黎曼曲面

参考书《黎曼曲面讲义》梅加强

目录

第一章 Riemann映射定理

§1.1 Schwarz引理

$\mathbb{C}$上的区域 指$\mathbb{C}$的连通开集

全纯函数: $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$

平均值原理 f在$B_R(a)$上全纯,则$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})d\theta$

最大模原理 f在区域D全纯,则$|f|$在D上取不到最大值 除非f常值

Thm 1.1.1 (Schwarz) $f: \underset{\{|z|<1\}}{\mathbb{D}} \to \mathbb{D}$ 全纯 $f(0)=0$ 则

(i) $|f'(0)| \le 1$ (ii) $|f(z)| \le |z|$ $\forall z \in \mathbb{D}$

取等 $\Leftrightarrow \exists \theta$ s.t. $f(z) = e^{i\theta}z$

Cor 1.1.2 (i) $f: B_R(0) \to B_1(0)$ 全纯. $f(0)=0$ 则 $|f'(0)| \le \frac{1}{R}$

(ii) $f: B_R(0) \to \mathbb{C}$ 有界全纯 则 $|f'(0)| \le \frac{2}{R}\sup|f|$

(iii) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 有界全纯 则f为常值

Möbius变换: $\forall z_0\in D,\ \theta\in\mathbb{R}$ 定义

$$f_{z_0}: D\to D$$
$$z\mapsto e^{i\theta}\frac{z-z_0}{\bar{z_0}z-1}$$

Thm 1.1.3 $f: D\to D$ 一一全纯，则 f 为Möbius变换

Pf. $z_0=f(0)$，令 $g=f_{z_0}\circ f$，则 $g: D\to D$ 一一全纯，$g(0)=0$

则 $|g'(0)|\le 1$，$h\triangleq g^{-1}$，同样 $|h'(0)|\le 1$

但 $h\circ g=\mathrm{Id}$ $\Rightarrow h'(0)g'(0)=1$ $\Rightarrow |g'(0)|=1$ 故 $g(z)=e^{i\theta}z$ #.

Thm 1.1.4 $f: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 全纯自同构，则 $f(z)=az+b$. $a\in\mathbb{C}^*$, $b\in\mathbb{C}$

Pf. 不妨 $f(0)=0$ 欲证 $f(z)=az$.

令 $g: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ $g(z)=\begin{cases}\frac{f(z)}{z} & z\ne 0\\ f'(0) & z=0\end{cases}$ 只需证 g 有界全纯即可

(i) $\exists c>0$ s.t. $|f(z)|\ge c$ ($\forall z\in\mathbb{C}-D$) 否则 $\exists z_i\in\mathbb{C}-D$ $f(z_i)\to 0$.

但 f 在0处连续，故 $z_i=f^{-1}(f(z_i))\to f^{-1}(0)=0$ 矛盾!

(ii) $\lim\limits_{|z|\to+\infty}|f(z)|=+\infty$ 否则若 $\exists A$ 及 $z_i\to+\infty$ s.t. $|f(z_i)|\le A$

则不妨 $f(z_i)\to w\in\mathbb{C}$ 由(i)同理 $z_i\to f^{-1}(w)$ 矛盾!

定义 $\tilde{g}: D\to D$ $z\mapsto\begin{cases}\frac{1}{f(\frac{1}{z})} & z\ne 0\\ 0, & z=0\end{cases}$ 则 $\tilde{g}$ 在D上全纯 $\Rightarrow |\tilde{g}(z)|\le|z|$ #.

§1.2 调和函数

Thm 1.2.1 $u: \Omega \to \mathbb{R}$ 为区域 Ω 上调和函数

(i) $\forall z_0 \in \Omega$. $\exists$ 其开邻域 B_{z_0} 及 B_{z_0} 上调和函数 v.

s.t. $f = u + \sqrt{-1}\,v$ 为 B_{z_0} 上全纯函数

(ii) 若 Ω 单连通. 则 (i) 中 B_{z_0} 可换为 Ω

调和函数性质:

(i) $\boxed{\text{平均值公式}}$: $u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\,d\theta$

(ii) $\boxed{\text{最大值原理}}$: u 在 Ω 内部取不到局部最值. 除非 u 为常值

(iii) $\boxed{\text{Poisson公式}}$: $u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \frac{r^2 - |z_0|^2}{|re^{i\theta} - z_0|^2}\,d\theta$.

Thm 1.2.2 $f(re^{i\theta})$ 为 $\{|z| = r\}$ 上实连续函数. 则 $\{|z| < r\}$

内 $\exists !$ 调和函数 $u(z)$ s.t. $\lim\limits_{z \to re^{i\theta}} u(z) = f(re^{i\theta})$

Cor 1.2.3 u 为区域 Ω 上连续实函数. 且任给 Ω 中一点 p.

$\exists$ 邻域 V_p s.t. V_p 内 u 满足平均值公式. 则 u 调和

Thm 1.2.4 (Harnack 不等式) Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中区域. $\forall c \in (0,1)$

$\exists D(c,n)$ s.t. $\forall$ Ω 上正调和函数 u. 有 $\sup\limits_{B_{c\rho}(p)} u \le D(c,n) \inf\limits_{B_{c\rho}(p)} u$.

$(\forall B_\rho(p) \subset \Omega)$

一般地. 若 $K \subset\subset \Omega$, 则 $\exists D_K(\Omega)$ s.t. $\forall$ Ω 上正调和函数 u

有 $D_K(\Omega)^{-1} \le \frac{u(z_1)}{u(z_2)} \le D_K(\Omega)$ $\forall z_1, z_2 \in K$

Thm 1.2.5 (Harnack 原理) $\{u_i\}$ 为域 Ω 上单增调和函数.

则下列两种仅出现其一

(i) $\{u_i\}$ 内闭一致发散至 $+\infty$

(ii) $\{u_i\}$ 内闭一致收敛到 Ω 上某调和函数

Pf. 不妨 $\{u_i\}$ 均为正的

(i) 若 $\exists z_1 \in \Omega$ s.t. $\lim\limits_{i\to+\infty} u_i(z_1) = +\infty$ 则由 Harnack 不等式

z_1 附近的 z_2 也有 $\lim\limits_{i\to+\infty} u_i(z_2) = +\infty$

进一步地. $\forall K \subset\subset \Omega$. u_i 在 K 上一致发散到 $+\infty$

(ii) 若 $\exists z \in \Omega$ s.t. $\lim\limits_{i\to+\infty} u_i(z) = u < +\infty$. 则由 Harnack 不等式

u_i 在 Ω 上内闭一致有界. 由梯度估计可知

u_i 在 Ω 上内闭一致等度连续

则 u_i 内闭一致收敛到连续函数 u.

又 u 满足均值公式. 故 u 调和. #

§1.3 Riemann映射定理

Thm 1.3.1 Ω为$\mathbb{C}$中单连通真子开集. 则$\exists\,\Omega\to D$的双全纯同构

pf

Lemma 1.3.2 Ω如上 则$\exists$单全纯映射 $\varphi:\Omega\to D$

[若$\exists\, z_0\in\Omega^c$, $r_0>0$ s.t. $B_{r_0}(z_0)\subset\Omega^c$ 则取 $\varphi(z)=\frac{r_0}{z-z_0}$]

故不妨Ω为有界域. 取$z_0\in\Omega$

$$\mathcal{F}=\{f:\Omega\to\mathbb{C}\ \text{全纯} \mid f(\Omega)\subset D,\ f(z_0)=0\}$$

Lemma 1.3.3 $f\in\mathcal{F}$且$f(\Omega)\neq D$ 则$\exists\, g\in\mathcal{F}$ s.t. $|g'(z_0)|>|f'(z_0)|$.

[取 $w\in D-f(\Omega)$ $\quad g_1: D\to D$, $z\mapsto\frac{z-w}{\bar{w}z-1}$

则 $0\notin g_1(f(\Omega))$.

可取$\sqrt{z}$在$g_1(f(\Omega))$的一个分支. 记为$g_2(z)$.

$g_3: D\to D$, $z\mapsto\frac{z-g_2(w)}{\overline{g_2(w)}z-1}$ $\qquad g\triangleq g_3\circ g_2\circ g_1\circ f:\Omega\to D$

则$g(z_0)=0$且 $|g'(z_0)|=|(g_3\circ g_2\circ g_1)'(0)|\cdot|f'(z_0)|$

$h=g_1^{-1}([g_3^{-1}(z)]^2): D\to D$ $\quad h(0)=0$ 则 $|h'(0)|\le 1$.

又h在$g_3(0)$非一一的 故$|h'(0)|<1$. 又 $h\circ g_3\circ g_2\circ g_1=\mathrm{Id}$ $\Rightarrow |g'(z_0)|>|f'(z_0)|$]

$\forall f\in\mathcal{F}$. $z_0\in\Omega$ 则 $\exists r_0$ s.t. $B_{r_0}(z_0)\subset\Omega$.

则 $f(r_0z+z_0): D\to D$

由Schwarz引理 $|f'(z_0)|\le r_0^{-1}$ $\forall f\in\mathcal{F}$.

由Lemma 1.3.3 $\exists\{f_i\}\subset\mathcal{F}$. s.t. $\lim\limits_{i\to\infty}|f_i'(z_0)|=\sup\limits_{f\in\mathcal{F}}|f'(z_0)|\le\frac{1}{r_0}$

Lemma 1.3.4 $\{f_i\}$有收敛子列 且收敛到 $\mathcal{F}$中满射

[紧集 $K\subset\Omega$. 同上有常数 $C(K)$. s.t. $|f'(z)|\le C(K)$ $\forall z\in K$, $f\in\mathcal{F}$

则 $\{f_i\}$ 在 K上一致有界且等度连续. 则有收敛子列

对角线论证可得到 $\{f_i\}$的内闭一致收敛子列. 极限 f全纯

显然 $|f'(z_0)|=\sup\limits_{g\in\mathcal{F}}|g'(z_0)|>0$ $\Rightarrow f'$不为常值.

又 f_i 为单射. 由Hurwitz定理. f为单射. 则 $f\in\mathcal{F}$.

由Lemma 1.3.3 f为满射].

综上则得证. #

第二章 单值化定理

§2.1 黎曼曲面的定义

Def 2.1.1 Σ 为 A_2, T_2 拓扑空间. 其开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$

及 U_α 上连续映射 $\phi_\alpha: U_\alpha \to \mathbb{C}$ 且

(i) $\phi_\alpha: U_\alpha \to \phi_\alpha(U_\alpha)$ 为同胚

(ii) $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ 则 $\phi_\alpha\circ\phi_\beta^{-1}: \phi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\to\phi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$ 全纯.

则 Σ 为 $\boxed{\text{黎曼曲面}}$

e.g. ① 黎曼球面. 定义 $S=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$

$$f: S^2\to S$$

$$(x,y,z)\mapsto\begin{cases}\dfrac{x+\sqrt{-1}\,y}{1-z}, & (x,y,z)\neq(0,0,1)\\ \infty, & (x,y,z)=(0,0,1)\end{cases}$$

双全纯

故 $S^2\cong S$. 同理可证 $\mathbb{C}P^1\cong S$

② $\omega_1,\omega_2\in\mathbb{C}^*$, $\frac{\omega_1}{\omega_2}\notin\mathbb{R}$. $\Lambda\triangleq\{m\omega_1+n\omega_2 \mid m,n\in\mathbb{Z}\}$

$\mathbb{C}/\Lambda$ 为黎曼曲面 (称为黎曼环面)

令 $\delta=\inf\limits_{(m,n)\neq(0,0)}|m\omega_1+n\omega_2|>0$

$\forall p\in\mathbb{C}/\Lambda$ 取 $z_p\in\pi^{-1}(p)$, $W_p=\{w\in\mathbb{C} \mid |w-z_p|<\frac{\delta}{2}\}$

$U_p=\pi(W_p)$

则 $\pi|_{W_p}: W_p \to U_p$ 为同胚.

令 $\varphi_p: U_p \to W_p \subset \mathbb{C}$ $\qquad$ 则 $\{(U_p, \varphi_p)\}$ 为坐标覆盖

$q \mapsto (\pi|_{W_p})^{-1}(q)$

Prop 2.1.1. (i) $\forall p \in \mathbb{C}/\Lambda$ $\exists$ 全纯自同构

$f_p: \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{C}/\Lambda$ s.t. $f_p(p) = [0]$

(ii) $\mathbb{C}/\langle w_1, w_2\rangle \simeq \mathbb{C}/\langle 1, \frac{w_1}{w_2}\rangle \simeq \mathbb{C}/\langle 1, \frac{w_2}{w_1}\rangle$

pf. (i) 取 $z_p \in \pi^{-1}(p)$ 定义 $f_p: \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{C}/\Lambda$

$[w] \mapsto [w - z_p]$ 即可

(ii) $f: \mathbb{C}/\langle w_1, w_2\rangle \to \mathbb{C}/\langle 1, \frac{w_1}{w_2}\rangle$

$[z] \mapsto [\frac{z}{w_2}]$ $\qquad$ #

Thm 2.1.2 (轿曼环面分类) $\forall \mathbb{C}/\Lambda \simeq \mathbb{C}/\langle 1, \tau\rangle$. $\operatorname{Im}\tau > 0$.

