第四章 曲面与上同调

§4.1 全纯线丛的定义

$T_p(M) = \mathrm{span}\{\frac{\partial}{\partial x}|_p, \frac{\partial}{\partial y}|_p\}$

复化 $T_p(M)\otimes\mathbb{C} = T_{ph}M \oplus \overline{T_{ph}M}$

$T_{ph}M = \mathrm{span}\{\frac{\partial}{\partial z}|_p\}$

$\overline{T_{ph}M} = \mathrm{span}\{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}|_p\}$

$T_hM = \bigcup_{p\in M} T_{ph}M$

U为局部坐标邻域 定义

$\psi: \bigcup_{p\in U} T_{ph}M \to U\times\mathbb{C}$

$a\frac{\partial}{\partial z}|_p = X_p \mapsto (p,a)$

定义 T_hM 的拓扑由 $\{\bigcup_{p\in U} T_{ph}M \mid U\subset M\}$ 生成

此时ψ为同胚 且 $\pi: T_hM\to M$, $X_p\mapsto p$ 为连续开映射

T_hM 为2维复流形

Def 4.1.1 M为紧复曲面, L为2维复流形, $\pi: L\to M$ 全纯满射

若∃M的开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 及双全纯映射 $\psi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha\times\mathbb{C}$

s.t. (1) $\psi_\alpha(\pi^{-1}(p)) = \{p\}\times\mathbb{C}$ $\forall p\in U_\alpha$

(2) $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$ 时, ∃全纯函数 $g_{\beta\alpha}: U_\alpha\cap U_\beta\to\mathbb{C}^*$

s.t. $\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}(p,a) = (p, g_{\beta\alpha}(p)\cdot a)$ $\forall p\in U_\alpha\cap U_\beta, a\in\mathbb{C}$

则称L为M上全纯线丛, π为丛投影, ψ_α 为局部平凡化, $g_{\beta\alpha}$ 为连接函数, $\pi^{-1}(p)$ 为纤维

连接函数的性质：

(i) $g_{\alpha\alpha}=1$ (ii) $g_{\beta\alpha}\cdot g_{\alpha\gamma}\cdot g_{\gamma\beta}=1$ (*)

若一族函数 $\{g_{\alpha\beta}\}$ 符合(*)，则定义

$$L=\bigsqcup_{\alpha}(U_\alpha\times\mathbb{C})/\sim$$

$(p,a)\in U_\alpha\times\mathbb{C}$, $(q,b)\in U_\beta\times\mathbb{C}$. $(p,a)\sim(q,b)\Leftrightarrow p=q,\ b=g_{\beta\alpha}(p)a$

$\pi: L\to M$
$[p,a]\mapsto p$

则 L 为 M 上全纯线丛.

e.g. (i) 平凡线丛 $L=M\times\mathbb{C}$. π 为第一分量投影 $\psi_\alpha=Id$
$g_{\alpha\beta}=1$.

(ii) 全纯余切丛 $T_p^*M\otimes\mathbb{C}=T^*_{p,h}M\oplus\overline{T^*_{p,h}M}$ $T^*_hM=\bigcup_{p\in M}T^*_{p,h}M$

$\pi: T_h^*M\to M$
$\omega_p\mapsto p$

$\psi: \pi^{-1}(U)\to U\times\mathbb{C}$
$adz|_p=\omega_p\mapsto(p,a)$

$$\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}(p,a)=\left(p,\left(\frac{\partial}{\partial z_\beta}\Big|_p z_\alpha\right)a\right)\Rightarrow h_{\beta\alpha}(p)=\frac{\partial}{\partial z_\beta}\Big|_p z_\alpha.$$

(iii) $\mathbb{C}P^1$ 上全纯线丛

$E=\{([z],w)\in\mathbb{C}P^1\times\mathbb{C}^2 \mid \exists\lambda\in\mathbb{C}\ s.t.\ w=\lambda z\}$

$\pi: E\to\mathbb{C}P^1$
$([z],w)\mapsto[z]$

$\mathbb{C}P^1=U_0\cup U_1$

$\psi_1\circ\psi_0^{-1}([z],a)$
$=([z],\frac{z_1}{z_0}a)$

$\psi_0: \pi^{-1}(U_0)\to U_0\times\mathbb{C}$
$([z],w_0,w_1)\mapsto([z],w_0)$

$\psi_1: \pi^{-1}(U_1)\to U_1\times\mathbb{C}$
$([z],w_0,w_1)\mapsto([z],w_1)$

Def 4.1.2 L 为 M 上全纯线丛

若连续映射 $s: M \to L$ s.t. $\pi \circ s = Id$. 则称 s 为一个截面

全纯截面全体记为 $\Gamma_h(L)$. 为复向量空间

e.g. (i) 平凡线丛的截面

$s: M \to M \times \mathbb{C}$ 为截面
$\Leftrightarrow s = (Id, f)$. f 符合对应条件

(ii) 全纯(余)切丛的截面为(余)切向量场

平凡截面 $\Leftrightarrow$ 函数

线丛局部平凡
$\Downarrow$
$s \Leftrightarrow$ 局部函数.

U_α 为 M 开覆盖 ψ_α 局部平凡化. 则

$$\psi_\alpha(s(p)) = (p, s_\alpha(p))$$

则 $s_\beta(p) = g_{\beta\alpha}(p)\, s_\alpha(p) \quad \forall p \in U_\alpha \cap U_\beta \qquad (**)$

Def 4.1.3 一组亚纯函数 $s_\alpha: U_\alpha \to \mathbb{C}$ 若满足 $(**)$

则称为 L 上一个亚纯截面 记为 $s = \{s_\alpha\}$

亚纯截面全体用 $\mathcal{M}(L)$ 表示

Rmk. 亚纯微分 $\Leftrightarrow$ 全纯余切丛的亚纯截面

Def 4.1.4 L_1, L_2 为 M, N 上复线丛，π_1, π_2 为投影

若全纯映射对 $(F, f): (L_1, M) \to L_2(N)$ s.t. $\pi_2 \circ F = f \circ \pi_1$

且 $F|_{\pi^{-1}(p)}$ 上为线性同态，则称 (F, f) 为 $\boxed{\text{丛同态}}$.

Def 4.1.5 丛同构

e.g 拉回丛

$f: M \to N$ 为全纯映射 L 为 N 上线丛.

$f^*L = \{(m, l) \in M \times L \mid f(m) = \pi(l)\}$ 是一线丛：

$\pi_f: f^*L \to M$ $\quad$ U 为 N 中开集

$(m, l) \mapsto m$ $\quad$ 则 $\psi_f: \pi_f^{-1}(f^{-1}(U)) \to f^{-1}(U) \times \mathbb{C}$

$(m, l) \mapsto (m, \underline{\pi_{\mathbb{C}}}(\psi(l)))$

第二个分量投影

$\psi_{\beta f} \circ \psi_{\alpha f}^{-1}(m, a) = (m, g_{\beta\alpha}(f(m))\, a)$

$F: f^*L \to L$ $\quad$ 则 (F, f) 为 $f^*L \to L$ 的丛同态.

$(m, l) \mapsto l$

L_1, L_2 为 M 上两个同构线丛，$F: L_1 \to L_2$ 为丛同构

通过加细开覆盖 L_1, L_2 以 $\{U_\alpha\}$ 同时为平凡化开覆盖.

φ_α, ψ_α 为 L_1, L_2 的平凡化　$g_{\beta\alpha}$, $h_{\beta\alpha}$ 为 L_1, L_2 的连接函数

$$F_\alpha = \psi_\alpha \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1} : U_\alpha \times \mathbb{C} \to U_\alpha \times \mathbb{C}$$
$$(p, a) \mapsto (p, f_\alpha(p) \cdot a).$$

$f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^*$ 全纯.　则 $g_{\beta\alpha} = f_\beta^{-1} h_{\beta\alpha} f_\alpha$　(△)

L_1, L_2 同构 ⟺ ∃ 满足(△)的一族 $\{f_\alpha\}$

Cor 4.1.1　L 同构于平凡丛 ⟺ ∃ 平凡化开覆盖 U_α 及全纯 $f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^*$
s.t. $g_{\beta\alpha} = f_\beta^{-1} f_\alpha$

M 上全纯丛在同构下等价类全体记为 $\mathcal{L}(M)$

若 L 由连接函数 $g_{\beta\alpha}$ 决定.　则 $h_{\beta\alpha} = (g_{\beta\alpha})^{-1}$ 仍满足连接函数条件　决定线丛记为 $-L$ 或 L^*. 称为对偶丛

L_1, L_2 两个线丛. 连接函数 $g^1_{\beta\alpha}$ 和 $g^2_{\beta\alpha}$　则 $g_{\beta\alpha} = g^1_{\beta\alpha} g^2_{\beta\alpha}$ 也符合连接函数条件　决定线丛 称为 L_1, L_2 的张量积.

