# 数分B1 习题课 #1

吕长乐 lyuchangle2006.github.io/TeachingAssistant

2024.9.22 at USTC 5201

## 一 课程总览

数学分析 = 高等数学 + "?"

||

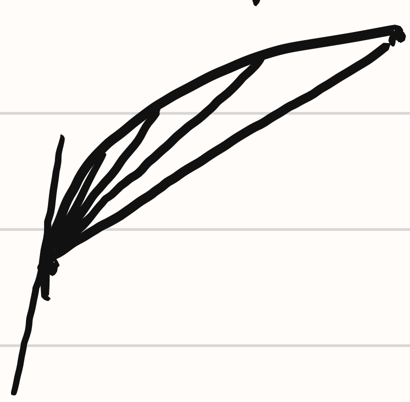
Mathematical Analysis

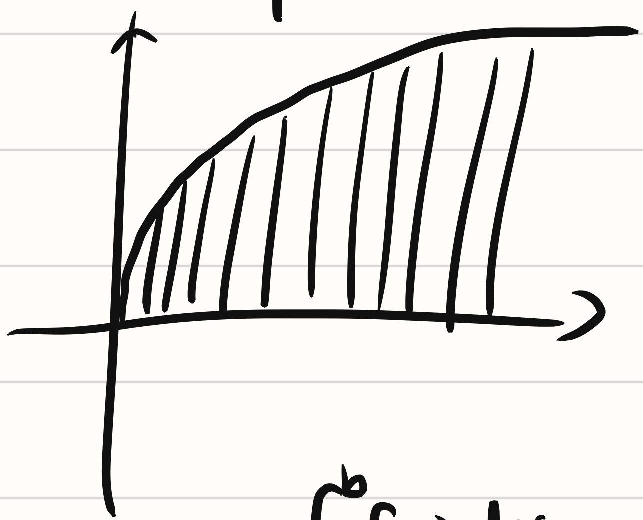
SS

微积分

微分 积分

Differential Integrate





$f'(x)$ $\int_a^b f(x)\,dx$

差商的极限 面积的极限

分析 是极限的艺术

## 数分B1（单变量微积分）

$$\begin{tikzcd}
\text{极限} \arrow[r] & \text{连续} \arrow[r] & \text{求导} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
& \text{积分} \arrow[dr, "\text{应用}"] & & \text{无穷级数} \arrow[dl] \\
& & \text{常微分方程} &
\end{tikzcd}$$

## 数分B2（多变量微积分）

$$\begin{tikzcd}
\text{多元极限} \arrow[r] & \text{多元连续/求导} \arrow[r] & \text{多元积分} \arrow[d, "\text{应用}"] \\
& & \text{含参积分理论} \\
& & \text{Fourier级数}
\end{tikzcd}$$

## 数分B3（补坑与延伸）

实数体系、R到一般度量空间的拓扑、多元函数的进一步研究、

函数的收敛理论、Riemann积分理论

各种计算、各种证明

## 二. 本课程的学习

数学理论的发展：

定义 $\xleftarrow{\text{严格化}}$ 直观

定义 → 直观

定义 → 性质 → 定理 → 应用

直观 → 性质

直观 → 应用

应用 $\begin{cases}\text{计算} \\ \text{证明}\end{cases}$

计算 → 证明

练习 总结 思考

↑

(敏锐的)直观 + (熟练的)严格的数学推导

(敏锐的)直观 $\xleftarrow{\text{来源于}}$ 充分的例子与积累

(熟练的)严格的数学推导 $\xleftarrow{\text{来源于}}$ 对定义 定理的精确理解

直观：数学对象的性态？

应该使用什么方法/命题/结论？大致怎么使用？

递进式要求：

① 定义与基本方法要精确掌握 解决基础问题

② 熟悉有关定理/命题 做到综合运用

③ 积累充分的例子与方法，培养数学直观

④ 熟练地将思路写为严谨数学语言

⑤ 通过观察新问题 发掘新方法

资料

- 讲义 课本 $\begin{cases}\text{基本概念} \\ \text{例题 习题}\end{cases}$ → 巩固
- 习题课讲义：归纳总结
- 参考习题集（段雅丽 谢惠民 往年试题…）：提升熟练度 见识题型

三 课程前两周知识回顾

基本定义：数集的上/下(确)界

数列的极限 ( $\lim_{n\to+\infty} a_n = a / \infty / \pm\infty \cdots$ )