且 $\mathbb{C}/\langle 1, \tau\rangle \simeq \mathbb{C}/\langle 1, \tau'\rangle \Leftrightarrow \exists a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ s.t.

$\tau' = \frac{c + d\tau}{a + b\tau}$ $\quad ad - bc = 1$

pf. 若 $\mathbb{C}/\langle 1, \tau\rangle \simeq \mathbb{C}/\langle 1, \tau'\rangle$. $f: \mathbb{C}/\langle 1, \tau\rangle \to \mathbb{C}/\langle 1, \tau'\rangle$ 双全纯

则不妨 $f([0]) = [0]$

$\exists!$ 全纯的 $F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $F(0)=0$ s.t.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{C} \arrow[d, "\pi_2"] \\ \mathbb{C}/\Lambda_1 \arrow[r, "f"] & \mathbb{C}/\Lambda_2 \end{tikzcd}$$

记 F 为 f 的提升

因为 f^{-1} 也有提升 $G: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. $G(0)=0$ $\pi_1 \circ G = f^{-1} \circ \pi_2$

则 F. G 为互逆全纯同构 则 F $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 自同构.

故 $\exists \gamma \in \mathbb{C}$ s.t. $F(z) = \gamma z$

故 $f([z]) = [\gamma z]$. $[0] = f([0]) = f([1]) = [\gamma]$

$f([\tau]) = [\gamma \cdot \tau]$.

则 $\exists a.b.c.d \in \mathbb{Z}$ s.t. $\begin{cases} \gamma = a \cdot 1 + b \cdot \tau' \\ \gamma \cdot \tau = c \cdot 1 + d \cdot \tau' \end{cases}$ $(*)$

则可证 $\begin{cases} ad - bc = 1 \\ \tau' = \dfrac{c + a\tau}{a + b\tau}. \end{cases}$

反之 由 $(*)$ 定义 $a.b.c.d.\gamma$

构造 $f. \ \mathbb{C}/\langle 1, \tau \rangle \to \mathbb{C}/\langle 1, \tau' \rangle$

$[z] \mapsto [\gamma z]$

则 f 为全纯同构 #

§2.2 Poincaré引理

$C^\infty(p) \triangleq \{M$上$p$点附近的光滑函数$\}/\sim$

$V_p: C^\infty(p) \to \mathbb{R}$ 称为p处的 $\boxed{\text{切向量}}$，若

$$V_p(fg) = f(p)V_p(g) + g(p)V_p(f) \quad \forall f,g \in C^\infty(p)$$

$T_pM = \{$切向量全体$\}$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big|_p(f) = \frac{\partial}{\partial x}\Big|_0 (f\circ\varphi_\alpha^{-1}) \qquad \frac{\partial}{\partial y_\alpha}\Big|_p(f) = \frac{\partial}{\partial y}\Big|_0 (f\circ\varphi_\alpha^{-1}).$$

则 $T_pM = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial y_\alpha}\Big|_p \right\rangle$

$\phi: M \to N \quad \Rightarrow \phi_{*p}: T_pM \to T_{\phi(p)}N$

$$\phi_{*p}(V_p)(g) = V_p(g\circ\phi) \quad \forall g \in C^\infty(\phi(p))$$

若 $\phi = u + \sqrt{-1}v$，则 $\phi_{*p}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\big|_p \\ \frac{\partial}{\partial y_\alpha}\big|_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_\beta}\big|_{\phi(p)} \\ \frac{\partial}{\partial y_\beta}\big|_{\phi(p)} \end{pmatrix}$.

$\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big|_p\right)^* = dx_\alpha|_p, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\Big|_p\right)^* = dy_\alpha|_p$

$T_p^*M = \langle dx_\alpha|_p, dy_\alpha|_p \rangle$.

余切向量也又称 $\boxed{\text{1次微分形式}}$

$\wedge^2 T_p^*M = \{\psi: T_pM\times T_pM \to \mathbb{R} \mid \psi$ 偏双线性 关于两个分量反对称$\}$

$\wedge: T_p^*M \times T_p^*M \to \wedge^2 T_p^*M$

$(\omega_p, \eta_p) \mapsto \omega_p \wedge \eta_p$.

$(\omega_p \wedge \eta_p)(V_p, W_p) = \omega_p(V_p)\cdot \eta_p(W_p) - \omega_p(W_p)\,\eta_p(V_p)$

U_α 上的2次微分形式 均形如 $a\, dx_\alpha \wedge dy_\alpha$

$\omega = a\,dx_\alpha + b\,dy_\alpha$. 定义 $d\omega = da\wedge dx_\alpha + db\wedge dy_\alpha$

$f: M\to N$ $\quad f^*$: N 的1-形式 $\to$ M 的1-形式

$f^* g = g\circ f \quad g\in C^\infty(N)$

$f^*\omega_p(V_p) = \omega_{f(p)}(f_{*p}V_p)$ $\quad \omega$ 为 N 上 1-形式

$f^*\eta_p(V_p, W_p) = \eta_{f(p)}(f_{*p}V_p, f_{*p}W_p)$ $\quad \eta$ 为 N 上 2-形式

$$\begin{cases} f^*(\omega\wedge\eta) = f^*(\omega)\wedge f^*(\eta) \\ f^*(d\omega) = d(f^*(\omega)) \end{cases}$$

Def 2.2.1 $\quad d\omega = 0$ 则 ω 为 闭形式.

$\omega = d\eta$ 则 ω 为 恰当形式

$H^q_{dR}(M) \triangleq \{q$ 次闭形式$\}/\{q$ 次恰当形式$\}$

Thm2.2.1 (Poincaré 引理). $H^q_{dR}(\mathbb{C})=0 \quad (q=1,2)$

Pf. (i) ω 为闭 1-形式 $\quad \omega = p\,dx + q\,dy$

$d\omega = 0 \Rightarrow dp\wedge dx + dq\wedge dy = \left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy\right)\wedge dx$

$\qquad + \left(\frac{\partial q}{\partial x}dx + \frac{\partial q}{\partial y}dy\right)\wedge dy$

$\qquad = \underbrace{\left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right)}_{0} dx\wedge dy = 0.$

$df = \omega \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = p,\ \frac{\partial f}{\partial y} = q \Leftrightarrow f = \int_0^x p(t,y)\,dt + \int_0^y q(0,t)\,dy.$

(ii) ω 为闭 2-形式 $\quad \omega = F(x,y)\,dx\wedge dy.$

则 $\eta = \left[\int_0^x F(t,y)\,dt\right]dy. \quad d\eta = \omega.$

#

ω 为 M 上 1-形式. $\quad \sigma : [a,b] \to M$ 曲线.

ω 在局部为 $\omega = a\,dx_\alpha + b\,dy_\alpha$

令 $f(t) = a\circ\sigma(t)\cdot x_\alpha'(t) + b\circ\sigma(t)\, y_\alpha'(t)$

定义 $\int_\sigma \omega = \int_a^b f(t)\,dt$

ω 为 M 上 2-形式 Ω 为 M 中区域

(i) 若有坐标邻域 U_α s.t. $\operatorname{supp}\omega \cap \Omega \subset U_\alpha$

定义 $\int_\Omega \omega = \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} a\,dx_\alpha dy_\alpha$

(ii) 一般. 借助单位分解.

Thm2.2.2 (Stokes公式). ω为1-形式. $\mathrm{supp}\,\omega\cap\Omega\subset\subset\Omega$.

则 $\int_\Omega d\omega=\int_{\partial\Omega}\omega$

[Ω: $\forall p\in\partial\Omega$. $\exists U_\alpha,\varphi_\alpha$ $\varphi(p)=0$. s.t $\varphi_\alpha(U_\alpha\cap\Omega)=\{y_\alpha\geq 0\}$ $\varphi_\alpha(U_\alpha\cap\partial\Omega)=\{y_\alpha=0\}$]

Thm2.2.3 $H^1_{dR}(\mathbb{C}^*)=\mathbb{R}.=H^1_{dR}(D^*)$

Pf. $\varphi: H^1_{dR}(\mathbb{C}^*)\to\mathbb{R}$

$[\omega]\mapsto\int_{S^1}\omega$

$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ 则 $\begin{cases}dr=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(xdx+ydy)\\ d\theta=\frac{1}{x^2+y^2}(xdy-ydx)\end{cases}$

$\varphi(d\theta)=2\pi\neq 0$ 故φ满.

若$d\omega=0$. $\int_{S^1}\omega=0$ $\omega=fdr+gd\theta$. $\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial\theta}=\frac{\partial g}{\partial r}$

则 $\omega-d(\int_1^r f(t,\theta)dt)=g(1,\theta)d\theta$

$\int_{S^1}\omega=0\Rightarrow\int_0^{2\pi}g(1,\theta)d\theta=0$ 则 $\int_0^\theta g(1,s)ds$ 良定

令 $\eta=\int_1^r f(t,\theta)dt+\int_0^\theta g(1,s)ds$ 则 $\omega=d\eta\Rightarrow\varphi$单 #

Thm2.2.4 u为D^*上调和函数. u为D^*上某全纯函数的实部 $\Leftrightarrow\exists 0<r_0<1$. s.t. $\int_{\partial D_{r_0}}\frac{\partial u}{\partial r}=0$.

这对$\mathbb{C}^*$也成立. 更一般地. 有

Thm 2.2.5 (i) M 单连通 则 $H^1_{dR}(M)=0$

(ii) M 单连通，$p\in M$，U 为坐标邻域，φ 坐标映射，$\varphi(p)=0$，$\varphi(U)=D$，ω 为 $M-\{p\}$ 上闭 1-形式

若 $\exists\, 0<r_0<1$，$\int_{\partial U_{r_0}}\omega=0$，则 ω 为 $M-\{p\}$ 上恰当 1-形式

$U_{r_0}=\varphi^{-1}(D_{r_0})$.

Pf. (i) M 上闭 1-形式 ω，固定 $p_0\in M$

$f: M\to\mathbb{R}$

$p\mapsto\int_{\gamma_p}\omega$

$\gamma_p: p_0\to p$

只须证 f 与 γ_p 选取无关，设 $\sigma_p: p_0\to p$

由 M 单连通，σ_p 可被连续映为 S^1 上半圆，γ_p 下半圆

则 $\int_{\sigma_p}\omega-\int_{\gamma_p}\omega=\int_{S^1}\sigma^*(\omega)=\int_D d\sigma^*(\omega)=\int_D\sigma^*(d\omega)=0$.

(ii) 同 Thm 2.2.3 可知 $U-p$ 上有光滑函数 g s.t. $\omega=dg$

取 $\phi\in C^\infty(U)$，ϕ 在 p 附近恒为 1，∂U 附近为 0

则 ϕg 可视为 $M-p$ 上光滑函数

$\omega-d(\phi\cdot g)$ 在 p 附近值为 0，可视为 M 上光滑 1-形式 且闭

则由 (i)，为 M 上恰当形式

故 ω 为 $M-\{p\}$ 上恰当 1-形式

#

下面举例说明该定理的应用

g 为单连通 M 上恒非零全纯函数，则 $\forall k\in\mathbb{N}_+$，$\exists M$ 上全纯函数 f

s.t. $f^k=g$（开 k 次方）

pf. $\forall p\in M$，取坐标邻域 U_p 及 U_p 上全纯函数 f_p s.t. $f_p^k=g$

$U_p\cap U_q$ 非空时，$\exists$ 常数 C_{pq} s.t. $f_p=C_{pq}f_q$

U_p 上定义 $\omega_p=\frac{df_p}{f_p}$ 则 $U_p\cap U_q$ 上 $\omega_p=\omega_q$

则有 M 上整体闭形式 ω 则 $\exists h$ s.t. $dh=\omega=\frac{df_p}{f_p}$

$\Rightarrow U_p$ 上 $d(f_pe^{-h})=0$ $f_pe^{-h}=C_p\Rightarrow ge^{-kh}=C_p^k$

C_p^k 不依赖 p，记为 c 令 $f=|c|^{\frac{1}{k}}e^h$ #

同理可证"取对数"

下面将之前实的概念"复化"

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right)\qquad \frac{\partial}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$dz=dx+\sqrt{-1}dy\qquad d\bar z=dx-\sqrt{-1}dy$$

$$dx\wedge dy=\frac{\sqrt{-1}}{2}dz\wedge d\bar z$$

f 全纯 $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar z}=0$.