记为 $L_1 + L_2$ 或 $L_1 \otimes L_2$

在上述运算下 $\mathcal{L}(M)$ 成为交换群 称为线丛类群

§4.2 因子与线丛

$D=\sum n_i P_i$　取 M 的局部坐标邻域覆盖 $\{U_\alpha\}$

U_α 内取亚纯函数 f_α s.t. 在 U_α 内 $(f_\alpha)=D\cap U_\alpha$

若 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi$　则 $f_{\beta\alpha}\triangleq\frac{f_\beta}{f_\alpha}$ 在 $U_\alpha\cap U_\beta$ 上既无极点，也无零点

$\{f_{\beta\alpha}\}$ 决定 M 上全纯线丛，记为 $\lambda(D)$

Rmk (i) $\lambda(D)$ 同构于平凡丛 $\Leftrightarrow$ D 为主要因子

若 $D=(f)$，则 $f_\alpha=f|_{U_\alpha}$，$f_{\beta\alpha}=1$　$\lambda(D)$ 平凡

反之　则 $\exists$ 全纯标架 $\{\phi_\alpha\}$ $U_\alpha\to\mathbb{C}^*$　s.t. $f_{\beta\alpha}=\phi_\beta^{-1}\phi_\alpha$

故 $U_\alpha\cap U_\beta$ 上 $f_\beta\phi_\beta=f_\alpha\phi_\alpha$

故 $\{f_\alpha\phi_\alpha\}$ 定义了 M 上整体亚纯函数 f

且 U_α 上 $(f_\alpha\phi_\alpha)=(f_\alpha)+(\phi_\alpha)=D\cap U_\alpha$.　故 $D=(f)$.

(ii) $\lambda(-D)=-\lambda(D)$.　$\lambda(D_1+D_2)=\lambda(D_1)+\lambda(D_2)$

Lemma 4.2.1　$\mathcal{L}(D)\cong\Gamma_h(\lambda(D))$

Pf. $\forall S\in\Gamma_h(\lambda(D))$. 局部表示 $\{S_\alpha: U_\alpha\to\mathbb{C}\}$　$S_\beta=f_{\beta\alpha}S_\alpha=\frac{f_\beta}{f_\alpha}S_\alpha$

故 $\frac{S_\alpha}{f_\alpha}$ 决定整体亚纯函数 $i(S)$

$(i(S)+D)\cap U_\alpha=(S_\alpha)-(f_\alpha)+D\cap U_\alpha=(S_\alpha)\geq0$　$\Rightarrow i(S)\in\mathcal{L}(D)$

$\forall f\in\mathcal{L}(D)$　令 $S_\alpha=f\cdot f_\alpha$　$(S_\alpha)=[(f)+D]\cap U_\alpha\geq0$

故 $\{S_\alpha\}$ 决定了 $j(S)\in\Gamma_h(\lambda(D))$　#

S为L的亚纯截面，局部表示为$\{S_\alpha\}$

U_α上S_α诱导因子(S_α) 则$(S_\beta)=(g_{\beta\alpha}S_\alpha)=(S_\alpha)$

故M上有整体因子D s.t. $D\cap U_\alpha=(S_\alpha)$

D为S诱导的因子 记为(S). S全纯$\Leftrightarrow (S)\geq 0$.

Lemma4.2.2 有线性同构 $\Gamma_h(L-\lambda(D))\simeq\{S\in\mathcal{M}(L)\mid (S)-D\geq 0\}$

特别地. $i(D)\simeq\Gamma_h(T_h^*M-\lambda(D))$

Pf. L连接函数$g_{\beta\alpha}$

$\forall S\in\Gamma_h(L-\lambda(D))$ 局部表示$\{S_\alpha:U_\alpha\to\mathbb{C}\}$ $S_\beta=g_{\beta\alpha}\frac{f_\alpha}{f_\beta}S_\alpha$

则$\{h_\alpha=f_\alpha S_\alpha\}$为亚纯截面$T(S)$的局部表示

$((T(S))-D)\cap U_\alpha=(S_\alpha)\geq 0$.

$\forall S\in\mathcal{M}(L)$且$(S)-D\geq 0$ 局部表示$\{S_\alpha:U_\alpha\to S\}$.

则 $S_\beta=g_{\beta\alpha}S_\alpha$.

由$((S)-D)\cap U_\alpha)=(S_\beta)-(f_\beta)=(\frac{S_\beta}{f_\beta})\geq 0$.

又 $\frac{S_\beta}{f_\beta}=g_{\beta\alpha}\frac{f_\alpha}{f_\beta}\frac{S_\alpha}{f_\alpha}$ 故$\{\frac{S_\alpha}{f_\alpha}:U_\alpha\to\mathbb{C}\}$为$L-\lambda(D)$的全纯截面 #

Lemma4.2.3 S为非零亚纯截面 则$L=\lambda((S))$

反之 $\forall D$ $\exists S\in\mathcal{M}(\lambda(D))$ s.t. $D=(S)$

e.g. ω为M上非零亚纯微分 $K=(\omega)$

则 $T_h^* M = \lambda(K)$. 则 $i(D) \cong \Gamma_h(\lambda(K-D))$

Cor 4.2.4 L为全纯线丛. 则

(i) 若$\dim \Gamma_h(L)>0$. 则 ∃有效因子D s.t. $L=\lambda(D)$

(ii) 若∃D_1 s.t. $\dim \Gamma_h(L-\lambda(D_1))>0$ 则 ∃D s.t. $L=\lambda(D)$

Pf. (i) $\dim \Gamma_h(L)>0$. 则∃全纯截面S. 则$L=\lambda((S))$

(ii) 由(i) ∃D_2 s.t. $L-\lambda(D_1)=\lambda(D_2)$ 故$L=\lambda(D_1+D_2)$ #.

Cor 4.2.5 L为紧黎曼面上全纯线丛 则$\dim \Gamma_h(L)<\infty$

Pf. $\dim \Gamma_h(L)=0$ 自动得证

否则 由 Cor 4.2.4 ∃D s.t. $L=\lambda(D)$

则$\dim \Gamma_h(L)=\dim \Gamma_h(\lambda(D)) = \dim \ell(D)<+\infty$. #

§4.3 层与预层

U为M上开集 $A^0(U)=\{U$上光滑函数全体$\}$

则 $C^\infty(p)=\bigsqcup_{U\ni p} A^0(U)/\sim$

$f\in A^0(U)\sim g\in A^0(V) \Leftrightarrow \exists W\subset U\cap V$ s.t. $f|_W=g|_W$

定义 $S^0=\bigcup_{p\in M} C^\infty(p)$.

$\forall$ 开集 $U\subset M$, $f\in A^0(U)$ 令 $O_f=\{[f]_p \mid p\in U\}\subset S^0$

$\{O_f\}_{U\subset M,\, f\in A^0(U)}$ 定义了 S^0的拓扑

令 $\pi: S^0\to M$
$[f]_p\mapsto p$.

Rmk. (i) π为连续满射 局部同胚.

(ii) $\pi^{-1}(p)=C^\infty(p)$ 为交换群

(iii) $S^0\to S^0$ $[f]_p\mapsto[-f]_p$ 为自同胚

(iv) $S^0\circ S^0 \triangleq \{(s_1,s_2) \mid \pi(s_1)=\pi(s_2)\}$

$S^0\circ S^0\to S^0$
$(s_1,s_2)\mapsto s_1+s_2$ 连续

S^0为M上光滑函数芽层 $C^\infty(p)$为p处光滑函数芽

Def 4.3.1 $\pi: S\to M$ 为拓扑空间到流形 M 的连续满射.

