$

又由于 $\mathrm{rank}(F^\perp) = \mathrm{dim}M - \mathrm{rank}(F)$，故当 $2(i_1 + \cdots + i_k) > \mathrm{dim}M - \mathrm{rank}(F)$ 时，显然

$$p_{i_1}(F^\perp, \tilde{\nabla}^{F^\perp}) \cdots p_{i_k}(F^\perp, \tilde{\nabla}^{F^\perp}) = 0$$

故原命题得证。 $\square$

8.4 陈类与 Hermitian-Einstein 向量丛

在 n 维紧 Hermitian 流形 (M, g) 上有 r 维的 Hermitian 全纯丛 (E, h)，并在 E 上赋予陈联络 ∇，对应的曲率为 R。首先回忆我们之前定义的平均曲率 K, 它可以表示为

$$K = \sqrt{-1} \wedge_{\omega} R$$

或者

$$K\omega^n = \sqrt{-1} n R \wedge \omega^{n-1}$$

我们称 E 满足若 Einstein 条件，若 $K = \varphi I_E$，其中 φ 是 M 上的实值函数；若 φ 为常数 c，则称满足 Einstein 条件，此时称 E 为 Hermitian-Einstein 向量丛。这一节我们来建立 Hermitian-Einstein 向量丛上的关于陈类的不等式。

首先取 $(s_1, \cdots, s_r)$ 为 (E, h) 的酉基，$\theta^1, \cdots, \theta^n$ 为 $T*M$ 的一组基，使得 $\omega = \sqrt{-1}\sum \theta^\alpha \wedge \overline{\theta}^\alpha$，我们定义如下记号：

$$||R||^2 = \sum |R^i_{\alpha\overline{\beta}j}|^2$$

$$||K||^2 = \sum |K^i_j|^2 = \sum |R^i_{\alpha\overline{\alpha}j}|^2$$

$$||\rho||^2 = \sum |R^i_{\alpha\overline{\beta}i}|^2 = \sum |R_{\alpha\overline{\beta}}|^2 \quad \sigma = \sum R_{\alpha\overline{\alpha}}$$

首先需要一个计数得出的公式

Lemma 8.4

$$n(n-1)\theta^\alpha \wedge \overline{\theta}^\beta \wedge \theta^\gamma \wedge \overline{\theta}^\delta \wedge \omega^{n-2} = \begin{cases} -\omega^n & \alpha = \beta \neq \gamma = \delta \\ \omega^n & \alpha = \delta \neq \beta = \gamma \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$

下面我们来证明本节的主要不等式之一

Theorem 8.9 (Lubke)

若 (E, h) 满足若 Einstein 条件，则

$$\int_M \{(r-1)c_1(E,h)^2 - 2rc_2(E,h)\} \wedge \omega^{n-2} \leq 0$$

证明 (E, h) 满足若 Einstein 条件，则 $K_i^j = \varphi\delta_i^j$，故

$$||K||^2 = r\varphi^2, \quad \sigma = r\varphi$$

也即

$$r||K||^2 = \sigma^2$$

我们再来利用引理8.4计算第一和第二陈类：

$$\begin{aligned} c_1(E,h)^2 \wedge \omega^{n-2} &= -\frac{1}{4\pi^2}\sum \Omega_i^i \wedge \Omega_j^j \wedge \omega^{n-2} \\ &= -\frac{1}{4\pi^2}\sum R_{\alpha\overline{\beta}}R_{\gamma\overline{\delta}}\theta^\alpha \wedge \overline{\theta}^\beta \wedge \theta^\gamma \wedge \overline{\theta}^\delta \wedge \omega^{n-2} \\ &= \frac{1}{4n(n-1)\pi^2}\sum (R_{\alpha\overline{\alpha}}R_{\gamma\overline{\gamma}} - R_{\alpha\overline{\gamma}}R_{\gamma\overline{\alpha}}) \wedge \omega^n \\ &= \frac{1}{4n(n-1)\pi^2}(\sigma^2 - ||\rho||^2)\omega^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2(E,h) \wedge \omega^{n-2} &= -\frac{1}{8\pi^2}\sum \Omega_j^i \wedge \Omega_i^j \wedge \omega^{n-2} \\ &= -\frac{1}{8\pi^2}\sum R_{i\overline{j}\alpha\overline{\beta}}R_{j\overline{i}\gamma\overline{\delta}}\theta^\alpha \wedge \overline{\theta}^\beta \wedge \theta^\gamma \wedge \overline{\theta}^\delta \wedge \omega^{n-2} \\ &= \frac{1}{8n(n-1)\pi^2}\sum (R_{i\overline{j}\alpha\overline{\alpha}}R_{j\overline{i}\gamma\overline{\gamma}} - R_{i\overline{j}\alpha\overline{\gamma}}R_{j\overline{i}\gamma\overline{\alpha}}) \wedge \omega^n \\ &= \frac{1}{8n(n-1)\pi^2}(||K||^2 - ||R||^2)\omega^n \end{aligned}$$