§2.3 亚纯函数与亚纯微分

Def 2.3.1 $f: X \to Y$ 为拓扑空间之间连续映射

若 $\forall p \in M$ $\exists$ 邻域 U s.t. $f: U-p \to f(U)-f(p)$

为 k 次覆盖映射 则称 f 为 $\boxed{\text{分歧覆盖}}$

Prop 2.3.1 $f: M \to N$ 为非常值全纯映射 则 f 为分歧覆盖

对 $q \in N$. 定义 $\# f^{-1}(q) = \sum_{p \in f^{-1}(q)}$ (以 f 的重数) 为 q 在 f 下 $\boxed{\text{原像个数}}$

Def 2.3.2 $f: M \to S$ $f \not\equiv \infty$ 的全纯映射称为 M 上 $\boxed{\text{亚纯函数}}$

Thm 2.3.2 S 上亚纯函数为有理函数

Pf. $f: S \to S$ 亚纯. 不妨 $f(\infty) \neq \infty$

则 $\exists R > 0$ s.t. $f \neq \infty$ $(\forall |z| > R)$

$f^{-1}(\infty) \subset \mathbb{C} = S - \{\infty\}$ 为 $\{|z| \le R\}$ 的离散子集 则有限

取 $a \in f^{-1}(\infty)$ 则 a 附近 $f(z) = \underset{\text{多项式}}{P_a\left(\frac{1}{z-a}\right)} + \underset{\text{全纯}}{H_a(z)}$

令 $S(z) = \sum_{a \in f^{-1}(\infty)} P_a\left(\frac{1}{z-a}\right)$ 则 $f - S$ 为 $\mathbb{C}$ 上有界全纯函数

故 $f = S + C$ 即有理

#

Def 2.3.3 M上亚纯函数域记为 $\mathcal{R}(M)$

设 $f\in\mathcal{R}(M)$, $f\neq 0$. $\forall p\in M$ z为p附近坐标函数 $z(p)=0$

p附近Laurent展开 $f(z)=a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1}+\cdots$

称n为f在p的 $\boxed{\text{赋值}}$ 记为 $\nu_p(f)$

Rmk. (i) $\nu_p(f)$与坐标选取无关

(ii) $\nu_p(fg)=\nu_p(f)+\nu_p(g)$ $\nu_p(f+g)\geq\min(\nu_p(f),\nu_p(g))$

Def 2.3.4 M上的(1,0)型形式称为 $\boxed{\text{全纯微分}}$.

全纯微分全体空间记为 $\mathcal{H}(M)$

Def 2.3.5 M上 $\boxed{\text{亚纯微分}}$ 指除去M某离散集上的全纯微分

使得此全纯微分的局部表示的系数为M上局部亚纯函数

亚纯微分全体构成空间记为 $\tilde{\mathcal{R}}(M)$

Def 2.3.6 ω为亚纯微分 $\forall p\in M$ p附近坐标函数z $z(p)=0$

$\omega=(a_{-n}z^{-n}+\cdots a_{-1}z^{-1}+h(z))dz$ a_{-1}为ω在p的 $\boxed{\text{留数}}$

记为 $\mathrm{Res}_p(\omega)$

Lemma 2.3.3 $Res_p(\omega)$ 与坐标无关

Pf 取以p为中心的圆盘B 则

$$\int_{\partial B}\omega=\int_{\partial B} a_{-n}z^{-n}+\cdots a_{-1}z^{-1}+b(z)dz$$

$$=2\pi\sqrt{-1}\,a_{-1}\quad\Rightarrow a_{-1}=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial B}\omega$$ #

Thm 2.3.4 (留数定理) M为紧黎曼曲面. 则对任一亚纯微分

$$\sum_{p\in M}Res_p(\omega)=0$$

Pf. ω的极点 $p_1\sim p_k$. B_j为含p_j的坐标圆盘

$i\neq j$时 $B_i\cap B_j=\emptyset$. 令 $\Omega=M-\bigcup_j B_j$.

则ω为Ω上全纯微分

Stokes: $0=\int_\Omega d\omega=\int_{\partial\Omega}\omega=-\sum_j\int_{\partial B_j}\omega=-2\pi\sqrt{-1}\sum_j Res_{p_j}(\omega)$ #

$f:M\to S$ 亚纯 $\omega=\frac{df}{f}$ 亚纯 且 $\nu_p(f)=Res_p(\omega)$

$$\Rightarrow\sum_{p\in M}\nu_p(f)=\sum_{p\in M}Res_p(\omega)=0$$

$$\Rightarrow\sum_{p\in f^{-1}(\infty)}-\nu_p(f)=\sum_{p\in f^{-1}(0)}\nu_p(f)$$

$\Rightarrow \#f^{-1}(\infty)=\#f^{-1}(0)$. 同理 $\forall a$. $\#f^{-1}(\infty)=\#f^{-1}(a)$

§2.4 Perron方法

Def 2.4.1 $u: M\to\mathbb{R}$ 连续，若 $\forall p\in M$ 附近 u 为 M 上某局部全纯函数的实部，则 u 为 M 上一个 $\boxed{\text{调和函数}}$

$$\omega=\frac{\partial u}{\partial x}dy-\frac{\partial u}{\partial y}dx \qquad u\text{调和} \Leftrightarrow \omega\text{闭}.$$

$\boxed{\text{Hodge星算子}}$ $\quad *: A^1(M)\to A^1(M)$

$$\eta=a\,dx+b\,dy\mapsto a\,dy-b\,dx$$

$$\begin{cases} *^2=-\mathrm{Id} \\ *(dz)=-\sqrt{-1}\,dz \end{cases} \qquad *(d\bar z)=\sqrt{-1}\,d\bar z$$

则 $\omega=\frac{\partial u}{\partial x}dy-\frac{\partial u}{\partial y}dx=*du$

又 $\bar\partial u=\frac{\partial u}{\partial \bar z}d\bar z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\sqrt{-1}\frac{\partial u}{\partial y}\right)(dx-\sqrt{-1}dy)$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy-\sqrt{-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dy-\frac{\partial u}{\partial y}dx\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}(du-\sqrt{-1}*du)$$

故.

Prop 2.4.1 u调和 $\Leftrightarrow *du$闭 $\Leftrightarrow \bar\partial u$闭 $\Leftrightarrow \partial\bar\partial u=0$

Prop 2.4.2 M单连通 (i) u为M上调和函数，则为全纯函数实部

(ii) u为$M-\{p\}$上调和函数 $\int_B *du=0$ 则u为$M-\{p\}$上全纯函数

(iii) u为$M-\{p\}$上调和函数 B内存全纯函数 F_B s.t. $u=\log|F_B|$ 实部 则M上有F s.t. $u=\log|F|$

Def 2.4.2 $u:\Omega\to\mathbb{R}$ 为复平面区域上连续函数

若 $\forall B_r(p)\subset\Omega$ $u(p)\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(p+re^{i\theta})d\theta$

则称 u 为 Ω 上 $\boxed{\text{次调和函数}}$

Prop 2.4.3 下列等价

(i) $u:\Omega\to\mathbb{R}$ 次调和.

(ii) $\forall$ 区域 $\Omega'\subset\subset\Omega$ 及 Ω' 上调和函数 v, $u-v$ 在 Ω' 内不达到局部最大值 除非 $u-v$ 在 Ω' 上常值

(iii) $\forall B\subset\Omega$ u_B 为 B 内以 $u|_{\partial B}$ 为边值的调和函数, 则 $u\le u_B$

pf. (i)$\Rightarrow$(ii) 易得.

(ii)$\Rightarrow$(iii) 由 $u-u_B|_{\partial B}=0$ 由最大值原理上得

(iii)$\Rightarrow$(i) $u(p)\le u_B(p)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_B(p+re^{i\theta})d\theta$

$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(p+re^{i\theta})\,d\theta$ #

同样可定义黎曼曲面上 $\boxed{\text{次调和函数}}$

Def 2.4.3 $\mathcal{F}$ 为 M 上一族次调和函数, 若 $\mathcal{F}$ 满足

(i) 若 $u,v\in\mathcal{F}$ 则 $\exists w\in\mathcal{F}$ s.t. $w\ge\max\{u,v\}$

(ii) 若对 M 上任何坐标圆盘 B 若 $u\in\mathcal{F}$. 则 $\tilde{u}_B\in\mathcal{F}$.

其中 $\tilde{u}_B=\begin{cases}u_B & p\in B\\ u & p\in M-B\end{cases}$

则 $\mathcal{F}$ 为 $\boxed{\text{Perron族}}$

Thm2.4.4 $\mathcal{F}$为M上Perron族 则

$u_{\mathcal{F}}=\sup\limits_{u\in\mathcal{F}} u$ 要么恒为$+\infty$ 要么为M上调和函数

Def2.4.4 ξ为$\partial\Omega$上一点. 若$\exists\,\Omega$上连续到边界的次调和函数. 满足$u(\xi)=0$. $u(x)<0\ (\forall x\in\bar{\Omega}-\{\xi\})$

则称ξ为$\boxed{正则点}$. u为ξ处的$\boxed{闸函数}$

Lemma2.4.5 Ω为M上有界域. $z_0\in\partial\Omega$ 若$\exists$坐标邻域U. ϕ s.t. $\phi(z_0)=0$ $\phi(\Omega\cap U)\subset\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}(z)>0\}$ 则z_0正则

特别地 对Stokes公式中的区域. 边界点均正则

Thm2.4.6 Ω为M上有界域. 边界点均正则. 则

$\forall f\in C(\partial\Omega)$ 则$\exists!\,\Omega$内调和函数u u连续到边界. $u|_{\partial\Omega}=f$

Pf $\mathcal{F}_f=\{u$为Ω内连续到边界的次调和函数. $u|_{\partial\Omega}\le f\}$

易记$\mathcal{F}_f$为Perron族 , $u_f=\sup\limits_{u\in\mathcal{F}_f} u$为$\Omega$内调和函数

下证u为所求. $\forall\xi\in\partial\Omega$. 取$v$为闸函数

$\forall\varepsilon>0$. $\exists B_\xi$ s.t. $f(\xi)-\varepsilon<f(x)<f(\xi)+\varepsilon$ $\forall x\in\partial\Omega\cap B_\xi$

又$v<0$且连续. 故$\exists C$. s.t. $f(\xi)-\varepsilon+Cv<f(x)<f(\xi)+\varepsilon-Cv$. $\forall x\in\partial\Omega-B_\xi$

特别地 $f(\xi)-\varepsilon+Cv\in\mathcal{F}_f\Rightarrow f(\xi)-\varepsilon+Cv\le u_f$ $(*)$

又$\forall u\in\mathcal{F}_f$ 由$u|_{\partial\Omega}\le f$ $\Rightarrow u+Cv<f(\xi)+\varepsilon$. (于$\partial\Omega$ 最大值$\Rightarrow$于Ω)

故$u_f\le f(\xi)+\varepsilon-Cv$ 由$v(\xi)=0$和$(*)$ 得证 #

Lemma 2.4.7. 若 M 上有非常值非正次调和函数.

则 (i) M 上有非常值有界次调和函数

(ii) K 为 M 中紧集 $\Omega=M-K$ 连通且有正则边界 ∂K.

则 $\exists$ Ω 内连续到边界的调和函数 ω s.t. $\omega|_{\partial\Omega}=1$. $0<\omega|_{\Omega}<1$.

pf. u 为 M 上非正非常值函数.

(i) $p_0\in M$. 令 $v=\max\{u(p_0),u\}$ 则 v 为所求

(ii) 不妨 $\max\limits_{K} u=-1$ 考虑 $\max\{-1,u\}$ 更进一步设 $u|_K=-1$.

$\mathcal{F}_K=\{w:\Omega\to\mathbb{R}$ 次调和. 连续到 $\partial\Omega$. $w\le -u\}$

则 $\omega=\sup\limits_{w\in\mathcal{F}_K} w$ 为 Ω 内调和 且 $0\le\omega\le -u\le 1$ 下证 ω 满足

$\forall p\in\Omega$ 取边界正则有界域 $\Omega_p\supset K\cup\{p\}$ 则

$\exists$ Ω_p-K 内连续到边界调和函数 w_p. s.t. $w_p|_{\partial K}=1$, $w_p|_{\partial\Omega_p}=0$

则 Ω_p-K 内 $0<w_p<1$.

对 w_p+u 在 Ω_p-K 最大值 $\Rightarrow w_p+u\le 0$.

Ω_p 外零延拓 w_p 可视为 M 上次调和. 且 $w_p+u\le 0$

故 $w_p\in\mathcal{F}_K$ $\Rightarrow w_p\le\omega$. 则不难证 ω 满足 #.

Rmk. K为M上紧集. 若$M-K$上有次调和函数h

s.t. $\sup_{M-K} h<\infty$ $\limsup_{p\to\partial K} h=0$ 且$\exists q\in M-K$. $h(q)>0$

则称最大值原理对K不成立.

则结合引理有: M上有非常值有界次调和函数 $\Leftrightarrow$ $\exists K$紧. s.t. 最大值在K上不成立

Lemma 2.4.8 若M上不存在非常值有界次调和函数.