(i) π为局部同胚 (ii) $\forall p\in M$ $\pi^{-1}(p)$为交换群

(iii) $S\to S$
$s\mapsto -s$ 和 $S\circ S\to S$
$(s_1,s_2)\mapsto s_1+s_2$ 均连续 则 S为M上的层

$S_m=\pi^{-1}(m)$ 为m上的茎

e.g. (i) 平凡层: $S=M\times G$　　π 为第一分量投影

(ii) 摩天大厦层

$$S_p = M\sqcup G/p\sim 0$$

开集要么为 M 中不含 p 的开集，要么为 M 中含 p 开集去掉 p 后与 G 中若干元素之并

$$\pi: S_p \to M$$
$$m \mapsto m \ (m\in M)$$
$$g \mapsto p \ (g\in G)$$

(iii) 全纯函数芽层　　p 形式层 S^p，(p,q) 形式层 $S^{p,q}$

Def 4.3.2 S 为 M 上的层，U 为 M 开集

若连续映射 $f: U\to S$　s.t. $\pi\circ f = Id|_U$，则称 f 为 S 在 U 的截面

U 上截面全体记为 $\Gamma(S,U)$.　$\Gamma(S,M)$ 记为 $\Gamma(S)$

e.g. S^0 的截面

U 为 M 中开集，$f: U\to S^0$ 为截面

$\forall p\in U$，设 $f(p)=[g_p]_p$，由 f 连续，$\exists V_p\subset U$　s.t. $f(V_p)\subset O_{g_p}$

则 $f(q)=[g_p]_q$　($\forall q\in V_p$)　则 $g_p\in O(V_p)$

$V_p\cap V_q$ 非空时，任取 $r\in V_p\cap V_q$，则 $[g_p]_r = f(r) = [g_q]_r \Rightarrow g_p(r)=g_q(r)$

故 $\exists\, i(f)$　s.t. $i(f)|_{V_p} = g_p$，则定义 $i: \Gamma(S^0,U)\to O(U)$

反之 $\forall g\in A^0(U)$，令 $j(g)$: $U\to S^0$, $p\mapsto [g]_p$，则 $j: O(U)\to \Gamma(S^0,U)$

Def 4.3.3 M为黎曼曲面 若任意开集$U\subset M$对应交换群$S(U)$

$U\subset V$时有群同态. $\rho_{V,U}: S(V)\to S(U)$

且$U\subset V\subset W$时 $\rho_{W,U}=\rho_{W,V}\circ\rho_{V,U}$. 则$\{S(U),\rho_{UV}\}$称为预层

若S为层 则令$S(U)=\Gamma(S,U)$ $\rho_{V,U}$为限制同态 则为预层.

这个预层还满足:

(i) $U=\bigcup_i U_i$, U_i开. 对$s_i\in S(U_i)$

若$U_i\cap U_j$上有$\rho_{U_i,U_i\cap U_j}(s_i)=\rho_{U_j,U_i\cap U_j}(s_j)$. 则$\exists s\in S(U)$ s.t. $\rho_{U,U_i}(s)=s_i$

(ii) 若$\forall U_i$, 均有$\rho_{U,U_i}(s)=0$ 则$s=0$.

(i)(ii)的预层 称为完备预层

对预层$\{S(U),\rho_{UV}\}$. $\forall m\in M$. 令 $S_m=\bigsqcup_{U\ni m} S(U)/\sim$

$f\in S(U)\sim g\in S(V)\Leftrightarrow\exists W\subset U\cap V$ s.t. $\rho_{U,W}(f)=\rho_{V,W}(g)$

令$S=\bigcup_{m\in M}S_m$ 则为层

若$\{S(U),\rho_{UV}\}$完备. 则还有$\Gamma(S,U)\cong S(U)$

Def 4.3.4 层同态. 层同构

Def 4.3.5 子层. 商层

e.g. (i) 全纯截面层. L 为全纯线丛. $\Omega(L)(U)=\{L$ 在 U 上全纯截面$\}$.

则 $\{\Omega(L)(U), \rho_{UV}\}$ 诱导层 $\Omega(L)$

(ii) 理想层. $\forall p\in M$. 对包含 p 的开集 U 令

$$I_p(U)=\begin{cases}\{f\in O(U)\mid f(p)=0\} & p\in U\\ O(U) & p\notin U\end{cases}$$

诱导层称为理想层. 记 I_p 为全纯函数芽层的子层

$m\neq p$ 时. 理想层在 m 处的茎 = 全纯函数芽层在 m 处的茎

$m=p$ 时 $\qquad$ = 常数项为0的幂级数

故 O/I_p 同构于茎为 $\mathbb{C}$ 的摩天大厦层 S_p

即 $0\to I_p\to O\to S_p\to 0$ 正合

Lemma 4.3.1 L 为 M 上全纯线丛 D 有效 则有层正合列

$$0\to\Omega(L-\lambda(D))\to\Omega(L)\to S_D\to 0$$

pf. 不妨 $D=p$. (一般情形类似).

定义 $\Omega_p(L)(U)=\begin{cases}\{s\in\Omega(L)(U)\mid s(p)=0\} & p\in U\\ \Omega(L)(U) & p\notin U\end{cases}$

则诱导层 $\Omega_p(L)$ 为 $\Omega(L)$ 的子层

且有短正合列 $0\to\Omega_p(L)\to\Omega(L)\to S_p\to 0$

又 $\Omega(L-\lambda(p))(U)\cong\{s$ 为 L 在 U 上亚纯截面$\mid(s)-p|_U\geq 0\}$

$=\Omega_p(L)(U)$ $\qquad$ 故 $\Omega(L-\lambda(p))\cong\Omega_p(L)$

#

§4.4 层的上同调

$\varphi: S\to T$ 为层同态，则 φ 诱导 $\varphi^*: \Gamma(S)\longrightarrow\Gamma(T)$

$$s\longmapsto \varphi\circ s$$

短正合列 $0\to R\xrightarrow{i} S\xrightarrow{j} T\to 0$

则有 $0\to\Gamma(R)\xrightarrow{i^*}\Gamma(S)\xrightarrow{j^*}\Gamma(T)$

$\mathrm{Im}\, i^*=\ker j^*$: 即证 $\ker j^*\subset \mathrm{Im}\, j^*$ 取 $g\in\ker j^*$

则 $j\circ g(M)=0$ 则 $g: M\to S$ 可分解为

$g: M\xrightarrow{g'}\ker j\xrightarrow{k} S$ （k 为包含映射）

又 $i: R\to S$ 可分解为 $i: R\xrightarrow{i'}\mathrm{Im}\, i=\ker j\xrightarrow{k} S$

令 $f=(i')^{-1}\circ g': M\to R$ 则 $f\in\Gamma(R)$ 且 $i^*f=g$ ✓

但 j^* 一般不是满的，但 j^* 是"局部"满的：

$\forall f\in\Gamma(T)$ 由 j 满 $\exists s\in S_m$ s.t. $j(s)=f(m)$

取 m 的开邻域 U_m 及 $f_m\in\Gamma(S,U_m)$ s.t. $j\circ f_m=f|_{U_m}$

若 $U_m\cap U_n\neq\varnothing$ 则 $j\circ f_m|_{U_m\cap U_n}=j\circ f_n|_{U_m\cap U_n}$

故 $\exists g_{mn}\in\Gamma(R,U_m\cap U_n)$ s.t. $i^*g_{mn}=(f_m-f_n)|_{U_m\cap U_n}$

$\Rightarrow$ $g_{mn}+g_{no}+g_{om}=0$ $(*)$

若 $g_{mn}=g_m-g_n$ $(**)$ 则 $\exists s\in\Gamma(S)$ s.t. $s|_{U_m}=i^*g_m-f_m$

$(*)$: 1-次闭上链 $(**)$: 1-次上边缘链 则 $j^*s=f$.

Def 4.4.1 S 为 M 上的层. $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}$ 为开覆盖

对 $q\geq 0$. f 将 $\mathcal{U}$ 中 $q+1$ 个有序开集 $U_0,\cdots U_q$ 映到

$\Gamma(S, U_0\cap\cdots\cap U_q)$ 上的 $f(U_0\cdots U_q)$

且 (1) $U_0\cap\cdots\cap U_q=\phi$ 时 $f(U_0,\cdots U_q)=0$

(2) $f(\cdots U_i\cdots U_j)=-f(\cdots U_j\cdots U_i)$

这样一个映射 f 称为关于 $\mathcal{U}$ 的 q 次上链. q 次上链全体为 $C^q(\mathcal{U};S)$

$$\delta: C^q(\mathcal{U};S)\to C^{q+1}(\mathcal{U};S)$$

$$\delta f(U_0,\cdots U_{q+1})=\sum_{i=0}^{q+1}(-1)^i f(U_0\cdots\hat{U_i}\cdots U_{q+1})$$

Lemma 4.4.1 $\delta^2=0$.