故有

$$\{(r-1)c_1(E,h)^2 - 2rc_2(E,h)\} \wedge \omega^{n-2} = \frac{1}{4n(n-1)\pi^2}(||\rho||^2 - r||R||^2)\omega^n$$

最后只需证明 $r||R||^2 - ||\rho||^2 \geq 0$ 即可。

$$\begin{aligned}
&||R||^2 - \frac{1}{r}||\rho||^2 \\
&= \sum |R^i_{\alpha\bar{\beta}j}|^2 + \frac{1}{r}\sum |R_{\alpha\bar{\beta}}|^2 - \frac{2}{r}\sum |R_{\alpha\bar{\beta}}|^2 \\
&= \sum |R^i_{\alpha\bar{\beta}j} - \frac{1}{r}\delta^j_i R_{\alpha\bar{\beta}}|^2 \geq 0
\end{aligned}$$

故原不等式得证。 □

Corollary 8.3

(E, h) 为 n 维紧 Kähler 流形 M 上的 Hermitian 丛且满足 Einstein 条件，若 $c_1(E) = 0$，则

$$\int_M c_2(E) \wedge \omega^{n-2} \geq 0$$

且取等当且仅当 E 是平坦的。 ♡

证明 不等式的部分是上面定理的特殊情况，故只需要验证取等条件。

若取到等号，则由定理8.9的证明，可以知道有

$$R^i_{\alpha\bar{\beta}j} = \frac{1}{r}\delta^i_j R_{\alpha\bar{\beta}}$$

又 h 满足 Einstein 条件，故立即有

$$\sigma = rc$$

为常数　　又由于

$$\sqrt{-1}nR \wedge \omega^{n-1} = K\omega^n = cI_E\omega^n$$

两边取迹即有

$$\sqrt{-1}n\mathrm{tr}R \wedge \omega^{n-1} = rc\omega^n = \sigma\omega^n$$

又由于 $c_1(E) = 0$，故

$$c\int_M \sigma\omega^n = 0$$

故 $\sigma = 0$。又利用 Lubke 不等式证明中用到的恒等式

$$0 = c_1(E)^2 \wedge \omega^{n-2} = \frac{1}{4n(n-1)\pi^2}(\sigma^2 - ||\rho||^2)\omega^n$$

故 $\rho = 0$，则 $R = 0$，故 E 是平坦的。 □

Corollary 8.4

对紧 *Kähler* 流形 M，若 $c_1(M) = c_2(M) = 0$，则 M 是平坦的。

对于切丛的情形，如下的不等式比先前的 Lubke 更强：

Theorem 8.10 (Chen-Ogiue)

(M, g) 为 n 维紧 *Kähler-Einstein* 流形，则

$$\int_M \{nc_1(M)^2 - 2(n+1)c_2(M)\} \wedge \omega^{n-2} \leq 0$$

证明 在切丛的情形下，$E = TM, h = g$，且有

$$R_{i\bar{j}k\bar{l}} = R_{k\bar{l}i\bar{j}}$$

故有

$$K_{i\bar{j}} = R_{i\bar{j}}$$

特别地

$$||K||^2 = ||\rho||^2$$

则

$$(n+1)||R||^2 - 2||K||^2 = (n+1)||R||^2 - \frac{2}{n}\sigma^2$$

又由于 M 满足 Einstein 条件，故

$$K_i^j = \frac{\sigma}{n}\delta_i^j \quad \sigma^2 = n||K||^2$$

故回代到 Lubke 不等式的证明中关于第一。第二陈类的计算式中有：

$$c_1(M)^2 \wedge \omega^{n-2} = \frac{1}{4n\pi^2}||K||^2\omega^n$$

$$c_2(M) \wedge \omega^{n-2} = \frac{1}{8n(n-1)\pi^2}((n-2)||K||^2 + ||R||^2)\omega^n$$