U为任取坐标圆盘 φ为坐标函数 记$U_r=\{q\in U \mid |\varphi(q)|<r\}$

则 (i) $\forall\partial U_r$上连续函数f. $\exists M-U_r$中唯一有界调和函数u.

s.t. $u|_{\partial U_r}=f$

(ii) 对上述调和函数u. 若$r<s<1$ 则$\int_{\partial U_s} *du=0$

Pf. (i) 通过加一个常数. 不妨$f\geq 0$ 考虑

$\mathcal{F}_f=\{v$为$M-U_r$上次调和函数. 且 $v\leq\sup_{\partial U_r} f$. $v|_{\partial U_r}\leq f\}$

$u=\sup_{\mathcal{F}_f} v$ 为$M-U_r$上调和函数 且$0\leq u\leq\sup_{\partial U_r} f$

取M中正则边界有界域Ω s.t. $\overline{U_r}\subset\Omega$ 则$\Omega-\overline{U_r}$ $\exists!$连续

到边界调和函数v_Ω s.t. $v_\Omega|_{\partial U_r}=f$ $v_\Omega|_{\partial\Omega}=0$

延拓后可视v_Ω为$M-U_r$上次调和函数

由最大值原理 $v_\Omega\in\mathcal{F}_f \Rightarrow u|_{\partial U_r}\geq v_\Omega|_{\partial U_r}=f \Rightarrow u|_{\partial U_r}=f$

(ii) 略

#

§2.5 单值化定理

Def 2.5.1 存在非常值有界次调和函数的黎曼曲面为 $\boxed{\text{双曲型}}$，紧黎曼曲面为 $\boxed{\text{椭圆型}}$，否则为 $\boxed{\text{抛物型}}$

Prop 2.5.1 $\mathbb{C}$ 为抛物型

pf. 若 $\mathbb{C}$ 为双曲型，由 Lemma 2.4.7

$\exists$ 连续有界的调和函数 $u: \mathbb{C}-\overline{D} \to \mathbb{R}$

$$\text{s.t. } u|_{\partial D}=0 \qquad 0<u<1$$

$\forall \varepsilon>0 \quad \forall z\in\mathbb{C}-\overline{D}$ 取 $r_0 > \max(|z|, e^{\frac{1}{\varepsilon}})$

由在 $\partial(D_{r_0}-\overline{D})$ 上 $\varepsilon \log|z| \geq u \Rightarrow \varepsilon\log|z| \geq u(z) \geq 0$

则令 $\varepsilon\to 0$ 有 $u\equiv 0$，矛盾！ #

Lemma 2.5.2 M 为双曲型，则 $\forall p\in M$，$M-\{p\}$ 上存在正调和函数 g s.t. 在 p 的坐标邻域 B 内，

$g+\log|\phi|$ 调和（ϕ 为坐标函数 $\phi(p)=0$，$\phi(B)=D$）

g 称为 p 处的 $\boxed{\text{Green 函数}}$

Thm 2.5.3 单连通双曲型曲面全纯同构于 D

Pf. $\forall p\in M$, B为坐标邻域, φ坐标函数

g_p为p处 Green 函数, $g_p+\log|\varphi|$ 在B调和, 则

为某全纯函数 h 的实部

$$F_p=e^{-h}\varphi \quad \text{为} B \text{内全纯函数}$$

$$\log|F_p|=-g_p$$

由 Prop 2.4.2 F_p可延拓到M且满足 $\log|F_p|=-g_p$.

则 $F_p: M\to D$. 下证 F_p为单射 则 M与D中单连通域$F(M)$同构

由 Riemann 映射定理即证.

$\forall q\in M$ ψ为坐标函数 $\psi(q)=0$ 同理 有 Green 函数 g_q

和 F_q s.t. $\log|F_q|=-g_q$

令 $F(x)=\dfrac{F_p(x)-F_p(q)}{1-\overline{F_p(q)}F_p(x)}$ 则 F全纯 $F(q)=0$ 零点阶数为n

令 $u=-\dfrac{\log|F|}{n}$ 则 $u+\log|\psi|$ 在q附近有界 可延拓为q附近

调和函数. 由 Green 函数构造有 $g_q\le u$

则 $|F_q(x)|\ge|F(x)|^{\frac{1}{n}}\ge|F(x)| \Rightarrow |F_q(p)|\ge|F(p)|=|F_p(q)|$

交换p,q $\Rightarrow |F_q(p)|=|F(p)|=|F_p(q)| \Rightarrow F=c\cdot F_q$, $|c|=1$

由F_q只有q这一零点 则F也是. 故 F_p为单射.

#

Lemma 2.5.4 M非双曲型 B为p的坐标圆盘

中坐标函数 $f: B-\{p\}\to\mathbb{C}$ 全纯

对 $0<\rho<1$ 令 u_ρ 为 $M-B_\rho$ 上满足 $u_\rho=Re(f)|_{\partial B_\rho}$ 的有界调和函数

则当 $0<r<\frac{1}{20}$ 时 $\exists c(r)$ s.t. $\max\limits_{M-B_r}|u_\rho|\le\max\limits_{\partial B_r}|u_\rho|\le c(r)$ $(\rho<r)$

Cor 2.5.5 M非双曲 B中f同上

则$\exists!$调和函数 $u: M-\{p\}\to\mathbb{R}$ s.t. u在p的任一邻域外有界

且 $u-Re(f)$ 可延拓为在p为0的B上调和函数

Thm 2.5.6 M为非双曲型单连通，则M与S或$\mathbb{C}$同构

pf. $\forall p\in M$. 考虑 $B-\{p\}$ 上全纯的 $\frac{1}{z}$ 则$\exists$ $M-\{p\}$上调和u

s.t. B上 $u=h+Re(\frac{1}{z})$ 其中h在B调和. $h(p)=0$

$\Rightarrow h=Re(F_B)$ F_B全纯

故 $u=Re(F_B+\frac{1}{z})$.

由单连通. $F_B+\frac{1}{z}$ 可延拓为 $M-\{p\}$内全纯 记为F.

则F为M上以p为单极点的亚纯函数

可证F为单射.

则M与S中单连通域 $F(M)$ 同构

若M紧. 则 $F(M)$ 既开又闭 $\Rightarrow F(M)=S$ $M\cong S$.

否则 $F(M)$ 为$\mathbb{C}$中单连通域. $F(M)\cong D$或$\mathbb{C}$.

又M非双曲. 故 $M\cong F(M)\cong\mathbb{C}$

\#.

第三章 Riemann-Roch定理

§3.1 因子.

Def 3.1.1 $D: M \to \mathbb{Z}$ 若除有限个点外均 $D=0$ 则称 D 为 M 上的一个 $\boxed{\text{因子}}$

用形式和 $\sum_{p\in M} D(p)\cdot p$ 表示因子 D.

若 $D(p)\geq 0$ 恒成立 则称 D 为 M 上 $\boxed{\text{有效因子}}$

$\mathcal{D} = \{M\text{上因子全体}\}$, 称为因子群

$$d: \mathcal{D} \to \mathbb{Z}$$
$$D \mapsto \sum_{p\in M} D(p) \qquad d(D)\text{称为}D\text{的}\boxed{\text{次数}}$$

e.g. 亚纯函数 f，除子 $(f) = \sum_{p\in M} v_p(f)\,p$.

若 M 紧 则 $d((f))=0$ (留数)

Def 3.1.2 M 紧 则上述 (f) 称为 $\boxed{\text{主要因子}}$

$\mathcal{P} = \{(f) \mid f\in \mathcal{R}(M)\}$ 称为主要因子群

$\mathcal{P} \subset \ker d \Rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{P}$ $\boxed{\text{因子类群}}$

e.g. $\omega \in \tilde{\mathcal{R}}(M)$. $(\omega) \triangleq \sum_{p\in M} v_p(\omega)\cdot p$

若 $\omega' \in \tilde{\mathcal{R}}(M)$ 则 $(\omega)-(\omega')\in\mathcal{P}$. 故 (ω), (ω') 等价

记为类 K. 典范因子类

Def 3.13 M紧. 令 $l(D)=\{f\in \mathbb{R}(M) \mid (f)+D\geq 0\}$

$i(D)=\{\omega\in \mathcal{R}(M) \mid (\omega)-D\geq 0\}$

Lemma 3.1.1

(i) $l(D)$. $i(D)$为复向量空间. 若$D\sim D'$. 则 $l(D)\simeq l(D')$. $i(D)\simeq i(D')$

(ii) $l(D)$. $i(D)$ 均有限维

(iii) 若K为典范因子. 则 $i(D)\simeq l(K-D)$

pf. (i)显然

(ii) $D=D_1-D_2$, $D_1\geq 0$. $D_2\geq 0$. 则 $l(D)\subset l(D_1)$

即证$\dim l(D_1)<\infty$. 对$d(D_1)$归纳

$d(D_1)=0$. 则 $D_1=0$ $\quad l(D_1)=\{f\in \mathbb{R}(M) \mid (f)\geq 0\}=\{M上全纯函数\}=\mathbb{C}$

若$d(D_1)=m$时成立. $d(D_1)=m+1$时

设 $D_1=n\cdot p+\cdots$ $\quad A_{D_1}=\{f\in l(D_1) \mid v_p(f)>-n\}$

$B_{D_1}=\{f\in l(D_1) \mid v_p(f)=-n\}$

则 $A_{D_1}\cup B_{D_1}=l(D_1)$ $\quad A_{D_1}\subset l(D_1-p)$. 则由归纳 $\dim A_{D_1}<\infty$.

若$B_{D_1}\neq\phi$ 取 $f_0\in B_{D_1}$ $\quad f_0(z)=a_{-n}z^{-n}+\cdots$

则 $\forall f\in B_{D_1}$. $\exists\lambda$ s.t. $f-\lambda f_0\in A_{D_1}$ $\Rightarrow l(D_1)=\mathrm{span}\{f_0, A_{D_1}\}$.

故 $\dim l(D_1)\leq 1+\dim A_{D_1}<\infty$. $\quad$ 对$i(D)$类似

(iii) 设K由亚纯微分ω生成 则

$(\eta)-D\geq 0 \Leftrightarrow (\frac{\eta}{\omega})+K-D\geq 0$ $\quad$ 故 $\varphi: i(D)\to l(K-D)$

$\eta\mapsto\frac{\eta}{\omega}$ 为同构 #

Cor3.12 M为紧黎曼曲面

(i) 对有效因子D. $\dim L(D) \le d(D)+1$.

(ii) 特别地 $\dim L(p) \le 2$ $\forall p \in M$ 等号 $\Leftrightarrow$ M与S同构

(iii) $\dim \mathcal{H} < \infty$ $\mathcal{H}$为M上全纯1-形式构成的空间.

Pf. (i) 由上面证明不难得到

(ii) $\dim L(p) \le d(p)+1=2$

若取等. 则 $\exists f \in L(p)$. f不为常值 $(f)+p\ge 0 \Rightarrow$ P为f唯一极点

则 $f: M \to S$ 为一一全纯映射. 即同构

(iii) 取全纯微分ω 生成K为有效因子.

则 $\dim \mathcal{H} = \dim \Omega(0) = \dim L(K) \le d(K)+1$

故 $\mathcal{H}$ 有限维 #

§3.2 Hodge定理

Def 3.2.1 ω为1-形式. 若ω $*\omega$均为闭形式. 则称ω为$\boxed{\text{调和形式}}$

全纯形式 $\Leftrightarrow$ (1,0)型调和形式

$\mathcal{H}^1 = \{$调和形式全体$\}$

Lemma 3.2.1 $\mathcal{H}^1 = \mathcal{H} \oplus \overline{\mathcal{H}}$. $\mathcal{H} = \{\bar{\omega} / \omega \in \mathcal{H}\}$

Pf. $\omega \in \mathcal{H}$ 则 $\bar{\omega}$为(0,1)型. $*\bar{\omega} = \sqrt{-1}\,\bar{\omega}$ 闭

则 $\overline{\mathcal{H}} \subset \mathcal{H}^1 \Rightarrow \mathcal{H} \oplus \overline{\mathcal{H}} \subset \mathcal{H}^1$

对$\omega \in \mathcal{H}^1$. $\omega = \dfrac{\omega + \sqrt{-1} * \omega}{2} + \dfrac{\omega - \sqrt{-1} * \omega}{2} \subset \mathcal{H} \oplus \overline{\mathcal{H}}$ #

M紧 $\omega_1 . \omega_2 \in A^1(M)$. 定义 $(\omega_1, \omega_2) \triangleq \int_M \omega_1 \wedge * \bar{\omega}_2$

$\|\omega\| = \sqrt{(\omega, \omega)}$

Lemma 3.2.2 M紧 则

(i) ω为M上调和形式, $(\omega, df) = 0$ $\quad \forall f \in A^0(M)$

特别 调和形式恰当 $\Leftrightarrow$ 它为0

(ii) $\omega = \omega_0 + df$ 闭. ω_0调和 $f \in A^0(M)$

则 $\|\omega\| \geq \|\omega_0\|$. 取等 $\Leftrightarrow$ $\omega = \omega_0$

pf. (i) 即证 $(df,\omega)=0$ $\quad (df,\omega)=\int_M df\wedge *\bar{\omega} \overset{*\bar\omega\text{闭}}{=} \int_M d(f*\bar{\omega}) \overset{\text{Stokes}}{=} 0$

若ω调和恰当，则 $\omega=dh$. $\quad \|\omega\|^2=(\omega,\omega)=(dh,\omega)=0$

(ii) $\|\omega\|^2=(\omega_0+df,\omega_0+df)$

$=(\omega_0,\omega_0)+(df,\omega_0)+(\omega_0,df)+(df,df)$

$=\|\omega_0\|^2+\|df\|^2\geq\|\omega_0\|^2$ 取等 $\Leftrightarrow df=0\Leftrightarrow\omega=\omega_0$

Thm 3.2.3 (Hodge定理) M紧. $\forall\omega\in A^1(M)$

$\exists!\,\omega_h\in\mathcal{H}^1$，和差一个常数意义下唯一 $f,g\in A^0(M)$，

s.t. $\omega=\omega_h+df+*dg$

Rmk. 这是一个正交分解.