Def 4.4.2 $\delta f=0$ 则称 f 为 q 次闭链 q 次闭链全体记 $Z^q(\mathcal{U};S)$

$f=\delta g$ 则称 f 为 q 次上边缘链. 其全体记为 $B^q(\mathcal{U};S)$

上同调群为 $H^q(\mathcal{U};S)=Z^q(\mathcal{U};S)/B^q(\mathcal{U};S)$

Rmk (i) $H^0(\mathcal{U};S)=\Gamma(S)$

(ii) $\varphi: S\to\mathcal{T}$ 层同态 诱导上同调群同态

$$\varphi^*: H^q(\mathcal{U};S)\to H^q(\mathcal{U};\mathcal{T})$$

$H^q(\mathcal{U};S)$与$\mathcal{U}$有关　若$\mathcal{U},\mathcal{V}$为两个开覆盖，$\mathcal{U}$为$\mathcal{V}$的加细

即 $\exists\ T:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ s.t. $U_\alpha\subset T(U_\alpha)$

则有 $H^q(\mathcal{V};S)\xrightarrow{T^*}H^q(\mathcal{U};S)$

可验证T^*与T无关，为单同态

S为M上的层，考虑M的所有开覆盖

$$H^q(M;S)=\bigsqcup_{\mathcal{U}}H^q(\mathcal{U};S)/\sim$$

$[f]\in H^q(\mathcal{U};S)\sim[g]\in H^q(\mathcal{V};S)\iff$

$\exists\ \mathcal{U},\mathcal{V}$的公共加细$\mathcal{W}$，s.t. $T_1^*[f]=T_2^*[g]$　$T_1:\mathcal{W}\to\mathcal{U}$

$T_2:\mathcal{W}\to\mathcal{V}$

Rmk (i) $H^0(M;S)=\Gamma(S)$

(ii) 若$H^1(M;R)=0$，则正合列 $0\to R\xrightarrow{i}S\xrightarrow{j}T\to0$

诱导正合列 $0\to\Gamma(R)\xrightarrow{i^*}\Gamma(S)\xrightarrow{j^*}\Gamma(T)\to0$

$\exists$连接同态$\delta^*:H^q(M;T)\to H^{q+1}(M;R)$

长正合列 $0\to\Gamma(R)\xrightarrow{i^*}\Gamma(S)\xrightarrow{j^*}\Gamma(T)\xrightarrow{\delta^*}H^1(M;R)$

$\xrightarrow{i^*}H^1(M;S)\xrightarrow{j^*}H^1(M;T)\cdots$

δ^*的构造在这里略去

Lemma 4.4.2 L 为全纯线丛 若 $H^1(M;\Omega(L))=0$.

则 $\exists D$ s.t. $L=\lambda(D)$

pf 有正合列 $0\to\Omega(L)\to\Omega(L+\lambda(p))\to S_p\to 0$

则有 $0\to\Gamma_h(L)\to\Gamma_h(L+\lambda(p))\to\mathbb{C}\to 0$

则 $\dim\Gamma_h(L+\lambda(p))\geq\dim\mathbb{C}=1$ 故由 Cor 4.2.4 即得 #

e.g. L 为 M 上全纯线丛. $\{U_\alpha\}$ 平凡化覆盖. $f_{\beta\alpha}$ 为连接函数

把 $f_{\beta\alpha}$ 看成 $\mathcal{O}^*$ 在 $U_\alpha\cap U_\beta$ 上的截面

则 $f_{\beta\alpha}$ 决定 $\mathcal{O}^*$ 关于 $\{U_\alpha\}$ 的 1-次闭链.

若 $H^1(M;\mathcal{O}^*)=0$. 则存在 U_α 上全纯 f_α s.t. $f_{\beta\alpha}=\frac{f_\alpha}{f_\beta}$

故 L 同构于平凡丛.

§4.5 上同调群的计算

Def 4.5.1 S为M上的层，$\mathcal{U}$为局部有限开覆盖，

$\phi_\alpha: S\to S$为自同态，且

(i) $\forall \alpha$，$\exists$闭集$K_\alpha\subset U_\alpha$，s.t. $m\notin K_\alpha$时，$\phi_\alpha|S_m=0$

(ii) $\sum\phi_\alpha=\mathrm{Id}$

则$\{\phi_\alpha\}$为从属$\mathcal{U}$的单位分解

若对每个局部有限的$\mathcal{U}$均有单位分解，则称S为强层

e.g. 光滑上复数层、P形式层、L值(p,q)形式层 等为强层

全纯函数芽层、全纯线丛L的全纯截面层 等不为强层

Thm 4.5.1 S为强层，则$H^q(M;S)=0\ (q\geq 1)$

Pf 以$q=1$为例，任取局部有限开覆盖$\{U_\alpha\}$

设$f\in Z^1(\mathcal{U};S)$，$\{\phi_\alpha\}$为单位分解

定义$g\in C^0(\mathcal{U},S)$ $\quad g(U_\alpha)=\sum_\gamma\phi_\gamma\circ(f(U_\gamma,U_\alpha))$

则 $\delta g(U_\alpha,U_\beta)=g(U_\beta)-g(U_\alpha)$

$$=\sum_\gamma[\phi_\gamma\circ(f(U_\gamma,U_\beta))-\phi_\gamma\circ(f(U_\gamma,U_\alpha))]$$

$$\overset{f\in Z^1(\mathcal{U};S)}{=\!=}\sum_\gamma\phi_\gamma(f(U_\alpha,U_\beta))=f(U_\alpha,U_\beta)$$

故$H^1(\mathcal{U};S)=0$，则$H^1(M;S)=0$ #

Def 4.5.2 S 为 M 上的层，若存在细层 $\{S_i\}$ 以及层同态正合序列

$$0 \to S \to S_0 \xrightarrow{d_0} S_1 \xrightarrow{d_1} S_2 \to \cdots$$

则称 S 存在 $\boxed{\text{细层分解}}$

Thm 4.5.2 若 S 有细层分解 $0 \to S \to S_0 \xrightarrow{d_0} S_1 \to \cdots$

诱导同态序列为 $0 \to \Gamma(S) \longrightarrow \Gamma(S_0) \xrightarrow{d_0^*} \Gamma(S_1) \to \cdots$

则有同构 $H^q(M;S) \cong \mathrm{Ker}\, d_q^* / \mathrm{Im}\, d_{q-1}^*$

Cor 4.5.3 $H^q(M;\mathbb{C}) \cong H^q_{dR}(M;\mathbb{C})$

Pf d 为外微分算子，则诱导群同态列

$$0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{E}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2 \to 0$$

由 Poincaré 引理，这是细层分解，则由 Thm 4.5.2 即得 #

定义 $H^{p,q}_{\bar\partial}(M) = \{\omega \in A^{p,q} \mid \bar\partial\omega = 0\} / \{\bar\partial\eta \mid \eta \in A^{p,q-1}\}$

为 (p,q) 次 $\boxed{\text{Dolbeault 上同调}}$

Lemma 4.5.4 (Dolbeault) f 为 $\mathbb{C}$ 上紧支光滑函数，则 $\exists\, \mathbb{C}$ 上光滑函数 g s.t. $\frac{\partial g}{\partial \bar z} = f$

Pf. 取 $g(w) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\mathbb{C}} \frac{f(z)}{z-w} dz \wedge d\bar z$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{f(z)}{w-z} dx\, dy$$ 可证 g 符合 #

Lemma 4.5.5 ω为开集U上(p,q)形式，则$\forall m\in U$，$\exists m$的邻域$V\subset U$，以及V上$(p,q-1)$形式η s.t. $\omega=\bar{\partial}\eta$

则有层正合列

$$0\to\mathcal{O}\to S^0\xrightarrow{\bar{\partial}}S^{0,1}\xrightarrow{\bar{\partial}}0$$

$$0\to\Omega^1\to S^{1,0}\xrightarrow{\bar{\partial}}S^{1,1}\xrightarrow{\bar{\partial}}0$$

Thm 4.5.6 $H^1(M;\mathcal{O})\cong H^{0,1}_{\bar{\partial}}(M)$ $\quad H^1(M;\Omega)\cong H^{1,1}_{\bar{\partial}}(M)$

Thm 4.5.7 (Runge) K为$\mathbb{C}$中紧集，$U\supset K$开，则(1)(2)等价

(1) 每个在K的一个邻域内全纯的函数可用U上全纯函数在K上一致逼近

(2) $U-K$的每个连通分支在U的闭包内非紧

Thm 4.5.8 M为$\mathbb{C}$中区域，则$H^1(M;\mathcal{O})=0$

Pf. 只须证 任给M上光滑函数，$\exists$光滑函数g s.t. $\frac{\partial g}{\partial\bar{z}}=f$

找一列紧集$\{K_i\}$ s.t. $\begin{cases}M=\bigcup_i K_i\\ K_i\subset \mathring{K}_{i+1}\\ M-K_i\text{的连通分支在}M\text{内的闭包非紧}\end{cases}$

取M上一列光滑函数ψ_i，s.t. $\psi_i|_{K_{i+1}}=1$.