函数的极限（一点处极限 无穷处极限 左右极限）

基本命题：数列极限的性质（四则运算 保序保号性）

单调有界 → 收敛

夹逼准则

实数完备性定理（重点：收敛 ⟺ Cauchy列）

Stolz定理 ( $\frac{*}{\infty}, \frac{0}{0}$ )

函数极限的性质

基本例子：

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \ (a>0)$ $\qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0 \ (\alpha>0)$

$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0 \ (|q|<1)$

$\lim_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e = \lim_{x\to+\infty} (1+\frac{1}{x})^x$

$\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} - \ln n = \gamma$

$\lim_{n\to\infty} a_n = a \geq 0 \longrightarrow \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} = a \\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1\cdots a_n} = a \end{cases}$

$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a \qquad \lim_{x\to0} \frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha$

$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n+\cdots a_n}{b_0x^m+\cdots b_m} = \begin{cases} 0 & m>n \\ \frac{a_0}{b_0} & m=n \ (b_0\neq0) \\ \infty & m<n \end{cases}$

# 四. 作业讲解与补充题

## (I) 算具体的极限

### ①估阶 放缩配合夹逼

1. (Ex 1.2.1(4)) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n}=0$

pf.

法一(放缩) $0\le\left|\frac{n!}{n^n}\right| = \frac{1\cdot 2\cdots n}{n\cdot n\cdots n}<\frac{1}{n}$ $\left(\frac{2\cdots n}{n\cdots n}<1\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty}0=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$

夹逼即可

法二(利用结论) 第三讲中证明了 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$

故 $\exists N>0$ s.t. $\forall n>N$ $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\le\frac{2}{e}$

又 $\forall n\ge 2$ $\frac{n!}{n^n}<1 \Rightarrow \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}<1 \Rightarrow M=\max\limits_{2\le k\le N}\frac{\sqrt[k]{k!}}{k}$

再令 $q=\max\{\frac{2}{e},M\}<1$. 故 $\forall n\ge 2$. $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\le q\Rightarrow \frac{n!}{n^n}\le q^{n-1}$

由夹逼即得 #

注: Stirling公式: $n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

2. (Ex 1.2.15(1)) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\frac{1}{(2n)^2}=0$

pf ① $\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\frac{1}{(2n)^2}\le\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n}{(n+1)^2}\le\frac{1}{n}$

② $\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\frac{1}{(2n)^2}\le\frac{1}{n(n+1)}+\cdots\frac{1}{(2n-1)2n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$

$=\frac{1}{2n}$

夹逼 #

注: 方法②(裂项)可证明 Chap 1 T3(1) 即 $\lim\limits_{n\to+\infty}1+\frac{1}{2^2}+\cdots\frac{1}{n^2}$ 存在

事实上 利用 Fourier 级数可证明上述极限为 $\frac{\pi^2}{6}$

3.(Ex 1.2.15(4)) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^2-n+2}$

直观：$n\to+\infty$时 $n^2-n+2\sim n^2$ 上下用$n^2$ $n$控制即可

pf $n\geq 2$时 $n\leq n^2-n+2$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$ 故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^2}=(\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n})^2=1$ 夹逼即可 #

② 迭代型

4.(Ex 1.2.8(5)) $a_n=(1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^{2^n})$ $(|q|<1)$ 求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

pf. 其实$a_n$可以直接写出 观察可知用平方差公式可化简

$(1-q)a_n=(1-q^2)(1+q^2)\cdots(1+q^{2^n})=1-q^{2^{n+1}}\Rightarrow a_n=\frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q}$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{1-q}\lim\limits_{n\to\infty}1-q^{2^{n+1}}=\frac{1}{1-q}$ #

注 Ex 1.2.15(3) / 2.17(1) Chap1 T3(2) 类似

5 (Ex 1.2.18(3)) $a>0$ $a_0>0$ $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{a}{a_n})$

观察：这种迭代型递推数列 型如 $a_{n+1}=f(a_n)$

如果有极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 则 $a=\lim\limits_{n\to+\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}f(a_n)$

$\overset{?}{=}f(\lim\limits_{n\to+\infty}a_n)=f(a)$

?: $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)$是否等于$f(\lim\limits_{n\to\infty}a_n)$?