则直接计算即有

$$\{nc_1(M)^2 - 2(n+1)c_2(M)\} \wedge \omega^{n-2} = \frac{1}{4n(n-1)\pi^2}(\frac{2}{n}\sigma^2 - (n+1)||R||^2)\omega^n$$

注意到

$$||R||^2 - \frac{2}{n(n+1)}\sigma^2 = ||T||^2 \geq 0$$

其中 $T_{i\bar{j}k\bar{l}} = R_{i\bar{j}k\bar{l}} - \frac{1}{n(n+1)}(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk})\sigma$。故原不等式得证。 $\square$

Chapter 9 其他示性类及应用

9.1 其他示性类

对于流形的切丛，有许多具有特殊意义的示性类，本节中予以简单介绍。

一、L 类：

考虑函数

$$L(x) = \frac{x}{\tanh(\mathrm{x})}$$

故我们可以定义关于联络 ∇^{TM} 的 **L-形式**为

$$L(TM, \nabla^{TM}) = \det\left(\left(\frac{\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R^{TM}}{\tanh(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R^{TM})}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \in \Omega^*(M)$$

特别地，当 M 为四维流形时，

$$\{L(TM, \nabla^{TM})\}^{(4)} = \frac{1}{3}p_1(TM, \nabla^{TM})$$

由 Chern-Weil 理论，可以得到与联络选取无关的 de Rham 上同调类 $L(TM)$，并且有如下定义的

$$L(M) = \langle L(TM), [M] \rangle = \int_M L(TM, \nabla^{TM})$$

被称为流形 M 的 **L-亏格**。

L 类与流形的符号差有紧密的联系，符号差的概念如下：

设 M 为 $4m$ 维的定向闭 Riemann 流形，则我们有如下二次型：

$$B : H^{2m}_{dR}(M;\mathbb{R}) \times H^{2m}_{dR}(M;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

$$([\omega],[\omega']) \mapsto \int_M \omega \wedge \omega'$$

则定义 M 的符号差 为该二次型的符号差，记为 $\mathrm{Sign}(M)$。

Hirzeburch 证明了如下的定理：

Theorem 9.1 (Hirzebruch 符号差定理)

M 为一个 $4m$ 维定向闭流形，则有

$$\mathrm{Sign}(M) = L(M)$$

该定理的证明这里省略。它告诉了我们对于定向闭流形，其 L-亏格是整数，这是一个非常不平凡的结论。

与之相似地还有如下的 $\hat{L}$ 形式：

$$\hat{L}(TM,\nabla^{TM}) = \det\left(\left(\frac{\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R^{TM}}{\tanh(\frac{\sqrt{-1}}{4\pi}R^{TM})}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \in \Omega^*(M)$$

再次由 Chern-Weil 理论，它给出了一个与切丛上联络无关的上同调类 $\hat{L}(TM)$，称为流形 M 的 $\hat{L}$ 类。

二、 $\hat{A}$ 类

联系于如下函数：

$$\hat{A}(x) = \frac{\frac{x}{2}}{\sinh(\frac{x}{2})}$$

可以定义关于联络 ∇^{TM} 的 $\hat{A}$ 形式

$$\hat{A}(TM,\nabla^{TM}) = \det\left(\left(\frac{\frac{\sqrt{-1}}{4\pi}R^{TM}}{\sinh(\frac{\sqrt{-1}}{4\pi}R^{TM})}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \in \Omega^*(M)$$

并可以得到对应的与联络无关的 de Rham 上同调类 $\hat{A}(TM)$。当 M 为四维流形的时候，可以验证

$$\{\hat{A}(TM,\nabla^{TM})\}^{(4)}=-\frac{1}{24}p_1(TM,\nabla^{TM})$$

当 M 是定向闭流形的时候，则可以定义 $\hat{A}$-亏格为

$$\hat{A}(M)=\langle\hat{A}(TM),[M]\rangle=\int_M\hat{A}(TM,\nabla^{TM})$$

故 M 为四维定向闭流形时有

$$L(M)=-8\hat{A}(M)$$

关于 $\hat{A}$-亏格也有如下的整性定理

Theorem 9.2 (Borel,Atiyah,Hirzebruch)