若ω闭，则无第三项. 因为 $\|*dg\|^2=\int_M *dg\wedge **d\bar{g}$

$=\int_M d(\bar{g}*dg)=0$

$\Rightarrow$ de Rham上同调类中有唯一调和代表元

Cor 3.2.4 M紧，则 $H^1_{dR}(M)\cong\mathcal{H}^1$

特别地 $\dim H^1_{dR}(M)=2\dim\mathcal{H}$ $\quad$ 记$\dim\mathcal{H}=g$为M的$\boxed{\text{亏格}}$

e.g. $g(S)=0$. $\quad g(\mathbb{C}/\Lambda)=1$

Cor 3.2.5 M紧. $n\in\mathbb{Z}_+$. $\forall p\in M$. B为p附近坐标邻域

z为B上坐标函数 $z(p)=0$

则$\exists M$上亚纯微分η 以p为唯一极点.

且p附近 $\eta = d(\frac{1}{z^n}) + \eta_1$ η_1为p附近全纯微分

Pf. 不妨 $z(B)=D$ $B_{\frac{1}{2}} = \{q\in B \mid |z(q)|<\frac{1}{2}\}$

取 $\rho\in C^\infty(M)$ s.t. $\rho|_{B_{\frac{1}{2}}}=1$ $\rho|_{M-B}=0$

考虑$M-\{p\}$上的1-形式 $\omega' = \begin{cases} d(\rho\,\frac{1}{z^n}) & q\in B \\ 0 & q\notin B \end{cases}$

$B_{\frac{1}{2}}$内. $\omega'-\sqrt{-1}*\omega'=0$. 则$\omega'-\sqrt{-1}*\omega'$可视为$M$上光滑1-形式

Hodge分解为 $\omega'-\sqrt{-1}*\omega' = \omega_h' + df + *dg$

令$\omega=\omega'-df=\sqrt{-1}*\omega'+\omega_h'+*dg$

(i) ω在$M-\{p\}$调和: $\omega=\omega'-df$闭 $*\omega=-\sqrt{-1}\omega'+*\omega_h'-dg$闭

(ii) $B_{\frac{1}{2}}$内 $\omega'=\sqrt{-1}*\omega'=d(\frac{1}{z^n})$

$\omega-d(\frac{1}{z^n})=-df=\omega_h'+*dg$ 调和.

令$\eta=\frac{1}{2}(\omega+\sqrt{-1}*\omega)$ 则η为所求 #

Rmk. 由此可得紧黎曼面上总有非零调和与非平凡亚纯函数

$\mathcal{H}$的标准基$\{\varphi_1\cdots\varphi_g\}$. 则$\mathcal{H}=\operatorname{span}\{\varphi_1\cdots\varphi_g,\bar\varphi_1\cdots\bar\varphi_g\}$

令 $\Phi: \mathcal{H}\to\mathbb{C}^g$

$\omega\mapsto(\int_M\omega\wedge\bar\varphi_1\ \cdots\int_M\omega\wedge\bar\varphi_g)$ 为同构

§3.3 Riemann-Roch公式

Thm 3.3.1 (Riemann-Roch) M紧，亏格为g.

则$\forall D$ $\quad \dim l(D) = \dim i(D) + (1-g) + d(D)$

下面关注它的证明

ω为M上亚纯微分且留数为0. $P_1 \cdots P_k$为极点.

P_i处取较坐标邻域B_i. 由$\int_{\partial B_i} \omega = 2\pi \mathrm{Res}_{P_i}(\omega) = 0$.

则ω在$B_i - \{P_i\}$恰当 即$\exists g_i$ s.t. $\omega = dg_i$

则可拼成M上光滑函数g.

定义 $\boxed{\text{奇异积分}}$ $\int_M \omega \wedge \eta = \int_M (\omega - dg) \wedge \eta$ $\qquad$ (η闭)

Rmk. (i) 可验证该定义不依赖g的选取

(ii) 若η也恰当 $\eta = df$.

则$\int_M \omega \wedge \eta = \int_M (\omega - dg) \wedge df = -\int_M d(f(\omega - dg)) = 0$

(iii) $\omega = dg$ $g \in \mathbb{R}(M)$ $\Leftrightarrow$ $\forall \eta$闭 $\int_M \omega \wedge \eta = 0$

Lemma 3.3.2 在Cor 3.2.5中 可取$\eta_1 \cdots \eta_n$. s.t. $\int_M \eta_j \wedge \overline{\varphi_i} = 0$ ($\forall i = 1, \cdots, g$)

Pf. 在Cor 3.2.5中取$\eta_1' \cdots \eta_n'$

又 $\Phi: \mathcal{H} \to \mathbb{C}^g$
$\qquad \varphi \mapsto (\int_M \varphi \wedge \overline{\varphi_1}, \cdots, \int_M \varphi \wedge \overline{\varphi_g})$ 为同构.

取线性组合 s.t. $\int_M \varphi \wedge \overline{\varphi_i} = \int_M \eta' \wedge \overline{\varphi_i}$, 再令$\eta = \eta' - \varphi$即可 $\qquad$ #

设 $D=\sum_{i=1}^{m} n_i p_i \ (n_i>0)$. 则由引理. $\exists$ 亚纯微分 $\tau_{p_i}^1, \cdots \tau_{p_i}^{n_i}$

s.t. B_i 内 $\tau_{p_i}^k = d\left(\frac{1}{z^k}\right)+\eta_i^k$ η_i^k 全纯.

$\{\tau_{p_i}^1, \cdots \tau_{p_i}^{n_i}\}_{i=1}^{m}$ 为 M 上无关亚纯微分. 张成 $m(D)$

则 $\dim m(D)=\sum_{i=1}^{m} n_i = d(D)$

Lemma 3.3.3 (i) $\forall f\in l(D)$, $df\in m(D)$

(ii) $\tau\in m(D)$ 则 $\tau=df$. $f\in l(D) \Leftrightarrow \int_M \tau\wedge\varphi_i=0 \ \forall i$.

pf. (i) $\nu_{p_i}(f)+n_i\geq 0$. 则 $\exists \lambda_i^k$ s.t. $df-\sum_{i,k}\lambda_i^k\tau_{p_i}^k\in\mathcal{H}$.

又 $\int_M (df-\sum_{i,k}\lambda_i^k\tau_{p_i}^k)\wedge\overline{\varphi_j}=0 \Rightarrow df\in \operatorname{span}\{\tau_{p_i}^k\}=m(D)$

(ii) $\Rightarrow$ 已证

$\Leftarrow$ 则 $\int_M \tau\wedge\varphi=0 \ (\forall\varphi\in\mathcal{H}')$. 故 $\exists f$ s.t. $\tau=df$ #

$\forall\varphi\in\mathcal{H}$. 由 $\tau_{p_i}^k$ 构造 $\exists M-\{p_i\}$ 上函数 g s.t.

p_i 附近 $g=\frac{1}{z^k}+f$. $\tau_{p_i}^k=dg$ f 全纯

则 $\int_M \tau_{p_i}^k\wedge\varphi=\int_M(\tau_{p_i}^k-dg)\wedge\varphi$

$=\int_{M-B_i}(\tau_{p_i}^k-dg)\wedge\varphi=-\int_{M-B_i}dg\wedge\varphi$

$=\int_{\partial B_i} g\varphi=\int_{\partial B_i}\frac{1}{z^k}\varphi$

$\varphi=(\sum a_j z^j)dz$

$=2\pi\sqrt{-1}\,a_{k-1}$

定义 $S: m(D) \to \mathcal{H}$

$$T \mapsto \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{j=1}^{g} \left(\int_M T \wedge \varphi_j\right) \varphi_j$$

$T: \mathcal{H} \to m(D)$

$$\varphi = \left(\sum a_k^i z^k\right) dz \mapsto \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n_i} a_{k-1}^i T_{P_i}^k$$

Lemma 3.3.4 (i) $\ker S = \operatorname{Im} d$ (ii) $\ker T = i(D)$

(iii) $\dim \operatorname{Im} S = \dim \operatorname{Im} T$

Pf. (i) $T \in \ker S \Leftrightarrow \int_M T \wedge \varphi_j = 0 \ (\forall j) \Leftrightarrow T \in \operatorname{Im} d$

(ii) $\omega \in i(D) \Leftrightarrow \omega \in \mathcal{H}$ 且在 P_i 附近 $\omega = \left(\sum a_k^i z^k\right) dz$

则 $a_k^i = 0 \quad k \le n_i - 1$

$\Leftrightarrow \omega \in \ker T$

(iii) $\varphi_j = \left(\sum_k a_{jk}^i z^k\right) dz$.

则 $S(T_{P_i}^k) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{j=1}^{g} \left(\int_M T_{P_i}^k \wedge \varphi_j\right) \varphi_j = \sum_{j=1}^{g} a_{j(k-1)}^i \varphi_j$

$T(\varphi_j) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n_i} a_{j(k-1)}^i T_{P_i}^k$

则 S, T 矩阵互为转置 $\Rightarrow \dim \operatorname{Im} S = \dim \operatorname{Im} T$ #

回到定理证明

Step 1. D 有效 若 $D=0$ 易证

$D \geq 0$ $d(D) > 0$ 则

$\dim \ell(D) = \dim \ker d + \dim \operatorname{Im} d = 1 + \dim \ker S$

$= 1 + \dim m(D) - \dim \operatorname{Im} S = 1 + \dim m(D) - (\dim \mathcal{H} - \dim \ker T)$

$= 1 + d(D) - g + \dim i(D)$

Cor 3.3.5 K为M上典范因子. 则 $d(K)=2g-2$

特别地. 若$g=1$. 则存在处处非零全纯微分

Pf. $g=0$. 则 $M\cong S$. 取 $\omega=dz$ 则 $K=(\omega)=-2\infty$ $d(K)=-2$

$g\geq 1$ 则 $\exists\omega\in\mathcal{H}$ $K=(\omega)\geq 0$

且 $l(K)\cong i(0)=\mathcal{H}$ $i(K)\cong l(0)=\mathbb{C}$

$g=\dim\mathcal{H}=\dim l(K)=2+d(K)-g$. #

Step2 $K-D$有效 则 $\dim l(K-D)=\underset{\dim i(D)}{\underset{\parallel}{\dim i(K-D)}}+\underset{\dim l(D)}{\underset{\parallel}{d(K-D)}}+\underset{2g-2-d(D)}{\underset{\parallel}{1-g}}$

Step3 D一般 若$l(D)\neq 0$ 则$\exists f_0\in l(D)$ $(f_0)+D\geq 0$

则公式对 $D_0=(f_0)+D$成立 则对D也成立

若$i(D)\neq 0$ 同理.

若$l(D)=i(D)=0$. $D=D_1-D_2$. D_1,D_2有效

则可证 $\dim l(D_1)\leq\dim l(D_1-D_2)+d(D_2)=d(D_2)$

$\quad\parallel$

$\dim i(D_1)+d(D_1)+1-g$

$\geq d(D_1)+1-g$

故 $d(D)=d(D_1)-d(D_2)\leq g-1$ 同理 $d(K-D)\leq g-1$

$d(D)\geq d(K)-(g-1)=g-1\Rightarrow d(D)=g-1$

综上 Riemann-Roch公式得证

§3.4 若干应用

(1) Bergman 度量

Thm3.5.1 M紧，$g>0$ 则$\forall p\in M$，$\exists$全纯微分ω s.t. $\omega(p)\neq 0$

pf 否则$\exists p\in M$ s.t. $\forall \omega\in\mathcal{H}$ $\omega(p)=0$

$\mathcal{H}\subset i(p)=\{\omega \mid (\omega)-p\geq 0\}\subset\mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{H}=i(p)$

$\dim \ell(p)=\dim i(p)+d(p)+1-g=2$ 则M与S 矛盾! #

$G=\sum_{i=1}^{g}\varphi_i\otimes\bar{\varphi}_i$ 则称为Bergman度量

(2) 亚纯函数的丰富性

Thm3.4.2 (i) $d(D)\geq 2g-1$ 则 $\dim \ell(D)=d(D)+1-g$

(ii) $d(D)=g+n$ 时 $\dim \ell(D)\geq 1+n$ $g=0$ 取等

pf (i) $d(K-D)=d(K)-d(D)<0$ 则 $i(D)\cong \ell(K-D)=0$

(ii) $\dim \ell(D)=\dim i(D)+d(D)+1-g$

$\geq d(D)+1-g=1+n$

$g=0$ 由(i)易证取等 #

Cor3.4.3 (i) $\forall p\in M$ $\exists$亚纯f s.t. f以p为唯一极点 重数$\leq g+1$

(ii) . . . . 零 . . .

(iii) $\forall p\neq q\in M$ $\exists$亚纯f s.t. $f(p)\neq f(q)$

(iv) $\forall p\in M$ $\exists$亚纯f s.t. p为单零点

(v) $g\geq 1$ $\exists$亚纯f s.t. f的分歧叶数$\leq g$

(3) 亚纯函数域

Def 3.4.1 K为复函数域. 若$\exists z\in K$ s.t. z对于$\mathbb{C}$为超越元.

$[K:\mathbb{C}(z)]<\infty$. 则称K为一元代数函数域

Thm 3.4.4 $\mathcal{M}(M)$为一元代数函数域.