令$\varphi_i=\begin{cases}\psi_1, & i=1\\ \psi_i-\psi_{i-1}, & i>1\end{cases}$ $\quad$ 则$\varphi_i|_{K_i}=0$ $\quad\sum\varphi_i=1$.

又$\exists\mathbb{C}$上光滑函数g_i s.t. $\frac{\partial g_i}{\partial\bar{z}}=\varphi_i f$ 则g_i在K_{i-1}的一个邻域全纯

则由Runge定理，$\exists M$上全纯h_i s.t. K_{i-1}上 $|g_i-h_i|<2^{-i}$.

定义 $g=\sum_{i=1}^{\infty} g_i-h_i$

则在K_i上, $g=\sum_{j=1}^{i} g_j-h_j+\underbrace{\sum_{j=i+1}^{+\infty} g_j-h_j}_{一致收敛}$ 光滑

$\frac{\partial g}{\partial \bar z}=\sum_j \varphi_j f=f$ 故 $\frac{\partial}{\partial \bar z}g=f$ #

推广到L值微分形式上.

$m\in M$. m附近的L值(p,q)形式为 $\sum_i w_i s_i$

w_i为局部(p,q)形式. s_i为L的局部截面

取m处全纯截面s 则 $s_i=f_i s$

$\sum w_i s_i=\sum f_i w_i s=ws$.

定义 $\bar\partial(\sum w_i s_i)=(\bar\partial w)s$

同样有 $0\to\Omega^0(L)\to S^0(L)\xrightarrow{\bar\partial} S^{0,1}(L)\to 0$

$0\to\Omega^1(L)\to S^{1,0}(L)\xrightarrow{\bar\partial} S^{1,1}(L)\to 0$

Thm 4.59 L为M的全纯线丛 则

$H^q(M,\Omega^p(L))\cong\{\bar\partial$闭L值(p,q)形式$\}/\{\bar\partial$恰当L值(p,q)形式$\}$

§4.6 欧拉数

紧支p形式全体记 $A_c^p(\mathbb{C})$. $H_c^p(\mathbb{C})$ 为紧支集 de Rham 上同调

Lemma 4.6.1 $H_c^2(\mathbb{C})\simeq\mathbb{C}$.

Pf. $\phi: A_c^2(\mathbb{C})\to\mathbb{C}$, $\omega\mapsto\int_{\mathbb{C}}\omega$. 若 $\omega=\omega'+d\eta$ 则 $\int_{\mathbb{C}}\omega=\int_{\mathbb{C}}\omega'$

故诱导 $\phi^*: H_c^2(\mathbb{C})\to\mathbb{C}$.

显然 ϕ^* 满. 若 $\int_{\mathbb{C}}\omega=0$ $\omega=f(x,y)dxdy$

则 f 紧支. 且 $\int_{\mathbb{C}}f\,dxdy=0$

取 $\mathbb{R}$ 上紧支的 ψ 且 $\int_{\mathbb{R}}\psi=1$ 令

$$\eta=\left[\int_{-\infty}^{x}f(s,y)ds\right]dy-\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(s,y)ds\right]\left[\int_{-\infty}^{x}\psi(u)du\right]dy-\psi(x)\left[\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{\infty}f(s,t)dsdt\right]dx$$

则 η 紧支 且 $\omega=d\eta$ #

Cor 4.6.2 连通紧黎曼面 M, 则 $H_{dR}^2(M;\mathbb{C})\simeq\mathbb{C}$.

设 S 为 M 上的层. 茎均为复线性空间. 且充分高阶上同调群为 0

定义 **欧拉数** $\chi(S)=\sum_{q=0}^{\infty}(-1)^q\dim H^q(M;S)$.

L 值全纯 p 形式芽层 $\Omega^p(L)$ 欧拉数记为 $\chi^p(L)$

$p=0$ 时记 $\chi(L)=\chi^0(L)$

e.g (i) $\chi(\mathbb{C}) = \sum_{q=0}^{\infty}(-1)^q \dim H^q(M;\mathbb{C})$
$= \sum_{q=0}^{2}(-1)^q \dim H^q_{dR}(M;\mathbb{C}) = 2-2g$

(ii) $\forall (0,1)$形式 ω. $\omega = \omega_h + \partial f + * dg$
$= \omega_h' + \bar\partial(f+\sqrt{-1}g)$. $(\omega_h' \in \mathcal{H})$

故 $\dim H^1(M;\mathcal{O}) = \dim H^{0,1}_{\bar\partial}(M) = \dim \mathcal{H} = g$.
故 $\chi(\mathcal{O}) = 1-g$

(iii) $\chi(S_D) \overset{\text{摩天大楼}}{=} \dim H^0(M;S_D) = \dim \Gamma(S_D) = d(D)$

Lemma 4.6.3 $0 \to S_1 \xrightarrow{\alpha} S_2 \xrightarrow{\beta} S_3 \to 0$ 为短正合列
则 $\chi(S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_3)$

Lemma 4.6.4 若 $\dim H^1(M;\Omega(L)) < \infty$. 则 $\exists D$ s.t. $L = \lambda(D)$

Pf $\dim H^0(M;\Omega(L)) = \dim \Gamma_h(L) < \infty$
考虑. $0 \to \Omega(L) \to \Omega(L+\lambda(np)) \to S_{np} \to 0$
故 $\chi(L+\lambda(np)) = \chi(L)+n$
则 n 充分大时. $\dim \Gamma_h(L+\lambda(D)) \geq \chi(L+\lambda(np)) \overset{n\text{充分大}}{>} 0$
由 Cor 4.2.4 即证 #

我们其实证明了 $\chi(\lambda(D)) = 1-g+d(D)$

第五章 曲面的复几何

§5.1 Hermite度量

Def 5.1.1 在每个T_pM上指定一个Hermite内积

$h(p)=\langle\cdot,\cdot\rangle_p$ 且任给全纯切丛的两光滑截面X_1, X_2,

有 $h(X_1,X_2)$ $p\mapsto\langle X_1(p),X_2(p)\rangle_p$光滑 则称$h$为 $\boxed{\text{Hermite度量}}$

记$h_\alpha=h(\frac{\partial}{\partial z_\alpha},\frac{\partial}{\partial z_\alpha})$为$U_\alpha$上光滑函数 则$h$可写为 $h_\alpha dz_\alpha\otimes d\bar{z}_\alpha$ (a)

X, Y局部表示 $X=a_\alpha\frac{\partial}{\partial z_\alpha}$ $Y=b_\alpha\frac{\partial}{\partial z_\alpha}$. 则 $h(X,Y)=a_\alpha h_\alpha\bar{b}_\alpha$

$U_\alpha\cap U_\beta$上 $h_\beta=h(\frac{\partial}{\partial z_\beta},\frac{\partial}{\partial z_\beta})=h(\frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\beta}\frac{\partial}{\partial z_\alpha},\frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\beta}\frac{\partial}{\partial z_\alpha})$

$$=\left|\frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\beta}\right|^2 h_\alpha \qquad (*)$$

反之若一族$\{h_\alpha\}$满足$(*)$. 则由(a)可定义一个Hermite度量

在U_α定义(1,1)-形式

$$\Omega_\alpha=\frac{\sqrt{-1}}{2}h_\alpha dz_\alpha\wedge d\bar{z}_\alpha=h_\alpha dx_\alpha\wedge dy_\alpha$$

$U_\alpha\cap U_\beta$上 $\Omega_\alpha=\Omega_\beta$ 故定义了整体(1,1)形式Ω

称为体积形式

再令 $\Theta_\alpha = \bar\partial\partial\log h_\alpha$

$U_\alpha\cap U_\beta$ 上 $\Theta_\beta = \bar\partial\partial\log\left(\left|\frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\beta}\right|^2 h_\alpha\right)$

$$= \bar\partial\partial\log h_\alpha + \bar\partial\partial\log\frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\beta} + \bar\partial\partial\log\overline{\frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\beta}}$$

$$= \bar\partial\partial\log h_\alpha$$

故 $\{\Theta_\alpha\}$ 也定义了整体 $(1,1)$ 形式. 记为 Θ. 称为曲率形式

$\Theta = \frac{K}{\sqrt{-1}}\Omega$. 则 K 称为 Gauss 曲率

$$K = -\frac{2}{h_\alpha}\frac{\partial^2\log h_\alpha}{\partial z_\alpha\partial\bar z_\alpha}$$

Thm 5.1.1 (Gauss-Bonet) h 为紧黎曼面 M 上任一 Hermite 度量

则 $\frac{1}{2\pi}\int_M K\Omega = \chi(M)$

pf. M 上任取亚纯微分 ω 零点. 极点全体为 $\{p_i\}$

ω 局部表示. $\omega = f_\alpha dz_\alpha$ 则 $f_\beta = f_\alpha\frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\beta}$.