若 M 是闭的自旋流形（关于自旋流形的定义可以参考最后一节），则有

$$\hat{A}(M)\in\mathbb{Z}$$

若此外还有 $\dim(M)$ 模 8 余 4，则 $\hat{A}(M)$ 为偶数。

结合上面的式子有

Corollary 9.1 (Rokhlin)

四维光滑闭自旋流形的符号差为 16 的倍数。

三、Todd 类

联系于函数

$$\mathrm{Td}(x)=\frac{x}{1-e^{-x}}$$

同上定义关于联络 ∇^{TM} 的 Td-形式为

$$\mathrm{Td}(M,\nabla TM)=\det\Big(\frac{\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R^{TM}}{1-\exp(-\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R^{TM})}\Big)\in\Omega^*(M)$$

并有对应的与联络选取无关的上同调类 $\mathrm{Td}(TM)$。

M 为闭流形时，定义 Td-亏格如下：

$$\mathrm{Td}(M)=\langle\mathrm{Td}(TM),[M]\rangle=\int_M\mathrm{Td}(TM,\nabla^{TM})$$

关于 Todd 类有如下的 Riemann-Roch 公式：

Theorem 9.3 (Riemann-Roch)

E 为紧复流形 M 上的全纯丛，定义丛的欧拉示性数

$$\chi(M,E)=\sum(-1)^i\mathrm{dim}H^i(M,E)$$

则有

$$\chi(M,E)=\int_M td(M)ch(E)$$

9.2 Kervaire 半示性数

首先给出 Kervaire 半示性数的概念。

Definition 9.1

M 为 $4q+1$ 维的定向光滑闭流形，则定义 M 的***Kervaire* 半示性数**$k(M)\in\mathbb{Z}_2$ 为

$$k(M)\equiv\sum_{k=0}^{2q}\dim H_{dR}^{2i}(M;\mathbb{R})\mod 2$$

关于 Kervaire 半示性数有如下的 Atiyah 消灭定理：

Theorem 9.4 (Atiyah)

若 $4q+1$ 维定向闭流形上有两个线性无关的向量场，则 $k(M)=0$。

这一节的剩下部分我们来证明该定理。

取定 M 上的 Riemann 度量 g^{TM}，并取定向标准正交基 $e_1,\cdots,e_{4q+1}$，回忆我们之前定义的 Clifford 记号，我们定义如下的符号差算子：

Definition 9.2

令 M 上的算子 D_{Sig} 为**符号差算子**，定义为：

$$D_{\mathrm{Sig}}=\hat{c}(e_1)\cdots\hat{c}(e_{4q+1})(d+d^*):\Omega^{even}(M)\to\Omega^{even}(M)$$

可以验证 D_{Sig} 是一个一阶椭圆微分算子，且是反自伴的：对任意 $s,s'\in\Omega^{even}(M)$，有

$$\langle D_{\mathrm{Sig}}s,s'\rangle=-\langle s,D_{\mathrm{Sig}}s'\rangle$$

下面的一步将 $k(M)$ 进行了关键的转化：

Proposition 9.1

$$\dim(\ker(D_{\mathrm{Sig}}))=\sum_{k=0}^{2q}\dim H_{dR}^{2i}(M;\mathbb{R})$$

证明 首先由 Hodge 定理，有

$$\dim(\ker(\triangle|_{\Omega^k(M)})) = \dim(\mathcal{H}^k(M)) = \dim(H^k_{dR}(M;\mathbb{R}))$$

又由于 $\triangle\omega = 0$ 当且仅当 $d\omega = d^*\omega = 0$，故有

$$\ker(\triangle) = \ker(d + d^*)$$

故

$$\begin{aligned}\dim(\ker(D_{\text{Sig}})) &= \dim(\ker(d + d^*)) \\ &= \dim(\ker(\triangle)) = \sum_{k=0}^{2q} \dim H^{2i}_{dR}(M;\mathbb{R})\end{aligned}$$