第二章我们将证明对连续函数$f$这成立 但目前除了多项式的情形 我们并不能直接说这成立

pf. 法一：由上面的观察 $f(x)=\frac{1}{2}(x+\frac{a}{x})$ $f(x)=x\Rightarrow x=\pm\sqrt{a}$

又$a_n>0$ 故猜测 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{a}$

$a_{n+1}-\sqrt{a}=\frac{1}{2}(\sqrt{a_n}-\sqrt{\frac{a}{a_n}})^2=\frac{1}{2}\frac{(a_n-\sqrt{a})^2}{a_n}\Rightarrow\left|\frac{a_{n+1}-\sqrt{a}}{a_n-\sqrt{a}}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{a_n-\sqrt{a}}{a_n}\right|$

又$f(x)\geq\sqrt{a}\Rightarrow a_n\geq\sqrt{a}$ $(\forall n\geq 1)$ 故 $\left|\frac{a_{n+1}-\sqrt{a}}{a_n-\sqrt{a}}\right|\leq\frac{1}{2}$

即 $|a_n-\sqrt{a}| \le |a_0-\sqrt{a}|\left(\frac{1}{2}\right)^n$

由夹逼即得 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n-\sqrt{a}|=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n=\sqrt{a}$

法二：先讨论 $a_n$ 的单调性.

$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a_n}-a_n\right) = \frac{a-a_n^2}{2a_n}$ 又 $a_n \ge \sqrt{a}\,(n\ge 1) \Rightarrow a_{n+1}\le a_n$

$\{a_n\}$ 单减 $(n\ge 1)$ 且 $0\le a_n \le a_1$ $(\forall n\ge 1)$

故 $\{a_n\}$ 单调有界 $\Rightarrow$ 有极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=b\ge 0$

则 $b=\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a}{a_n}\right)=\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{a_n}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(b+\frac{a}{b}\right)$

结合 $b\ge 0$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=b=\sqrt{a}$ #

6. (Ex 1.2.18(5)) $a_n=\sin\sin\cdots\sin 1 = \sin a_{n-1}$.

Pf 首先有 $a_n>0$. 则由 $\forall x>0$. $x>\sin x$ 有

$a_n-a_{n-1}=\sin a_{n-1}-a_{n-1}<0 \Rightarrow a_n$ 单减

又 $0<a_n<\sin 1$ 故 $a_n$ 有界 $\Rightarrow$ 存在 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a\ge 0$

则 $a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sin a_{n-1}$ (*)

(事实上 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin a_{n-1} = \sin\lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1}=\sin a \Rightarrow a=0$. 但目前我们无法直接使用这个结论)

$|\sin a_n-\sin a| = 2\left|\cos\frac{a_n+a}{2}\right|\left|\sin\frac{a_n-a}{2}\right| \le 2\sin\left|\frac{a_n-a}{2}\right| \le |a_n-a| \to 0$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin a_{n-1}=\sin a \Rightarrow a=\sin a$. 故 $a=0$

#

③ 关于 $e$

命题 $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^{-n}=e$

pf $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^{-n}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n-1})^{n}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}(1+\frac{1}{n-1})$

$=e\cdot 1=e$ #

7.(Ex 1.2.22)

(2) $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n-2})^{n+1}$ (3) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1+n}{2+n})^{n}$

(4) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^3})^{2n^3}$

pf (2) $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n-2})^{n-2}\overset{\text{命题}}{=}\frac{1}{e}$

$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n-2})^{3}=1^3=1$

故 $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n-2})^{n+1}=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n-2})^{n-2}\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n-2})^{3}=\frac{1}{e}$.

(3) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1+n}{2+n})^{n}=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+2})^{n}$

$=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+2})^{n+2}\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+2})^{-2}$

$=\frac{1}{e}$

(4) 由 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}=e$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists N_0$ s.t $\forall n>N_0$ $|(1+\frac{1}{n})^{n}-e|<\varepsilon$

则取 $N=\lceil\sqrt[3]{N_0}\rceil$ (向上取整) 则 $\forall n>N$ $|(1+\frac{1}{n^3})^{n^3}-e|<\varepsilon$

$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^3})^{n^3}=e$

$\Rightarrow(\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^3})^{n^3})^2=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^3})^{2n^3}=e^2$. #

## (II) 抽象数列极限问题

①

1.(Ex 1.2.2) 若 $\forall \varepsilon>0$ $\exists N$ s.t $\forall n>N$ $|a_n-a|<M\varepsilon$ (M常数)

(强调逻辑!) 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$.

pf. $\forall \varepsilon>0$. 将 $\frac{\varepsilon}{M}$ 代入条件 则 $\exists N$ s.t. $\forall n>N$ $|a_n-a|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ #.