结合 $(*)$ 可知 $|f_\beta|^2 h_\beta^{-1} = |f_\alpha|^2 h_\alpha^{-1}$.

则 $M-\{p_i\}$ 上有光滑函数 f s.t. 在 U_α 上均有 $|f_\alpha|^2 = f\cdot h_\alpha$

每个 p_i 处取坐标圆盘 (D_i, φ_i). $D_i(r) = \{p\in D_i \mid |\varphi_i(p)|<r\}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_M K\Omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_M\Theta = \lim_{r\to0}\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{M-\cup_i D_i(r)}\bar\partial\partial\log h_\alpha$$

$$= \lim_{r\to0}\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{M-\cup_i D_i(r)}-\bar\partial\partial\log f = \sum_i\lim_{r\to0}\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{\partial D_i(r)}\partial\log f$$

$$= \sum_i\lim_{r\to0}\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{\partial D_i(r)}\partial(\log f_i+\log\bar f_i-\log h_i) = \sum_i\lim_{r\to0}\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{\partial D_i(r)}\partial\log f_i$$

f_i 在 D_i 中表示为 $f_i = z^{n_i} g_i$，g_i 为 p_i 附近非零全纯

则原式 $= \sum_i \lim_{r\to 0} \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \int_{\partial D_i(r)} \partial \log z_i^{n_i} = -\sum_i n_i$

$= -d(|\omega|) = 2-2g = \chi(M)$ #

$\varphi: M \to N$ 为非退化全纯映射，h 为 N 上 Hermite 度量。

M 上定义 Hermite 度量 $\varphi^* h$，$\varphi^* h(X, Y) = h(\varphi_* X, \varphi_* Y)$

若 h' 为 M 上 Hermite 度量，φ 双全纯，$h' = \varphi^* h$，则称 φ 为全纯等距。

给定 h，在 T_pM 上有一个对称内积 g_p:

$g_p(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial}{\partial y_\alpha}) = 0 \qquad g_\alpha(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial}{\partial x_\alpha}) = g_p(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}, \frac{\partial}{\partial y_\alpha}) = h_\alpha$.

记为 $g_\alpha = h_\alpha(dx_\alpha \otimes dx_\alpha + dy_\alpha \otimes dy_\alpha)$，称作 Riemann 度量

σ 为 M 上曲线，定义 $L(\sigma) = \int_I \sqrt{g(\dot\sigma, \dot\sigma)}\, ds$ 为 σ 的长度

$d(p,q) = \inf\{L(\sigma) \mid \sigma$ 为连接 $p\, q$ 的曲线$\}$ 称为 $p\, q$ 的距离

若 $L(\sigma) = d(p,q)$，称 σ 为最短测地线。若一条曲线在

每一点附近均为最短测地线，则称为测地线。

e.g. (i) $\mathbb{C}$上 $h = dz\otimes d\bar{z}$ $K=0$

诱导 Riemann 度量 即欧氏度量

(ii) $\mathbb{C}$上 $h = \frac{4}{(1+|z|^2)^2} dz\otimes d\bar{z}$

$z = \frac{1}{w} \Rightarrow h = \frac{4}{(1+|w|^2)^2} dw\otimes d\bar{w}$ 为 S上 Hermite度量

$\Theta = \bar{\partial}\partial \log \frac{4}{(1+|z|^2)^2} = \frac{2}{(1+|z|^2)^2} dz\wedge d\bar{z} \Rightarrow K=1$.

(iii) M 亏格为1且紧 M上取非零全纯微分 w

$h = w\otimes\bar{w}$ $w = f_\alpha dz_\alpha$ 则 $h = |f_\alpha|^2 dz_\alpha\otimes d\bar{z}_\alpha$

$\Theta = \bar{\partial}\partial \log |f_\alpha|^2 = 0 \Rightarrow K=0$

$\pi: \tilde{M}\to M$为万有覆叠 则 $\pi^* h$ 完备平坦 则 $\tilde{M}\cong\mathbb{C}$

故 $M\cong\mathbb{C}/\Lambda$. 即同构于环度环面

(iv) D上 $h = \frac{4}{(1-|z|^2)^2} dz\otimes d\bar{z}$ 可算得 $K=-1$

$H = \{z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ 上 $g = \frac{dz\otimes d\bar{z}}{(\operatorname{Im} z)^2}$. 可证 (D, h) 全纯等距于 (H, g)

Thm 5.1.2 (Schwarz-Pick) $f: D\to D$ 全纯

则 $d(f(z_1), f(z_2)) \le d(z_1, z_2)$ d为双曲距离

若 $z_1\ne z_2$取等. 则 f为全纯等距

pf φ, ψ 为把 z_1 和 $f(z_1)$ 映为 0 的全纯自同构.

并令 $F = \psi\circ f\circ\varphi^{-1}$

由Schwarz引理 $|F(w)|\le|w|$

即 $d(0,F(w))\le d(0,w)$

取 $w=\varphi(z_2)$，则 $d(f(z_1),f(z_2))=d(\psi\circ f(z_1),\psi\circ f(z_2))$

$=d(0,F(\varphi(z_2)))\le d(0,\varphi(z_2))=d(\varphi(z_1),\varphi(z_2))=d(z_1,z_2)$ #.

M黎曼 h为Hermite度量 之前在 $A^1(M)$ 上定义了Hermite内积。

现扩充到 $A(M)=A^0(M)\oplus A^1(M)\oplus A^2(M)$ 上

i) 规定不同次微分形式正交

ii) $f,g\in A^0(M)$ 令 $(f,g)=\int_M f\bar{g}\Omega$ Ω为体积形式

若 $\omega_1=f_1\Omega$, $\omega_2=f_2\Omega\in A^2(M)$ 令 $(\omega_1,\omega_2)=(f_1,f_2)$

或者 把 $*: A^1(M)\to A^1(M)$ 扩充到 $*: A^{p,q}\to A^{1-q,1-p}$

$*1=\Omega$, $*\Omega=1$

$A^p(M)$ 上 $(\eta_1,\eta_2)=\int_M\eta_1\wedge\overline{*\eta_2}$.

Rmk. $*^2=(-1)^{p+q}$ $(*\eta_1,*\eta_2)=(\eta_1,\eta_2)$

再定义 $\delta: A^p(M)\to A^{p-1}(M)$ $\vartheta: A^{p,q}(M)\to A^{p,q-1}(M)$

$\delta=-*d*$ $\vartheta=-*\partial*$

Lemma 5.13 紧黎曼面上，$(dw,\eta)=(w,\delta\eta)$　$(\bar\partial w,\eta)=(w,\vartheta\eta)$

令 $\Delta = d\delta+\delta d$.　$\square = \bar\partial\vartheta + \vartheta\bar\partial$

性质：　(i) $\Delta w = 0 \Leftrightarrow dw=\delta w = 0$

$\square w = 0 \Leftrightarrow \bar\partial w = \vartheta w = 0$

(ii) $\square = \frac{1}{2}\Delta$

(iii) $*\Delta = \Delta *$,　$*\square = \square *$.