故得证。 □

Corollary 9.2

对反自伴椭圆微分算子 D，定义模 2 指标

$$\text{ind}_2(D) \equiv \dim(\ker(D)) \mod 2$$

则

$$k(M) = \text{ind}_2(D_{\text{Sig}})$$

对于反自伴椭圆算子，其模 2 指标为形变不变量，下面我们利用这一性质来将 D_{Sig} 的指标进行转化。

回到 Atiyah 消灭定理，由条件，存在 $V_1, V_2 \in \Gamma(TM)$ 为 M 上的两个光滑向量场，且处处线性无关。我们取 Riemann 度量 g^{TM} 使得 V_1, V_2 处处正交且为单位长度的，则定义如下的椭圆算子

$$D' = \frac{1}{2}(D_{\text{Sig}} + \hat{c}(V_1)\hat{c}(V_2)D_{\text{Sig}}\hat{c}(V_2)\hat{c}(V_1))$$

为了进一步化简 D'，我们需要如下命题：

Proposition 9.2

M 为 n 维流形并赋予 *Levi-Civita* 联络，TM 上取定标准正交基 $e_1, \cdots, e_n$，对偶基为 $e^1, \cdot, e^n$，则

$$d = \sum_{i=1}^{n} e^i \wedge \nabla_{e_i}^{\wedge^*(T^*M)} : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$$

$$d^* = -\sum_{i=1}^{n} i_{e_i} \nabla_{e_i}^{\wedge^*(T^*M)} : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$$

证明　可以验证两个等式的右边实际上是独立于坐标的选取的，故我们可以取 $e_1, \cdots, e_n$ 为局部正则坐标对应的切向量，即 $e_i = \partial_i$，则对偶基 $e^i = dx^i$。

对任意的 i, j, k，由于

$$(\nabla_{\partial_i}^{\wedge^*(T^*M)} dx^j)(\partial_k) = \nabla_{\partial_i}(dx^j(\partial_k)) - dx^j(\nabla_{\partial_i}\partial_j) = 0$$

故 $\nabla_{\partial_i}^{\wedge^*(T^*M)} dx^j = 0$。

定义

$$\overline{d} = \sum_{i=1}^{n} e^i \wedge \nabla_{e_i}^{\wedge^*(T^*M)} = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge \nabla_{\partial_i}^{\wedge^*(T^*M)}$$

则对

$$\eta = f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

有

$$\overline{d}\eta = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = d\eta$$

故 $d = \overline{d}$。

类似地定义

$$\overline{d^*} = -\sum_{j=1}^{n} i_{\partial_j} \nabla_{\partial_j}$$

则

$$\overline{d^*}\eta = -\sum_j (-1)^{j-1}(\partial_{i_j} f)dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{dx^{i_j}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = d\eta$$

故 $\overline{d^*} = d^*$。 □

故可以重新书写 D_{Sig} 和 D' 如下：

$$D_{\text{Sig}} = \hat{c}(e_1)\cdots\hat{c}(e_{4q+1})\sum_{i=1}^{4q+1} c(e_i)\nabla_{e_i}^{\wedge^*(T*M)}$$

故结合引理6.4有

$$D' = D_{\text{Sig}} + \frac{1}{2}\hat{c}(e_1)\cdots\hat{c}(e_{4q+1})\sum_{i=1}^{4q+1} c(e_i)\hat{c}(V_1)\hat{c}(\nabla_{e_i}V_1) + \frac{1}{2}\hat{c}(e_1)\cdots\hat{c}(e_{4q+1})\sum_{i=1}^{4q+1} c(e_i)\hat{c}(V_1)\hat{c}(V_2)\hat{c}(\nabla_{e_i}V_2)\hat{c}(V_1)$$

仍然可以验证 D' 是一个反自伴一阶椭圆微分算子，定义

$$D(u) = (1-u)D_{\text{Sig}} + uD'$$

可以验证 $D(u)$ 也是反自伴椭圆算子，故由反自伴算子的模 2 指标不变性，有

$$\text{ind}_2(D_{\text{Sig}}) = \text{ind}_2(D')$$

再回忆 D' 的定义

$$D' = \frac{1}{2}(D_{\text{Sig}} + \hat{c}(V_1)\hat{c}(V_2)D_{\text{Sig}}\hat{c}(V_2)\hat{c}(V_1))$$

故直接计算有

$$\begin{aligned}
&\hat{c}(V_1)\hat{c}(V_2)D_{\text{Sig}} \\
&= \frac{1}{2}\hat{c}(V_1)\hat{c}(V_2)D_{\text{Sig}} + \frac{1}{2}\hat{c}(V_1)\hat{c}(V_2)\hat{c}(V_1)\hat{c}(V_2)D_{\text{Sig}}\hat{c}(V_2)\hat{c}(V_1) \\
&= D_{\text{Sig}}\hat{c}(V_1)\hat{c}(V_2)
\end{aligned}$$