若z为M上有n个极点的亚纯函数. 则 $[\mathcal{M}(M):\mathbb{C}(z)]=n$

e.g. (i) 取z为$\mathbb{C}$上标准复坐标. 则得 $\mathcal{M}(S)=\mathbb{C}(z)$

(ii) $\forall p\in\mathbb{C}/\Lambda$ $\dim L(2p)=d(2p)+1-g=2$

则$L(2p)$中有非常值亚纯函数f以p为唯一极点. 重数2

又重数不为1(否则为S) 则 $[\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda):\mathbb{C}(f)]=2$

Thm 3.4.5 $z:M\to N$为紧黎曼面间非常值全纯映射.

z重数为n. 则 $[\mathcal{M}(M):z^*\mathcal{M}(N)]=n$

Def 3.4.2 K为域. 若群同态 $v:K^*\to\mathbb{Z}$ 满

且$v(f+g)\geq\min\{v(f),v(g)\}$ $\forall f,g\in K^*$. 则称v为K上一个$\boxed{\text{赋值}}$

Rmk. (i) $v(1)=v(-1)=0$ $v(f)=v(-f)$

(ii) $v(f)\neq v(g)$时. $v(f+g)=\min\{v(f),v(g)\}$

(iii) $\mathbb{C}\subset K$ 则$v(c)=0$ $\forall c\in\mathbb{C}^*$

Prop 3.4.6 M紧. v为$\mathbb{R}(M)$上赋值 则$\exists!\, p\in M$ s.t $v=v_p$

Thm 3.4.7 M, N紧 $\varphi: \mathbb{R}(N)\to\mathbb{R}(M)$域同态.

且限制在$\mathbb{C}$上为Id. 则$\exists!$ 全纯映射 $h: M\to N$, s.t. $\varphi=h^*$.

Pf. $\mathbb{R}(N)$上定义赋值 $v_p(f)=v_p(\varphi(f))$

则$\exists!\, h(p)\in N$ s.t. $v_p=v_{h(p)}$ $(*)$

下证 $\varphi(f)(p)=f(h(p))$ $(\forall f\in\mathbb{R}(N), p\in M)$ (Δ)

$(*)$: $v_p(\varphi(f))=v_{h(p)}(f)$ 则 $h(p)$为f的零点或极点时(Δ)成立

一般 $c\in\mathbb{C}$ 则 $f(h(p))=c \Leftrightarrow v_{h(p)}(f-c)>0$

$\Leftrightarrow v_p(\varphi(f-c))=v_p(\varphi(f)-c)>0 \Leftrightarrow \varphi(f)(p)=c$

可证h是全纯的 #

Cor 3.4.8 φ为域同构 则h为黎曼曲面间全纯同构

(4) 椭圆函数

Def 3.4.3 $M=\mathbb{C}/\Lambda$为黎曼环面. $\mathbb{R}(M)$中元素称为$\boxed{\text{椭圆函数}}$

由上一节 $\exists$亚纯函数$\wp$. 以$[0]$为唯一极点 重数为2

看作$\mathbb{C}$上亚纯函数 则$\wp$以Λ为双极点集

在原点附近，$\wp = a_{-2}z^{-2} + a_{-1}z^{-1} + \cdots$

则 $0 = \sum_{P} \mathrm{Res}_P(\wp dz) = a_{-1}$

则 $\wp$ 可归一化为 $\wp = z^{-2} + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$

$\mathbb{C}$ 上的亚纯函数 $\wp(z) - \wp(-z)$ 无极点，双周期 $\Rightarrow$ 有界全纯

故 $\wp(z) - \wp(-z) = \wp(0) - \wp(0) = 0$

$\Rightarrow \wp = z^{-2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \cdots$

可算得 $(\wp')^2 = 4\wp^3 - 20a_2\wp - 28a_4$

Thm 3.4.9 (Weierstrass) $\mathcal{R}(\mathbb{C}/\Lambda) = \mathbb{C}(\wp, \wp')$

pf. $\wp'$ 关于 $\mathbb{C}(\wp)$ 的极小多项式为 $f(y) = y^2 - 4\wp^3 + 20a_2\wp + 28a_4$

故 $[\mathbb{C}(\wp)(\wp') : \mathbb{C}(\wp)] = 2$

由 $[\mathcal{R}(\mathbb{C}/\Lambda) : \mathbb{C}(\wp)] = 2$ 即得 #

记 $g_2 = 20a_2$, $g_3 = 28a_4$. 则 $\wp$ 由 g_2, g_3 完全决定

$\Lambda = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle$

Lemma 3.4.10 (i) $\wp'$ 的零点为 $\frac{\omega_1}{2}$, $\frac{\omega_2}{2}$, $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ 且为单零点

(ii) $\wp(\frac{\omega_1}{2})$, $\wp(\frac{\omega_2}{2})$, $\wp(\frac{\omega_1+\omega_2}{2})$ 互不相同

则 $4w^3 - g_2 w - g_3 = 0$ 三个根不同. $\Delta_0 = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$.

椭圆函数理论：若 $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ $\exists \mathbb{C}/\Lambda$ s.t. $\wp = \frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 \cdots$

$(a_2 = \frac{1}{20}g_2,\ a_4 = \frac{1}{28}g_3)$

(5) 嵌入定理

Def 3.4.4 $\boxed{\text{复流形}}$

Def 3.4.5 全纯浸入，全纯嵌入

M 紧黎曼曲面，$f_0, f_1, \cdots, f_n$ 非零亚纯，$\nu = \min\limits_{i=0,\cdots,n} \nu_p(f_i)$

定义 $(f_0 : f_1 : \cdots : f_n)(p) = [(z^{-\nu} f_0)(p), \cdots (z^{-\nu} f_n)(p)]$

Lemma 3.4.11 $f_0 \cdots f_n$ 为 M 上非零亚纯函数，$p \in M$ 附近坐标 z。若 $\exists\, i \neq j$, s.t. $f_i(p) \neq 0$, $\nu_p(f_j) = 1$，则 p 为如上映射的非奇异点。

Pf. 不妨 $f_0(p) \neq 0$, $\nu_p(f_1) = 1$

记 $f = (f_0 : f_1 : \cdots : f_n)$，则 $f(p) \in U_0$

U_0 上坐标映射 $\phi_0([z_0 : \cdots : z_n]) = \left(\frac{z_1}{z_0}, \cdots \frac{z_n}{z_0}\right)$

则 $\phi \circ f(z) = \left(\frac{f_1(z)}{f_0(z)}, \cdots \frac{f_n(z)}{f_0(z)}\right)$

且 $\frac{\partial}{\partial z}\Big|_{z=0} \frac{f_1}{f_0} = \frac{1}{f_0(p)} \frac{\partial}{\partial z} f_1(p) \neq 0$ 故 p 非奇异。 #

Lemma 3.4.12 (i) $f: M \to N$ 全纯映射，$\phi: N \to N'$ 全纯嵌入

若 $p, q \in M$, $f(p) \neq f(q)$，则 $\phi \circ f(p) \neq \phi \circ f(q)$

若 p 为 f 的非奇异点，则 p 也为 $\phi \circ f$ 的非奇异点。

(ii) $B\subset \mathcal{R}(M)$ 为子向量空间. $\{g_i\}_{i=0}^{n}$ $\{h_i\}_{i=0}^{n}$ 为 B 的两组基

则若 $(g_0:g_1\cdots g_n)(p)\neq(g_0:g_1\cdots:g_n)(q)$ 时, 有

$(h_0:h_1\cdots h_n)(p)\neq(h_0:h_1\cdots:h_n)(q)$

且 p 为 $(g_0:g_1\cdots:g_n)$ 非奇异点时 p 也为 $(h_0:h_1\cdots:h_n)$ 的非奇异点.

Thm 3.4.13 (嵌入定理) M 紧, 亏格 g 则 $\exists$ 全纯嵌入 $\varphi: M\to \mathbb{C}P^{g+1}$

pf. $\forall p\in M$. 令 $D=(2g+1)p$. 则 $\dim \ell(D)=d(D)+1-g=g+2$

设 $\{h_0,\cdots h_{g+1}\}$ 为 $\ell(D)$ 的基 定义

$\varphi=(h_0\cdots h_{g+1}): M\to \mathbb{C}P^{g+1}$

$g=0$ 时取 $h_0=1$. h_1 为 $\ell(p)$ 中非平凡亚纯函数 则 $\varphi=h_1$ 为全纯同构

$g\geq 1$: $q\neq q'\in M$. 令 $D_1=D-q$ $D_2=D-q-q'$

$\ell(D_2)\subset \ell(D_1)\subset \ell(D)$ $\dim \ell(D_2)=g=\dim \ell(D_1)-1$

取 $f_1\in \ell(D_1)-\ell(D_2)$. 不妨 $q\neq p$ 则 $f_1(q)=0$ $f_1(p)=\infty$

把 $\{1,f_1\}$ 扩成 $\ell(D)$ 一组基 $\{f_0=1, f_1\cdots f_{g+1}\}$.

令 $\psi=(1:f_1\cdots:f_{g+1})$ 易证 $\psi(q)\neq\psi(q')$ 则 $\varphi(p)\neq\varphi(q')$

再证 φ 非奇异 $\forall q\in M$. 令 $D_1=D-q$. $D_2=D-2q$

同样 $\exists f_1\in \ell(D_1)-\ell(D_2)$ 非平凡亚纯

扩充为 $\{f_0=1, f_1\cdots f_{g+1}\}$ 为 $\ell(D)$ 的基

令 $\psi=(1:f_1\cdots f_{g+1})$ 以后证 q 为 ψ 的非奇异点

分 $q=p$, $q\neq p$ 两种情况讨论即可. #

(6) 平面曲线

Def 3.4.6 P为$\mathbb{C}^3$中齐次多项式. 则 $\{[z]\in\mathbb{CP}^2 \mid P(z)=0\}$ 为$\mathbb{CP}^2$中良定子集. 称为 **平面曲线**

M紧 $z: M\to S$ 为 n 个极点亚纯函数. 则由前讨论

$\exists$亚纯f. s.t. $\mathcal{K}(M)=\mathbb{C}(z,f)$ 且 f 对 $\mathbb{C}(z)$ 的极小多项式为n次

即 $Q(f)=f^n+r_1(z)f^{n-1}+\cdots+r_n(z)=0$ $\quad r_i(z)\in\mathbb{C}(z)$

通分. 则得互素的多项式 $S_i(z)$. s.t.

$$P(z,f)=S_0(z)f^n+\cdots+S_n(z)=0$$

定义P的齐次化 $P_0(w,x,y)=w^m P(\frac{x}{w},\frac{y}{w})$

$$M^*=\{[w,x,y]\in\mathbb{CP}^2 \mid P_0(w,x,y)=0\}$$

$$M_0^*=M^*\cap U_0=\{[1,x,y]\in\mathbb{CP}^2\mid P(x,y)=0\}$$

有如下性质.

(i) P_0在$\mathbb{CP}^2$上无孤立零点. 若 $P_0(w_1,x_1,y_1)=0$ 不妨 $x_1\neq0$

则 $(\frac{w_1}{x_1},\frac{y_1}{x_1})$ 为 $R(w,y)=P_0(w,1,y)$ 的零点.

又R在$\mathbb{C}^2$上无孤立零点. 故得证.

(ii) $M^*-M_0^*$ 有限 特别地 $\overline{M_0^*}=M^*$ 否则

$P_0(0,x,y)$ 在$\mathbb{CP}^2$中有无穷个解. 则 $P_0(0,x,1)$ 或 $P_0(0,1,x)$

有无穷个根. 则 $P_0(0,x,y)=0$. 矛盾!

(iii) $A=\{z, f$ 的极点$\}\cup\{dz, df$ 的零点$\}$ 则 A 有限.

$\forall p\neq q\in M-A$. 必有 $f(p)\neq f(q)$ 或 $z(p)\neq z(q)$

(iv) $B=z(A)\subset S$ B也有限.

若 $c\in\mathbb{C}-B$ $z^{-1}(c)=\{p_1\cdots p_n\}$

则 $P(c,f(p_i))=P(z(p_i),f(p_i))=P(z,f)(p_i)=0$

又 $p_i\in M-A$. $z(p_i)=z(p_j)$ 则 $f(p_i)\neq f(p_j)$ 即

$\{f(p_1),\cdots f(p_n)\}$ 为 $P(c,y)=0$ 的 n 个不同根

Thm 3.4.14 M 紧. 则 $\exists$ 平面曲线 M^* 和全纯映射

$\varphi: M\to\mathbb{C}P^2$. s.t. $\varphi(M)=M^*$. 且除有限集 A 外,

φ 为全纯嵌入

pf. A 如上 $\varphi: M\to\mathbb{C}P^2$ $\varphi=(1:z:f)$

$p\in M-A$ 时 $dz(p)\neq 0$ 则 p 为 φ 的非奇异点.

故 φ 在 $M-A$ 上为全纯嵌入

下证 $\varphi(M)=M^*$ $\varphi(M-A)\subset M_0^*\subset M^*$

$\varphi(M)=\varphi(\overline{M-A})\subset\overline{\varphi(M-A)}\subset M^*$.