(iv) $\square w = 0$ 则称 w 调和，这与之前定义一致

§5.2 线丛的几何

Def 5.2.1 L为全纯线丛. 若在每个纤维 L_p 上指定 Hermite内积 $g(p)=\langle\cdot,\cdot\rangle_p$. 且任给L的两个光滑截面 s_1, s_2. M上的函数 $g(s_1,s_2)$. $p\mapsto\langle s_1(p), s_2(p)\rangle_p$ 光滑. 则称g为 L上一个Hermite度量

L局部平凡化 ψ_α $\quad U_\alpha$上截面 s_α $\quad s_\alpha(x)=\psi_\alpha^{-1}(x,1)$

记 $g_\alpha=g(s_\alpha,s_\alpha)$ $\qquad U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi$ 时 $\quad s_\alpha=f_{\beta\alpha}s_\beta$.

则 $g_\alpha=|f_{\beta\alpha}|^2 g_\beta$ $\qquad\qquad (*)$

$(*)$ 决定一个Hermite度量

U_α上定义(1,0)形式 $\theta_\alpha=\partial\log g_\alpha$

$U_\alpha\cap U_\beta$上 $\theta_\alpha=\partial\log f_{\beta\alpha}+\partial\log\overline{f_{\beta\alpha}}+\partial\log g_\beta$

$$=f_{\beta\alpha}^{-1}\partial f_{\beta\alpha}+\theta_\beta$$

任给L的光滑截面s. U_α上 $s=f_\alpha s_\alpha$

令 $Ds=(df_\alpha+f_\alpha\theta_\alpha)\,s_\alpha$.

则 $(df_\alpha+f_\alpha\theta_\alpha)s_\alpha=(f_{\beta\alpha}df_\alpha+f_{\beta\alpha}f_\alpha\theta_\alpha)s_\beta$

$$=(df_\beta-f_\alpha df_{\beta\alpha}+f_{\beta\alpha}f_\alpha(f_{\beta\alpha}^{-1}df_{\beta\alpha}+\theta_\beta))s_\beta$$

$$=(df_\beta+f_{\beta\alpha}\theta_\beta)s_\beta$$

故有局部算子 $D: A^0(L) \to A^1(L)$

性质：(i) $D(s_1+s_2) = Ds_1 + Ds_2$

(ii) $D(fs) = (df)s + f(Ds)$.

(iii) $d\langle s_1, s_2\rangle = \langle Ds_1, s_2\rangle + \langle s_1, Ds_2\rangle$

(iv) D 为 $(1,0)$ 型的.

满足 (i)(ii) 的线性算子 D 称为 L 上的一个 联络

还 (iii) (iv) 的 称为 与 Hermite 度量相容 的联络

扩充到 p 形式上　　ω 为 L 值 p 形式　　$\omega = \omega_\alpha s_\alpha$　ω_α 为 M 上 p 形式

$$\text{令 } D\omega = (d\omega_\alpha + (-1)^p \omega_\alpha \wedge \theta_\alpha) s_\alpha$$

则定义了算子 $D: A^p(L) \to A^{p+1}(L)$

且 $D(\omega_1+\omega_2) = D(\omega_1) + D(\omega_2)$

$D(f\omega) = df\wedge\omega + fD\omega$.　$(\forall f \in A^0(M))$

θ_α 由上给出.　令 $\Theta_\alpha = d\theta_\alpha = \bar\partial\partial \log g_\alpha$

可验证 $\Theta_\alpha = \Theta_\beta$　故有 M 上整体 $(1,1)$ 形式

称为 L 关于 g 的曲率形式

Thm 5.2.1 (Gauss-Bonnet) D 为紧黎曼面上因子，g 为 $L=\lambda(D)$ 上的 Hermite 度量，则

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_M \Theta = d(D) = \chi(L) - \frac{1}{2}\chi(M)$$

pf. $D=\sum_i n_i P_i$ g 局部表示为 $\{g_\alpha\}$

则 $g_\alpha = g_\beta |f_{\beta\alpha}|^2 \Rightarrow g_\alpha |f_\alpha|^2 = g_\beta |f_\beta|^2$

故 $\{g_\alpha |f_\alpha|^2\}$ 在 $M-\{P_i\}$ 上定义了光滑函数 f

同前有 $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_M \Theta = -\sum_i \lim_{r\to 0}\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{\partial D_i(r)} \partial \log f_i$

$$= \sum_i n_i = d(D)$$

#

§5.3 线丛的 Hodge 定理

同前，可以把 $*$ 推广到L值形式上 即 $*: A^{p,q}(L)\to A^{n-q,n-p}(L)$

T_nM 和 L 上有度量 h 和 g

设 σ_1, σ_2 为L值 (p,q) 形式，令

$$(\sigma_1,\sigma_2)=\int_M \langle s_1, s_2\rangle \omega_1\wedge *\overline{\omega_2}$$

则在 $A(L)$ 上定义了 $*$ 一个整体 Hermite 内积

$$D: A^{p,q}(L)\to A^{p+1,q}(L)\oplus A^{p,q+1}(L)$$

$(p+1,q)$ 分量： $D': A^{p,q}(L)\to A^{p+1,q}(L)$

$$\sigma=\omega s_\alpha \mapsto D'\sigma=(\partial\omega+(-1)^{p+q}\omega\wedge\theta_\alpha)s_\alpha$$

则 $D=D'+\bar\partial$

考虑 $\vartheta: A^{p,q}(L)\to A^{p,q-1}(L)$ $\quad \vartheta=-*D'*$

Lemma 5.3.1 $\quad (\bar\partial\sigma_1,\sigma_2)=(\sigma_1,\vartheta\sigma_2) \quad \forall \sigma_1\in A^{p,q-1}(L)$, $\sigma_2\in A^{p,q}(L)$

$\square: A^{p,q}(L)\to A^{p,q}(L)$. $\quad \square=\bar\partial\vartheta+\vartheta\bar\partial$ 称为 $\bar\partial$-Laplace 算子.

性质： (i) $\square=(\bar\partial+\vartheta)^2$ 则可知其自伴

(ii) $\square\sigma=0 \Leftrightarrow \bar\partial\sigma=0,\ \vartheta\sigma=0$

下面计算 $\square$ 的局部表达式

令 $\Box_0=-\frac{2}{h_\alpha}\left(\frac{\partial^2}{\partial z_\alpha\partial\bar z_\alpha}+\frac{\partial\log g_\alpha}{\partial z_\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar z_\alpha}\right)$

$\sigma=\sigma_\alpha s_\alpha\in A^{0}(L)$ 时 $\quad\Box\sigma=(\Box_0\sigma_\alpha)s_\alpha$

$\sigma=\sigma_\alpha d z_\alpha s_\alpha\in A^{1,0}(L)$ 时. $\quad\Box\sigma=\left[\Box_0-2\frac{\partial h_\alpha^{-1}}{\partial z_\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar z_\alpha}\right]\sigma_\alpha dz_\alpha s_\alpha$

$\sigma=\sigma_\alpha d\bar z_\alpha s_\alpha\in A^{0,1}(L)$ 时. $\quad\Box\sigma=\left[\Box_0-2\frac{\partial h_\alpha^{-1}}{\partial\bar z_\alpha}\frac{\partial}{\partial z_\alpha}+K-2\frac{\partial h_\alpha^{-1}}{\partial\bar z_\alpha}\frac{\partial\log g_\alpha}{\partial z_\alpha}\right)\sigma_\alpha d\bar z_\alpha s_\alpha$

$\sigma=\sigma_\alpha\Omega s_\alpha\in A^{1,1}(L)$ 时. $\quad\Box\sigma=[(\Box_0+K)\sigma_\alpha]\Omega s_\alpha$

其中 $K=-\frac{2}{h_\alpha}\frac{\partial^2\log g_\alpha}{\partial z_\alpha\partial\bar z_\alpha}$ 为 L 的曲率.

$\mathcal{H}^{p,q}(L)=\{\sigma\in A^{p,q}(L)\mid\Box\sigma=0\}$ 为 L 值调和 (p,q) 形式全体

$\mathcal{H}(L)=\bigoplus_{p,q}\mathcal{H}^{p,q}(L)$

若 $\sigma\in\mathcal{H}^{p,q}(L)$. 则 $\forall\tau\in A^{p,q-1}(L)$

$$\begin{aligned}(\sigma+\bar\partial\tau,\sigma+\bar\partial\tau)&=(\sigma,\sigma)+(\sigma,\bar\partial\tau)+(\bar\partial\tau,\sigma)+(\bar\partial\tau,\bar\partial\tau)\\&=(\sigma,\sigma)+(\underbrace{\vartheta\sigma}_{0},\tau)+(\tau,\underbrace{\vartheta\sigma}_{0})+(\bar\partial\tau,\bar\partial\tau)\\&=(\sigma,\sigma)+(\bar\partial\tau,\bar\partial\tau)\geq(\sigma,\sigma)\end{aligned}$$

故 Dolbeault 上同调中一个代表类中最多一个调和形式

下面 Hodge 定理说明调和代表元必存在

Thm 5.3.2 (Hodge) L 为紧致复流形上全纯线丛

T_hM, L 上均有 Hermite 度量，则

(i) $\dim \mathcal{H}(L) < +\infty$.