则 $\hat{c}(V_1)\hat{c}(V_2)$ 与 D' 可交换，则 $\hat{c}(V_1)\hat{c}(V_2)$ 保持 $\ker(D')$。此外由于 V_1, V_2 的约束条件，有

$$(\hat{c}(V_1)\hat{c}(V_2))^2 = -1$$

也就是说 $\hat{c}(V_1)\hat{c}(V_2)$ 给出了 $\ker(D')$ 上的复结构，故

$$\dim(\ker(D')) \equiv 0 \mod 2$$

故由引理9.2

$$k(M) = \mathrm{ind}_2(D_{\mathrm{Sig}}) = \mathrm{ind}_2(D') = \dim(\ker(D')) = 0$$

则 Atiyah 消灭定理得证。

9.3 Atiyah-Singer 指标定理

为了叙述 Atiyah-Singer 定理，我们首先要定义自旋流形，它在之前的讨论中也出现过。此外我们还要定义旋量丛的概念。

Definition 9.3

一个定向闭流形 M 被称为<u>自旋流形</u>，若其第二 *Stiefel-Whitney* 类为 $\omega_2(M)=0$。♣

对 $m=2n$ 维自旋流形 M，回忆我们在命题4.7中定义了 M 的定向标架丛 $\mathcal{F}(M)$，我们还可以如下定义配丛：

$$\mathcal{F}(M)\times_{\sim}\mathbb{R}^m=\{(\sigma,y):\sigma\in\mathcal{F}(M),y\in\mathbb{R}^m\}/\sim$$

其中

$$(\sigma,y)\sim(\sigma\cdot A,A^{-1}y)\quad A\in SO(m)$$

不难看出同构

$$\mathcal{F}(M)\times_{\sim}\mathbb{R}^m\simeq TM$$

再对 M 上的 Clifford 代数丛，记 C_m 为 $\mathbb{R}^m$ 生成的 Clifford 代数，则同样可以定义

$$\mathcal{F}(M)\times_{\sim}C_m=\{(\sigma,a):\sigma\in\mathcal{F}(M),y\in C_m\}/\sim$$

其中

$$(\sigma,a)\sim(\sigma\cdot A,A^{-1}a)\quad A\in SO(m)$$

同样有同构

$$\mathcal{F}(M)\times_{\sim}C_m\simeq C(TM)$$

由命题4.7，可以将 $SO(m)$-主丛 $\mathcal{F}(M)$ 提升为 Spin(m)-主丛

$$\tilde{\pi}: P_{\mathrm{Spin}(m)}(M) \to M$$

和光滑的二重覆叠

$$\tilde{\rho}: P_{\mathrm{Spin}(m)}(M) \to \mathcal{F}(M)$$

为了定义该 Spin(m)-主丛的配丛我们需要定义旋表示和旋量空间

Theorem 9.5

V 为 $2n$ 维欧氏空间，则存在唯一的 2^n 维复向量空间 S 和同构

$$c: C(V) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathrm{End}(S)$$

称 S 为旋量空间，c 在 Spin(V) 上的限制

$$c|_{\mathrm{Spin}(V)}: \mathrm{Spin}(V) \to GL(S)$$

被称为旋表示。

此外，对 V 的定向单位正交基 $(e_1, \cdots, e_{2n})$，映射

$$\tau = (\sqrt{-1})^n c(e_1) \cdots c(e_{2n})$$

不依赖于基的选取，且给出了 S 上的超结构。同时，对任意的 $v \in V$，$c(v)$ 改变 S 中元素的分次。

则可以定义配丛如下：

$$S(TM) = P_{\mathrm{Spin}(2n)}(M) \times_\lambda S = \{(\tilde{\sigma}, s) : \tilde{\sigma} \in P_{\mathrm{Spin}(2n)}(M), s \in S\} / \sim_\lambda$$

其中

$$(\tilde{\sigma}, s) \sim_\lambda (\tilde{\sigma} \cdot g, \lambda(g^{-1})s) \quad g \in \mathrm{Spin}(2n)$$