反之 $E=\{[1,x,y]\mid x\in B, P(x,y)=0\}$ 有限 设 $[1,x_0,y_0]\in M_0^*-E$

则 $x_0\in\mathbb{C}-B$

由(iv) $z^{-1}(x_0)=\{p_1\cdots p_n\}$ 则 $\{f(p_1),\cdots f(p_n)\}$ 为 $P(x_0,y)$ 的所有根

又 $[1,x_0,y_0]\in M_0^*$ 有 $P(x_0,y_0)=0$ 则 $y_0=f(p_i)$

$[1,x_0,y_0]=[1,z(p_i),f(p_i)]=\varphi(p_i)\Rightarrow M_0^*-E\subset\varphi(M-A)$

$M^*=\overline{M_0^*-E}\subset\overline{\varphi(M-A)}=\varphi(M)$. #

Lemma 3.4.15 $\{p_1\cdots p_n\}$ 为紧黎曼面上 n 个点，则 $\exists$ 亚纯 h.
s.t. (i) $i\neq j$ 时 $h(p_i)\neq h(p_j)$ (ii) h 在 p_i 附近全纯
(iii) $dh(p_i)\neq 0 \quad \forall i$

pf. $\forall q\in M-\{p_1\cdots p_n\}$ 令 $D_1=(2g+2n)q-2(p_1+\cdots+p_n)+3p_i$
$D_2=(2g+2n)q-2(p_1+\cdots+p_n)+2p_i$

$\ell(D_2)\subset\ell(D_1)$ $\quad \dim\ell(D_1)=1+\dim\ell(D_2)=g+4$

取 $f_i\in\ell(D_1)-\ell(D_2)$，则 f_i 以 p_i 为单极点，$p_j\,(j\neq i)$ 为零点，重数 ≥ 2

令 $h_i=\dfrac{f_i}{1+f_i}$，则 $h_i(p_j)=\delta_{ij}$ $\quad dh_i(p_i)\neq 0 \quad dh_i(p_j)=0\ (i\neq j)$

则取不同的 $c_i\in\mathbb{C}^*$，$h=\sum c_i h_i$ 即可 #

Thm 3.4.16 M 为紧黎曼面，则 $\exists$ 全纯嵌入 $\psi: M\to\mathbb{CP}^5$

pf. 取 Thm 3.4.14 中的 φ 与 A，令 $A_0=\varphi^{-1}(\varphi(A))$，$A_0$ 也有限

记 $A_0=\{p_0,\cdots p_n\}$ 再取 Lemma 3.4.15 中的 h

定义 ξ: $M\to\mathbb{CP}^3\times\mathbb{CP}^1$ 则只须证 ξ 为全纯嵌入
$p\mapsto(\varphi(p),h(p))$

ξ 为单的： 若 $p\neq q\in M-A_0$，则 $\varphi(p)\neq\varphi(q)$
$p\in A_0, q\in M-A_0$ 则 $\varphi(p)\neq\varphi(q)$
$p\neq q\in A_0$ 则 $h(p)\neq h(q)$

ξ 非退化： 若 $p\in M-A_0$ 则 p 为 φ 的非奇异点
$p\in A_0$ 则由 (iii) 条件为 h 的非奇异点

#

(7) Riemann-Hurwitz定理

$f: M\to N$ 为紧黎曼面间非常值全纯映射 则为分歧覆盖

$\forall p\in M$ 取局部坐标. f局部表示为 $f(z)=z^{\nu_p}$. ν_p为f在p的重数

$b_p(f)=\nu_p-1$ 称为f在p的$\boxed{\text{分歧数}}$ $B_f=\sum_p b_p(f)$ 为总分歧数

Thm 3.4.17 (Riemann-Hurwitz) f如上. 则

$$B_f = 2(g_M-1)-2n(g_N-1)$$ n为f的重数

Pf. 若$N=S$. 不妨设∞不为分歧值. 考虑亚纯微分 $\omega=dz$

则 $f^*\omega=df$ 为M上亚纯微分

$p\in f^{-1}(\infty)$时. p为$f^*\omega$的极点. 重数为2

$f(p)\in\mathbb{C}$时 且p不为分歧点. 则 $f^*\omega$ 在p全纯 非零点

为 - - . - - . 为 . . 重数为$b_p(f)$

$$\Rightarrow (f^*\omega)=\sum_p b_p(f)\,p-\sum_{p\in f^{-1}(\infty)}2p$$

则 $2g_M-2=\sum_p b_p(f)-2n=B_f-2n$.

若$g_N\geq 1$. 取非零全纯微分ω. A为ω零点集 B为f分歧点集.

$p\in B-f^{-1}(A)$时. p为$f^*\omega$零点, 重数$b_p(f)$.

$p\in f^{-1}(A)-B$时. p为$f^*\omega$的$n_{f(p)}$重零点.

$p\in B\cap f^{-1}(A)$时 p为$f^*\omega$的 $b_p(f)+[b_p(f)+1]n_{f(p)}$ 重零点.

$$2g_M-2=d((f^*\omega))=\sum_{p\in B-f^{-1}(A)}b_p(f)+\sum_{p\in f^{-1}(A)-B}n_{f(p)}+\sum_{p\in B\cap f^{-1}(A)}b_p(f)+[b_p(f)+1]n_{f(p)}$$

$$=\sum_{p\in B}b_p(f)+\sum_{p\in f^{-1}(A)}[b_p(f)+1]n_{f(p)}=B_f+\sum_{q\in A}n_q\sum_{p\in f^{-1}(q)}[b_p(f)+1]$$

$$=B_f+n\sum_{q\in A}n_q=B_f+n(2g_N-2)$$ #

Cor 3.4.18 $f: M\to N$ 为紧黎曼面间非常值全纯映射，则 $g_M \geq g_N$

Cor 3.4.19 $f: M\to S$ 为紧黎曼面上非常值亚纯函数
若 f 无分歧点，则 f 为全纯同构

代数曲线 $\longleftrightarrow$ 黎曼曲面，故可计算代数曲线的亏格

e.g. $p(z_0, z_1, z_2) = z_0^n + z_1^n + z_2^n$

定义 f: $M = \{[z_0, z_1, z_2] \in \mathbb{C}P^2 \mid p(z) = 0\} \longrightarrow \mathbb{C}P^1$

$[z_0, z_1, z_2] \longmapsto [z_0, z_1]$

$f^{-1}([0, 1]) = \{[0, 1, z_2] \mid z_2^n = -1\}$ 则 f 的重数为 n

f 有 n 个分歧点，每个为 n 重，则 $B_f = n(n-1)$

$g_M = \frac{B_f}{2} + 1 - n = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$

(8) 典范映射及应用

Def 3.4.7 M 为亏格大于1的紧黎曼面，若 M 上存在重数为2的亚纯函数，则称 M 为超椭圆型的

典范映射

$\mathcal{H}$ 的基 $\{\omega_1, \cdots \omega_g\}$ 定义

$\varphi: M \to \mathbb{C}P^{g-1}$ $\quad \omega_i = f_i(z)dz$

$p \mapsto [\omega_1(p), \cdots \omega_g(p)] = [f_1(p), \cdots f_g(p)]$

Prop 3.4.20 若 φ 不为单射，则 M 为超椭圆型

pf. $p \neq q \in M$，$\varphi(p)=\varphi(q)$，$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^*$ s.t. $f_i(p) = \lambda g_i(q)$

任取 $w \in \mathcal{H}$ 则 $w = \sum c_i w_i$

$w(p)=0 \Leftrightarrow \sum c_i f_i(p)=0 \Leftrightarrow \sum c_i g_i(q)=0 \Leftrightarrow w(q)=0$

$i(p+q) = \{(w) - p - q \geq 0\} = i(p)$ $\quad \dim i(p) = g-1$

则 $\dim l(p+q) = \dim i(p+q) + d(p+q) + 1 - g = 2$ #.

Cor 3.4.21 亏格为2的紧黎曼面是超椭圆的

Prop 3.4.22 若 M 非超椭圆，则 φ 为全纯嵌入

pf. 即证 φ 非退化 $\quad \forall p \in M$，$\dim i(0)=g$，$\dim i(p) = g-1$

$\dim i(2p) \leq \dim i(p) \leq \dim i(2p)+1$

$\dim l(2p) = \dim i(2p) + 3 - g \neq 2$. 则 $\dim i(2p) = g-2$

M 上存在以 p 为单零点的全纯微分 则再对 i 的差

s.t. $w_1(p) \neq 0$. w_2 以 p 为单零点 由(5)中引理是即证 #.

Cor 3.4.23 亏格为3的非超椭圆型 是全纯嵌入到 $\mathbb{C}P^2$

Thm 3.4.24 亏格为g的超椭圆面同构为次数为2g+2的平面曲线

pf. 存在 $x: M\to \mathbb{C}P^1$ 重数为2.

则总分歧数 $B_x=(2g-2)-2(0-2)=2g+2$

x重数为2，则分歧点必为2重. 故有$2g+2$个分歧点 $P_1\cdots P_{2g+2}$

$q_1\neq q_2$为极点. $x(P_i)=a_i$

定义 $j: M\to M$. 若$p=P_i$，则$j(p)=p$
否则，$\exists!\, p'\neq p$ s.t. $x(p')=x(p)$ 令 $j(p)=p'$

则j全纯. $j^2=1$，$j^*x=x\circ j=x$

$j^*\circ j^*=1$ 则j^*在$\mathcal{H}$上特征值为±1 若为1，则 $j^*w=w$
w诱导$\mathbb{C}P^1$上全纯微分 $w=0$

故 $j^*w=-w\ (w\in\mathcal{H})$

令 $D=(g+1)(q_1+q_2)$ 则$\dim l(D)=d(D)+1-g=g+3$

j^*视作$l(D)$上线性变换 按特征值分解为 $l(D)=l^+(D)\oplus l^-(D)$

$l^+(D)=\mathrm{span}\{1, x, \ldots, x^{g+1}\}$ $\dim l^+(D)=g+2$，$\dim l^-(D)=1$

故$\exists y\in l(D)$ s.t. $j^*y=-y$ 则 $y(P_i)=0$

$y\in l(D)\Rightarrow$极点$\leq 2g+2\Rightarrow$零点$\leq 2g+2$. 故$(y)=P_1+\cdots P_{2g+2}-(g+1)(q_1+q_2)$

令$g=(x-a_1)\cdots(x-a_{2g+2})$ 计算可知 $(y^2)=(g)$.

故$\exists c\in\mathbb{C}^*$ s.t. $y^2=cg$. 定义 $f: M\to\mathbb{C}P^2$ $f=(1:x:y)$

则 $f(M)$为$P(x,y)=y^2-cg(x)$齐次化定义的平面曲线 #

Prop 3.4.25. M 超椭圆. x, y 如上. 则

$\omega_1 = \frac{dx}{y}$, $\omega_2 = \frac{x\,dx}{y}$, $\cdots$ $\omega_g = \frac{x^{g-1}dx}{y}$ 为 $\mathcal{H}$ 的一组基

Cor 3.4.26 M 超椭圆. $f: M \to S$ 亚纯. 若 f 的重数不超过 g.

则为偶数

§3.5 Abel-Jacobi定理

Prop 3.5.1 ω为M上闭1-形式. 若任意闭曲线σ,

有 $\int_\sigma \omega = 0$ 则ω恰当

pf. 固定 $p_0\in M$ $\quad f: M\to\mathbb{C}$ $\quad$ 由条件良定. $df=\omega$ #

$$p\mapsto \int_{\sigma_{p_0p}}\omega$$

Prop 3.5.2 σ为紧黎曼面上闭曲线. 则$\exists!$调和闭形式

ω_σ, s.t. $\forall$闭1-形式η, 有 $\int_\sigma \eta = \int_M \omega_\sigma\wedge\eta$

pf. 取 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$ s.t.

对$j=1,\cdots,n$ $\quad \sigma([t_{j-1},t_j])$ 包含于M的一个坐标圆盘D^j中

对应坐标函数z_j

进一步地 可取 $0<r<1$ s.t. $\sigma([t_{j-1},t_j])\subset D_r^j=\{p\in D^j \mid |z_j(p)|<r\}$

考虑D_r^j中亚纯函数 $\dfrac{z-z(\sigma(t_j))}{z-z(\sigma(t_{j-1}))}$. $\quad$ 单零点 $\sigma(t_j)$

单极点 $\sigma(t_{j-1})$

取 $1>r'>r$ $\quad \psi_j\in C^\infty(M)$ $\quad$ s.t. $\begin{cases}\psi_j(p)=1 & \forall p\in D_r^j\\ \psi_j(p)=0 & \forall p\in M-D_{r'}^j\end{cases}$

定义 $f_j: M-\sigma(t_{j-1})\to\mathbb{C}$

$$p\mapsto\begin{cases} e^{\psi_j\log\frac{z-z(\sigma(t_j))}{z-z(\sigma(t_{j-1}))}} & p\in M-D_r^j\\ \dfrac{z-z(\sigma(t_j))}{z-z(\sigma(t_{j-1}))} & p\in D_r^j\end{cases}$$

令$f=f_1\cdots f_n$ 则f在M上良定义

令 $\omega^i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{df}{f}$ 则 ω^i 为 M 上光滑 1-形式

设 η 为闭 1-形式　取以 $\sigma(t_j)$ 为中心的坐标圆盘 B^j

B^j 内 $\eta = dg_j$

$$\int_M \omega^i \wedge \eta = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{M-\bigcup_j B^j_\varepsilon} \omega^i \wedge \eta$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{M-\bigcup_j B^j_\varepsilon}\frac{df_j}{f_j}\wedge\eta$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{D^j - B^{j-1}_\varepsilon - B^j_\varepsilon}\frac{df_j}{f_j}\wedge dg_j$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{D^j - B^{j-1}_\varepsilon - B^j_\varepsilon} -d\left(g_j\frac{df_j}{f_j}\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\left(\int_{\partial B^{j-1}_\varepsilon}+\int_{\partial B^j_\varepsilon}\right) g_j\frac{df_j}{f_j}$$

$$= \sum_{j=1}^n g_j(\sigma(t_j)) - g_j(\sigma(t_{j-1})) = \int_\sigma \eta.$$

由 Hodge 分解 ∃ 调和 1-形式 ω_σ,　s.t. $\omega^i = \omega_\sigma + dg$

则 ω_σ 为所求且唯一.　#

称 ω_σ 为 σ 的对偶形式

Prop 3.5.3 σ 闭曲线. f 为 σ 附近定义的非零光滑复函数.