注: 今后. 只要对某个M (必须要是常数!!!) 证明了题干的条件

则可直接说 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$.

2.(Ex 1.2 5) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$. 又 $|b_n|\le M$ $(n=1,2\cdots)$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n=0$.

pf. $\forall \varepsilon>0$ 则 $\exists N$ s.t. $\forall n>N$. $|a_n|<\varepsilon$.

故 $\forall n>N$ $|a_nb_n-0|=|a_nb_n|\le|a_n||b_n|<M\varepsilon$.

由上面的讨论 $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n=0$ #.

3 (Ex. 1.2 23) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ $|b_n|\ge b>0$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n=\infty$

pf. 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ $\forall M>0$ $\exists N$ s.t. $\forall n>N$. $|a_n|>M$ (*)

则 $\forall M>0$. 将 $\frac{M}{b}$ 代入(*) $\exists N$ s.t. $\forall n>N$. $|a_n|>\frac{M}{b}$

则 $|a_nb_n|\ge|a_n||b_n|>\frac{M}{b}\cdot b=M \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n=\infty$ #

注: ① 对于证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ 书上没有所谓的"夹逼"和"比较定理"

尽量还是使用定义证明

② 即使你要比较 也不能在本题中出现 "$a_nb_n\ge ba_n$

又 $a_n\to\infty$ 故 $a_nb_n\to\infty$"的表述. 因为 $a_n\to\infty$ 不是 "$+\infty$"!

要注意符号问题! ($\to\infty$. $+\infty$. $-\infty$ 的区别)

4. (Ex 1.2.14) $a_n\to a, b_n\to b$. $c_n=\max\{a_n,b_n\}$ $d_n=\min\{a_n,b_n\}$

证: $\lim_{n\to\infty}c_n=\max\{a,b\}$ $\lim_{n\to\infty}d_n=\min\{a,b\}$

Pf. 法一. $\max\{x,y\}=\frac{x+y}{2}+\frac{|x-y|}{2}$ $\min\{x,y\}=\frac{x+y}{2}-\frac{|x-y|}{2}$

故 $\lim_{n\to\infty}\max\{a_n,b_n\}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)+\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}|a_n-b_n|$

"不妨设"? $=\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}|a-b|=\max\{a,b\}$ 另一边同理

法二 ①若 $a>b$. 则由 Ex 1.2.13. $\exists N$ s.t. $\forall n>N$ $a_n\geq b_n$

则 $c_n=a_n$. $d_n=b_n$ $(n\geq N)$ 由前有限项不改变极限.

$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}a_n=a=\max\{a,b\}$ $\lim_{n\to\infty}d_n=\lim_{n\to\infty}b_n=b=\min\{a,b\}$

② 若 $a<b$. 由对称性. 同①

很多人没讨论 ③若 $a=b$ 由定义 $\forall\varepsilon>0$. $\exists N_1,N_2$ s.t

$\forall n>N_1$ $|a_n-a|<\varepsilon$ $\forall n>N_2$ $|b_n-a|<\varepsilon$.

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$. 则 $\forall\varepsilon>0$. $|a_n-a|<\varepsilon$ 且 $|b_n-a|<\varepsilon$

又 $|c_n-a|$ 和 $|d_n-a|$ 均分别等于 $|a_n-a|$ 和 $|b_n-a|$ 其中一个.

故 $\forall n>N$ $|c_n-a|<\varepsilon$. $|d_n-a|<\varepsilon$ $\Rightarrow\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}d_n=a$ #

③关于比值与根值

5 (Ex. 1.2.9) $a_n\neq0$. $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ 不能推出 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=1$

反例: $a=0$ $a_n=\frac{1}{2^n}$ #

5' 若加上条件 "$a\neq0$" 则 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=1$!

pf $\forall\varepsilon>0$. (不妨 $\varepsilon<\frac{a}{2}$) $\exists N$ s.t. $\forall n>N$. $|a_n-a|<\varepsilon$

故 $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right|\overset{(\triangle)}{=}\left|\frac{a_n-a_{n+1}}{a_{n+1}}\right|<\frac{\varepsilon}{a-\varepsilon}<\frac{\varepsilon}{\frac{a}{2}}=\frac{2}{a}\varepsilon$

再次由 T1 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=1$

注: $(\triangle)$ 处的"不妨": 在用定义证明极限时 为了方便 可以

在一开始假设 $\varepsilon$ 小于某个固定的数 (为什么?)