我们称 $S(TM) \to M$ 为 M 上的**旋量丛**。

S 上存在 Spin(m)-不变 Hermitian 度量 h^S，它可以自然提升到 $S(TM)$ 上：

$$h^{S(TM)}([\tilde{\sigma}, s_1], [\tilde{\sigma}, s_2]) = h^S(s_1, s_2)$$

同时 $S(TM)$ 上继承了 S 的超结构，分次为 $S_\pm(TM)$，且关于 $h^{S(TM)}$ 正交，又由于 c 的作用改变分次，故有

$$c(X) : \Gamma(S_\pm(TM)) \to \Gamma(S_\mp(TM)) \quad \forall X \in \Gamma(TM)$$

再对于 TM 上的 Levi-Civita 联络 ∇^{TM}，对于 $\mathcal{F}(M)$ 的任意光滑截面 $\sigma = \{e_1, \cdots, e_m\}$，可以用联络形式表示：

$$\nabla^{TM}\sigma = \sigma A_\sigma$$

又由 6.2 节中的计算, 对 $\sigma = \sigma' \cdot a$，有

$$A_\sigma = a^{-1}A_{\sigma'}a + a^{-1}da$$

我们称满足上面的过渡公式的所有 (σ, A_σ) 的集合 ω 称为 $\mathcal{F}(M)$ 上的联络，再自然地提升为 $P_{\text{Spin}(m)}$ 上的联络 $\tilde{\omega} = \{(\tilde{\sigma}, \tilde{A}_{\tilde{\sigma}})\}$。则我们可以定义旋量丛上的联络如下：

$\forall s \in \Gamma(S(TM))$，$s$ 可以局部表示为 $s = [\tilde{\sigma}, f]$，则可以定义

$$\nabla^{S(TM)}s = \nabla^{S(TM)}[\tilde{\sigma}, f] = [\tilde{\sigma}, (d + \tilde{A}_{\tilde{\sigma}})f]$$

现在对任意 M 上的 Hermitian 向量丛 E，带有与度量相容联络 ∇^E。定义 $S(TM) \otimes E$ 为 M 上的**扭化旋量丛**，自然有联络

$$\nabla^{S(TM)\otimes E} = \nabla^{S(TM)} \otimes I_E + I_{S(TM)} \otimes \nabla^E$$

可以验证该联络保持 $S(TM)\otimes E$ 中的 $\mathbb{Z}_2$ 分次。　　则我们可以定义如下算子：

$$D^E=\sum_{i=1}^m c(e_i)\nabla_{e_i}^{S(TM)\otimes E}:\Gamma(S(TM)\otimes E)\to\Gamma(S(TM)\otimes E)$$

这是一个不依赖于正交基选取的自伴椭圆微分算子，被称为**扭化 Dirac 算子**，则由 c 的作用改变分次可知

$$D^E:\Gamma(S_\pm(TM)\otimes E)\to\Gamma(S_\mp(TM)\otimes E)$$

则记

$$D_\pm^E=D^E|_{\Gamma(S_\pm(TM)\otimes E)}:\Gamma(S_\pm(TM)\otimes E)\to\Gamma(S_\mp(TM)\otimes E)$$

则 D_+^E 也是自伴的，故我们叙述 Atiyah-Singer 定理叙述如下：

Theorem 9.6 (Atiyah-Singer 指标定理)

若 M 为偶数维定向的闭自旋流形，E 为 M 上的 *Hermitian* 丛，则

$$\mathrm{ind}(D_+^E)=\int_M \hat{A}(TM)ch(E)$$

其中 ind 定义为

$$\mathrm{ind}(D_+^E)=\dim(\ker D_+^E)-\dim(\ker(D_+^E)^*)$$

♡

这是一个非常强的定理，前面所述的 Gauss-Bonnet-Chern 定理、Hirzebruch 符号差定理和 Riemann-Roch 定理均可以视为它的特殊情况。它的证明有多种方法，与数学乃至物理的很多分支相关：包括 K-理论、热核理论和超对称理论等。关于 Atiyah-Singer 定理的热核理论证明、它的应用（推导 G-B-C 定理、符号差定理等），可以参考如下南洋理工大学的微分几何讲义。

最后我们来叙述如下终极版本的 Atiyah-Singer 指标定理

Theorem 9.7 (Atiyah-Singer，一般表述)

对闭定向流形上的椭圆微分算子，其解析指标等于拓扑指标。

♡