则 $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_\sigma \frac{df}{f} \in \mathbb{Z}$

(可由前一命题方法证明)

设 G, T 的对偶形式为 ω_G, ω_T. 则

$$\int_M \omega_G \wedge \omega_T = \int_G \omega_T \in \mathbb{Z} \text{ 称为 } G, T \text{ 的 } \boxed{\text{相交数}}$$

可证：亏格 g 的闭曲面上，存在绕过给定点的 $2g$ 条闭曲线 $G_1 \cdots G_{2g}$

且 G_i 与 G_{g+i} 相交数为 1，其它相交数为 0

$G_1 \cdots G_{2g}$ 交于一公共点

Thm 3.5.4 η 为 M 上有单极点 $\{P_1 \cdots P_k\}$ 的亚纯微分

ω 为 M 上全纯微分，取 $G_1 \cdots G_{2g}$ 如上.

记 $\pi_i = \int_{G_i} \omega$. $\quad N_i = \int_{G_i} \eta$.

则：
$$\sum_{i=1}^{g} (\pi_i N_{g+i} - \pi_{g+i} N_i) = 2\pi\sqrt{-1} \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}_{P_j}(\eta) \int_{P_0}^{P_j} \omega$$

其中 P_0 为 $M_0 = M - \{G_1 \cdots G_{2g}\}$ 中一点

Rmk ω, η 任意闭 1-形式，则

$$\int_M \omega \wedge \eta = \sum_{i=1}^{g} \left[\int_{G_i} \omega \int_{G_{g+i}} \eta - \int_{G_{g+i}} \omega \int_{G_i} \eta\right]$$

Prop 3.5.5 $\{G_i\}$ 如上. 若全纯微分 ω s.t. $\int_{G_i} \omega = 0 \ (\forall i)$. 则 $\omega = 0$

pf. 由条件亦有 $\int_{G_i} \bar{\omega} = 0$

则 $\|\omega\|^2 = \int_M \omega \wedge *\bar{\omega} = \sqrt{-1} \int_M \omega \wedge \bar{\omega} \overset{\text{双线性关系}}{=\!=} 0$

则 $\omega = 0$ #

Cor 3.5.6 $\exists\mathcal{H}$的基$\{\omega_i\}_{i=1}^{g}$ s.t. $\int_{G_i}\omega_j=\delta_{ij}$.

Pf. 任取一组基$\{\omega_i'\}$. 只要证$(\int_{G_i}\omega_j')_{g\times g}$非退化.

若$\sum_{j=1}^{g}c_j\int_{G_i}\omega_j'=0$ $\quad i=1,\cdots g$

则$\int_{G_i}\sum_{j=1}^{g}c_j\omega_j'=0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{g}c_j\omega_j'=0 \Rightarrow c_j=0$ #

称符合条件的基称为**典则基**. 记$Z=(\int_{G_{g+i}}\omega_j)_{g\times g}$

Prop 3.5.7 Z对称, 且$\mathrm{Re}(Z)$正定对称

Pf. 由双线性关系.

$$0=\int_M\omega_i\wedge\omega_j=\sum_{k=1}^{g}[\delta_{ki}\int_{G_{g+k}}\omega_j-\delta_{kj}\int_{G_{g+k}}\omega_i]$$

$$=\int_{G_{g+i}}\omega_j-\int_{G_{g+j}}\omega_i \quad \text{故}Z\text{对称}$$

同理$\int_M\omega_i\wedge\overline{\omega}_j=-\sqrt{-1}\,\mathrm{Im}(\int_{G_{g+i}}\omega_j)$.

$\forall c_i\in\mathbb{R}$ 令$\omega=\sum_{i=1}^{g}c_i\omega_i$, 则

$$0\le\|\omega\|^2=\sqrt{-1}\int_M\omega\wedge\overline{\omega}$$
$$=\sqrt{-1}\sum_{j,k=1}^{g}c_jc_k\int_M\omega_j\wedge\overline{\omega}_k$$
$$=\sum_{j,k=1}^{g}\mathrm{Im}(\int_{G_{g+j}}\omega_k)c_jc_k \quad \text{故}\mathrm{Im}Z\text{正定}$$

#

Prop 3.5.8. $\{G_i\}$ 如上 对偶形式 ω_{G_i}. 则

(1) $\{\omega_{G_i}\}$ 为 H^1 的一组基

(2) 若 G 为闭曲线，则

$$\omega_G = \sum_{i=1}^{g} n_{g+i}\,\omega_{G_i} - n_i\,\omega_{G_{g+i}} \qquad n_i \text{ 为 } G.\ G_i \text{ 相交数}$$

pf. (i) 若 $\sum_{i=1}^{2g} c_i \omega_{G_i} = 0$. 则 $0 = \int_M \left(\sum_{i=1}^{2g} c_i \omega_{G_i} \wedge \omega_{G_j}\right)$

$1 \le j \le g$. 则 $0 = -c_{g+j}$ $\quad g+1 \le j \le 2g$ 时. $0 = c_{j-g}$

(ii) 由调和形式的唯一性 只须证 如此定义的 ω_G

s.t. $\int_M \omega_G \wedge \omega_{G_{i_0}} = \int_G \omega_{G_{i_0}}$ $\quad (\forall i_0 = 1, \cdots 2g)$

$$LHS = \int_M \sum_{i=1}^{g} n_{g+i}\,\omega_{G_i} \wedge \omega_{G_{i_0}} - \sum_{i=1}^{g} n_i\,\omega_{G_{g+i}} \wedge \omega_{G_{i_0}}$$

$$= \begin{cases} n_{g+i_0}, & i_0 = 1, \cdots g \\ -n_{i_0-g} & i_0 = g+1, \cdots 2g \end{cases}$$

$$RHS = \int_G \omega_{G_{i_0}} = n_{i_0}$$ #.

任意闭曲线 G 定义泛函 $\varphi(G): \mathcal{H} \to \mathbb{C}$

$$\omega \mapsto \int_G \omega.$$

所有闭曲线生成的泛函群体 记作 $\mathrm{Im}\,\varphi$

则记商群 $\mathcal{H}^*/\mathrm{Im}\,\varphi$ 为 M 的 Jacobian 簇 记 $J(M)$

固定$p_0\in M$. ω_i为$\mathcal{H}$的一组典则基

对$p\in M$. 选择一条$p_0\to p$的曲线

令$\mu(p)\in\mathcal{H}^*$为 $\mu(p)(\omega)=\int_{p_0}^{p}\omega$

$\mu(p)$在$J(M)$中的像与曲线选取无关. 故定义了

$$\mu: M\to J(M)$$ 称为Abel-Jacobi映射.

若$D=\sum_k n_k p_k$为一个因子. 定义

$$\mu(D)=\sum_k n_k\,\mu(p_k)\in J(M)$$

Thm 3.5.9 M亏格g紧黎曼面. 则D为主要因子 $\Leftrightarrow$ $d(D)=0$, $\mu(D)=0\in J(M)$

Lemma 3.5.10 $p\neq q\in M$. 则$\exists!$亚纯微分ω_{pq}. s.t.

(i) ω_{pq}仅有p,q两个极点 且为单极点. p处留数1 q处留数-1

(ii) $\int_{G_i}\omega_{pq}=0$ $(\forall i=1,\cdots g)$

pf. $\ell(-p-q)=\phi$ 则$0=\dim i(-p-q)+d(-p-q)+1-g$. $\Rightarrow \dim i(-p-q)=g+1$

故$\mathcal{H}\subsetneq i(-p-q)$ $\exists$非全纯的亚纯微分ω 则必以p,q为单极点.

归一化不妨p处留数为1 则q处留数为-1. 可验证(ii) #.

Lemma 3.5.11 ω_i为$\mathcal{H}$的典范基. 则ω_{pq}还满足$\int_{G_{g+i}}\omega_{pq}=2\pi\sqrt{-1}\int_p^q\omega_i$

pf. $\sum_{j=1}^{g}\Big(\underbrace{\int_{G_j}\omega_i}_{\delta_{ij}}\int_{G_{g+j}}\omega_{pq}-0\Big)=2\pi\sqrt{-1}\Big(\int_{p_0}^{p}\omega_i-\int_{p_0}^{q}\omega_i\Big)$

#

回到Abel定理的证明

$d(D)=0$. 则把 D 写作 $D=\sum_{j=1}^{k}(P_j-q_j)$ $P_i\neq q_j$

若 $D=(f)$. 则 $\int_{G_i}\frac{df}{f}=2\pi\sqrt{-1}\alpha_i$ $\alpha_i\in\mathbb{Z}$.

且 $\frac{df}{f}-\sum_{j=1}^{k}\omega_{p_jq_j}=\sum_{i=1}^{g}c_i\omega_i$ 为全纯微分

则 $c_i=\int_{G_i}\sum_{j=1}^{g}c_j\omega_j=\int_{G_i}\frac{df}{f}=2\pi\sqrt{-1}\alpha_i$.

另一方面 $\int_{G_{g+i}}\frac{df}{f}-\sum_{j=1}^{k}\int_{G_{g+i}}\omega_{p_jq_j}=\sum_{j=1}^{g}2\pi\sqrt{-1}\alpha_j\int_{G_{g+i}}\omega_j$

$$\Rightarrow \alpha_{g+i}-\sum_{j=1}^{k}\int_{q_j}^{p_j}\omega_i=\sum_{j=1}^{g}\alpha_j\int_{G_{g+j}}\omega$$

则 $\mu(D)(\omega_i)=\alpha_{g+i}-\sum_{j=1}^{g}\alpha_j\int_{G_{g+j}}\omega_i$

$$=\sum_{j=1}^{g}\left(\alpha_{g+j}\int_{G_j}-\alpha_j\int_{G_{g+j}}\right)\omega_i$$

故 $\mu(D)(\omega)=\sum_{j=1}^{g}\left(\alpha_{g+j}\int_{G_j}-\alpha_j\int_{G_{g+j}}\right)\omega$

则 $\mu(D)\in \mathrm{Im}\,\phi$. 也即 $\mu(D)=0\in J(M)$

反之. 若 $\mu(D)=0\in J(M)$ 则 $\exists\beta_i\in\mathbb{Z}$ s.t. $\mu(D)(\omega)=\sum_{j=1}^{2g}\beta_j\int_{G_j}\omega$.

令 $\eta=\sum_{j=1}^{k}\omega_{p_jq_j}-2\pi\sqrt{-1}\sum_{j=1}^{g}\beta_{g+j}\omega_j$.

则 $\int_{G_i}\eta=-2\pi\sqrt{-1}\beta_{g+i}$

同理可计算 $\int_{G_{g+i}}\eta = 2\pi\sqrt{-1}\beta_i$

则任一条经过 D 的闭曲线 G. $\int_G \eta \in 2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z}$.

故定义 $f: M\to S$ $\quad p\mapsto e^{\int_{p_0}^{p}\eta}$. 则 $(f) = D$ #.

称 $\ker d/P$ 为 M 的 $\boxed{\text{Picard群}}$. 记为 $Pic_0(M)$

故有单射 $j: Pic_0(M)\to J(M)$ $\quad j([D]) = \mu(D)$

Lemma 3.5.12 M 亏格 g 紧黎曼面 (U,z) 为局部坐标系

则 $\exists$ U 中 g 个不同的点 $P_1\cdots P_g$ 及对应的基 $\varphi_1\cdots\varphi_g$

s.t. $(f_i(P_j))_{g\times g}$ 非退化. $\varphi_i = f_i\,dz$ 为局部表示

令 $\Phi: M^g\to Pic_0(M)$ $\quad (x_1\cdots x_g)\mapsto \sum_{i=1}^{g}(x_i - p_i) \mod P$

记 $j\circ\Phi = J$.

Thm 3.5.13 $\Phi: M^g\to Pic_0(M)$ 为满射. j 为同构

故 $J: M^g\to J(M)$ 也为满射

Thm 3.5.14 $g=1$ 时. $\mu: M\to J(M)$ 均为全纯同构.
$J: M\to J(M)$