6. (Ex. 1.2.20) $a_n>0$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

pf. 法一 取 $\varepsilon=\frac{l-1}{2}$ $\exists N$ s.t. $\forall n>N$. $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}-l\right|<\varepsilon$

故 $\frac{a_n}{a_{n+1}}>l-\varepsilon=\frac{l+1}{2}$. $\Rightarrow a_{n+1}<\frac{2}{l+1}a_n$

故 $a_n<a_N\left(\frac{2}{l+1}\right)^{n-N}$ $(n>N)$

则由夹逼 得证.

法二 由下题结论. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{l}$ $\Rightarrow$ 取 $\varepsilon=\frac{1-\frac{1}{l}}{2}$. $\exists N$ s.t. $\forall n>N$ $\sqrt[n]{a_n}<l+\varepsilon$

即 $a_n<(l+\varepsilon)^n=\left(\frac{1+\frac{1}{l}}{2}\right)^n$. 夹逼即可 #

注: ① 不存在 "$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{l}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\left(\frac{1}{l}\right)^n\to 0$" 这种说法!

② 法一中很多人写 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_2}{a_1}\lim\limits_{n\to\infty}a_1$

$=\lim\limits_{n\to\infty}l^n$ 这两个等号都不对!

7 (Chap1 T9) $a_n>0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ 也存在

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$

pf 参考上课讲义 #

总结: (1) ① 若 $\exists N$ s.t $\forall n\ge N$ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\le q<1$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

② - - - - — $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\ge q>1$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$

③ 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

④ 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

⑤ 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$. 则无法判断敛散性

((i) $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ (ii) $a_n=1$)

⑥ 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. (i) $a\neq 0$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$

(ii) $a=0$ 则 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 甚至不一定收敛

(2) 根值的对应结论. 类似 可尝试自行写出

($\sqrt[n]{a_n}$)

## ③ Stolz定理

8. ($\frac{0}{0}$型Stolz) $\{a_n\},\{b_n\}$均收敛于0. 且$b_n$严格递减

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=A$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$

其中A可为实数. $+\infty$. $-\infty$

Pf (1) $A\in\mathbb{R}$ 由定义. $\forall\varepsilon>0$ $\exists N$ s.t. $\forall n>N$

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}<A+\frac{\varepsilon}{2}$$

即 $(A-\frac{\varepsilon}{2})(b_n-b_{n+1})<a_n-a_{n+1}<(A+\frac{\varepsilon}{2})(b_n-b_{n+1})$

完全类似于$\frac{\infty}{\infty}$型Stolz定理的证明. 有

$$(A-\frac{\varepsilon}{2})(b_n-b_{n+p})<a_n-a_{n+p}<(A+\frac{\varepsilon}{2})(b_n-b_{n+p})$$

则令$p\to+\infty$ 有 $(A-\frac{\varepsilon}{2})b_n\leq a_n\leq(A+\frac{\varepsilon}{2})b_n$

$\Rightarrow \left|\frac{a_n}{b_n}-A\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$

(2) $A=+\infty$ 由定义 $\forall M>0$ $\exists N$ s.t. $\forall n>N$

$$\frac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}>2M$$

同样有 $a_n-a_{n+p}>2M(b_n-b_{n+p})$

令$p\to\infty$ 有 $a_n\geq 2Mb_n$ $\Rightarrow$ $\frac{a_n}{b_n}\geq 2M$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=+\infty$

(3) $A=-\infty$ 与(2)完全类似 省略 #

注 (1) 所谓"$\frac{\infty}{\infty}$"型 Stolz 实际并未要求分子数列发散到$\infty$.

但$\frac{0}{0}$型要求分子趋于0

(2) Stolz定理的逆不成立. 如 $a_n=(-1)^n$. $b_n=n$

9.(Chap 1 T10(1)) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\cdots\sqrt[n]{n}}{n}$

pf. 令 $A_n = 1+\sqrt{2}+\cdots\sqrt[n]{n}$ $B_n=n$. 则 $B_n$ 单增趋向正无穷.

且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A_n-A_{n-1}}{B_n-B_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

由Stolz定理. 原极限为1. #.

10.(Chap1 T11) 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+2a_2+\cdots na_n}{n^2} = \frac{a}{2}$

pf. $A_n = a_1+2a_2+\cdots na_n$ $B_n=n^2$ 则 $B_n$ 单增趋向正无穷

且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A_n-A_{n-1}}{B_n-B_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{na_n}{2n-1}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{a}{2}$

故由Stolz引理得证 #

11.(Toeplitz定理) 设 $\forall n\in\mathbb{N}$ $\forall 1\le k\le n$ $\exists\, t_{nk}\in\mathbb{R}$

s.t ① $\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk} = 1$ ② $t_{nk}\geq 0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} t_{nk}=0$ $(\forall k)$

则若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk}a_k = a$.

Pf. (1) $a=0$. 首先由 $a_n$ 收敛. 故有界 设 $|a_n|\le M$ $(\forall n)$

$\forall \varepsilon>0$ 存在 $N_1$ s.t. $\forall n>N_1$ $|a_n|<\varepsilon$

存在 $N_2$ s.t. $\forall n>N_2$. $k\le N_1$. $|t_{nk}|<\varepsilon$

则取 $N=\max\{N_1, N_2\}$ $\forall n>N$.

$$\left|\sum_{k=1}^{n} t_{nk}a_k\right| \le \left|\sum_{k=1}^{N_1} t_{nk}a_k\right| + \left|\sum_{k=N_1+1}^{n} t_{nk}a_k\right|$$

$$\le M\sum_{k=1}^{N_1} t_{nk} + \varepsilon\sum_{k=N_1+1}^{n} t_{nk}$$

$$< MN_1\varepsilon + \varepsilon = (MN_1+1)\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk}a_k = 0$

(2) $a\neq 0$ 令 $b_n = a_n - a$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk}b_k = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk}(a_k-a)$

由(1) 左边 $=0=$ 右边 $= \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk}a_k - a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk}a_k = a$ #

12.(推广Toeplitz) $\forall n\in\mathbb{N}$. $1\le k\le n$ 存在 $t_{nk}\in\mathbb{R}$

s.t. ① $t_{nk}\ge 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} t_{nk}=0$ ② $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} t_{nk}=1$.

则若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} t_{nk}a_k=a$

pf. 令 $S_n=\sum_{k=1}^{n} t_{nk}$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=1$ 故 $\exists N_1$. s.t. $\forall n>N_1$. $S_n>0$

当 $n>N_1$ 时. 令 $b_{nk}=\dfrac{t_{nk}}{S_n}$ 则 $b_{nk}\ge 0$.

且 $\sum_{k=1}^{n} b_{nk}=1$ $\lim\limits_{n\to\infty} b_{nk}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} t_{nk}}{\lim\limits_{n\to\infty} S_n}=0$

由上一题结论 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} b_{nk}a_k=a$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} t_{nk}a_k=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} b_{nk}a_kS_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} b_{nk}a_k\lim\limits_{n\to\infty} S_n=a$. #

13.(12例20) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1b_n+\cdots a_nb_1}{n}=ab$.

pf. 若 $b=0$. 则 $|b_n|\to 0$ $(n\to\infty)$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|b_1|+\cdots|b_n|}{n}=0$.

则 $\forall\varepsilon>0$ $\exists N$ s.t. $\forall n>N$. $\left|\dfrac{|b_1|+\cdots|b_n|}{n}\right|<\varepsilon$

又由 $\{a_n\}$ 收敛 故有界 即存在 $M>0$ s.t. $|a_n|\le M$ $(\forall n)$

$\Rightarrow\forall n>N$ $\left|\dfrac{a_1b_n+\cdots a_nb_1}{n}\right|\le M\left|\dfrac{|b_1|+\cdots|b_n|}{n}\right|<M\varepsilon$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1b_n+\cdots a_nb_1}{n}=0=ab$

若 $b\ne 0$. 令 $t_{nk}=\dfrac{b_{n-k+1}}{b_n}$ 则 $t_{nk}\ge 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} t_{nk}=0$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} t_{nk}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_1+\cdots b_n}{b_n}=1$

则由推广 Toeplitz定理立得结果 #

14(Chap 1 T11 Again) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots na_n}{n^2}=\dfrac{a}{2}$

pf. 令 $t_{nk}=\dfrac{2k}{n^2}$ 则 $t_{nk}\ge 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} t_{nk}=0$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} t_{nk}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n-1)}{n^2}=1$

由推广Toeplitz定理 $2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots na_n}{n^2}=a$. 故得证 #