(ii) ∃紧算子 $G: A(L) \to A(L)$ s.t. $\ker G = \mathcal{H}(L)$,

$G(A^{p,q}(L)) \subset A^{p,q}(L)$

$G\bar{\partial} = \bar{\partial} G \quad G\vartheta = \vartheta G$

且 $A(L) = \mathcal{H}(L) \oplus \square G A(L) = \mathcal{H}(L) \oplus G \square A(L)$

应用:

$\forall \sigma \in A(L) \qquad \sigma - G\square\sigma \in \mathcal{H}(L)$ 记 $H\sigma = \sigma - G\square\sigma$

若 $\bar{\partial}\sigma = 0$，则 $\sigma = H\sigma + G(\vartheta\bar{\partial} + \bar{\partial}\vartheta)\sigma$

$= H\sigma + \bar{\partial}(G\vartheta)\sigma$

故 Dolbeault 上同调类 $[\sigma]$ 中找到调和代表元 $[H\sigma]$

Cor 5.3.3 $\forall p, q \geq 0$ $\quad H^q(M; \Omega^p(L)) \cong \mathcal{H}_{\bar{\partial}}^{p,q}(M) \cong \mathcal{H}^{p,q}(L)$

由 Hodge 定理 (i) 可知 $\dim H^q(M; \Omega^p(L)) < +\infty$

这也说明任何全纯线丛可由同子生成 (紧致复流形)

也即 $\lambda: \mathcal{D} \to \mathcal{L}$ 为同构

§5.4 对偶定理

$L: \{f_{\beta\alpha}\}\ \{\theta_\alpha\}\ \{s_\alpha\}$ 对偶 $L^*: \{\bar f_{\beta\alpha}\}\ \{-\theta_\alpha\}\ \{\bar s_\alpha\}$

定义 $n: A^{p,q}(L) \to A^{q,p}(-L)$ $\qquad n^2 = \mathrm{Id}$

$$\sigma = \omega s_\alpha \mapsto \tilde\sigma = \bar\omega g_\alpha \bar s_\alpha$$

$$\bar*: A^{p,q}(L) \to A^{n-p,n-q}(-L)$$

$$\bar* = * \circ n = n \circ *$$

$-L$的联络为$\tilde D$. 令

$$\tilde\vartheta: A^{p,q}(-L) \to A^{p,q-1}(-L) \qquad \tilde\vartheta = -*\tilde D'*$$

$$\tilde\Box: A^{p,q}(-L) \to A^{p,q}(-L) \qquad \tilde\Box = \tilde\vartheta\bar\partial + \bar\partial\tilde\vartheta$$

Lemma 5.4.1 $\bar*\vartheta\sigma = (-1)^{p+q}\bar\partial\bar*\sigma$, $\sigma \in A^{p,q}(L)$

$$\bar*\bar\partial\sigma = (-1)^{p+q+1}\tilde\vartheta\bar*\sigma$$

$$\tilde\Box\circ\bar* = \bar*\circ\Box$$

则$\bar*$把调和形式映为调和形式.

且 $\bar*: \mathcal{H}^{p,q}(L) \to \mathcal{H}^{n-p,n-q}(-L)$ 为共轭同构

Thm 5.4.2 L为紧黎曼面M上全纯线丛. 则$\dim\mathcal{H}(L) < +\infty$

Pf. $\sigma \in A^0(L)$ 则$\Box\sigma = 0 \Leftrightarrow \bar\partial\sigma = 0, \vartheta\sigma = 0 \Leftrightarrow \bar\partial\sigma = 0 \Leftrightarrow \sigma \in \Gamma_h(L)$

则$\dim\mathcal{H}^{0,0}(L) = \dim\Gamma_h(L) < \infty$

$\dim\mathcal{H}^{1,1}(L) = \dim\mathcal{H}^{0,0}(-L) < \infty$

$\dim\mathcal{H}^{1,0}(L) \le \dim H^{1,0}_{\bar\partial} = \dim H^0(M, \Omega^1(L)) = \dim\Gamma_h(L + T_h^*M) < \infty$

$\dim\mathcal{H}^{0,1}(L) < \infty$. 故得证. #

Thm 5.4.3 (Serre对偶) L为紧黎曼面上全纯线丛.

则 $H^q(M, \Omega^p(L)) \cong H^{1-q}(M, \Omega^{1-p}(-L))$.

特别地, $L=\lambda(D)$, 则 $H^0(M; \Omega^1(\lambda(-D))) \cong H^1(M; \Omega^0(\lambda(D)))$

Rmk 可以由此证明 Riemann-Roch公式

§5.5 消没定理

Def 5.5.1 若L上存在Hermite度量h s.t. $K>0$，则称L为M上的正线丛，记为$L>0$。若$-L>0$，则称负线丛，记$L<0$

Lemma 5.5.1 若σ为L值(1,1)形式，则

$$\square\sigma=(\square^*\sigma)\Lambda+\sqrt{-1}(*\sigma)\Theta$$

Thm 5.5.2 L为紧致复流形M上全纯线丛，则

(i) $L>0$时 $H^1(M;\Omega^1(L))=0$

(ii) $L-T_h^*M>0$时，$H^1(M;\Omega(L))=0$

pf. (i) 取h s.t. $K>0$

若$\sigma\in\mathcal{H}^{1,1}(L)$ 则 $0=(\square^*\sigma+K*\sigma,\sigma)$

$$=(\bar\partial^*\sigma,\bar\partial^*\sigma)+(\vartheta^*\sigma,\vartheta^*\sigma)+(\sqrt{K}*\sigma,\sqrt{K}*\sigma)$$

$\geq 0 \Rightarrow \sqrt{K}*\sigma=0$ 故$\sigma=0$

则 $H^1(M;\Omega^1(L))\cong\mathcal{H}^{1,1}(L)=0$

(ii) $L-T_h^*M>0$ 则 $H^1(M;\Omega^1(L-T_h^*M))=0$.

则 $H^1(M;\Omega(L))=H^1(M;\Omega^1(L-T_h^*M))=0$.

其中 $\Omega^1(L-T_h^*M)\cong\Omega(L-T_h^*M+T_h^*M)=\Omega(L)$

#

Lemma 5.5.3 紧致黎曼面 M 上全纯线丛 L 为正的 $\Leftrightarrow d(L)>0$

pf. 取 g s.t. $K>0$. 由 Gauss-Bonnet 公式

$$d(L)=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_M\Theta=\frac{1}{2\pi}\int_M K\Omega>0.$$

反之 若 $d(L)>0$. 先任取一个 Hermite 度量 g_0. 曲率为 K_0

令 $\omega=K_0\Omega-2\pi d(L)\,\mathrm{Vol}(M,h)^{-1}\Omega$

则 $\int_M\omega=\int_M K_0\Omega-\int_M 2\pi d(L)\,\mathrm{Vol}(M,h)^{-1}\Omega$

$=2\pi d(L)-2\pi d(L)=0$

则 $\exists\eta$ s.t. $\omega=d\eta$. $\qquad \eta=\eta_h+df_1+*df_2$

故 $K_0\Omega-2\pi d(L)\,\mathrm{Vol}(M,h)^{-1}\Omega=d*df_2=-2\sqrt{-1}\,\bar\partial\partial f_2$

令 $g=g_0e^{2f_2}$. 则 $K\Omega=\sqrt{-1}\,\Theta$

$=\sqrt{-1}\,\Theta_0+2\sqrt{-1}\,\bar\partial\partial f_2$

$=2\pi d(L)\,\mathrm{Vol}(M,h)^{-1}\Omega$

故 $K=2\pi d(L)\,\mathrm{Vol}(M,h)^{-1}>0\Rightarrow L>0.$ #.

§5.6 线丛的陈类

$\int_M \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta = d(L)$ 即 $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta$ 作为实(1,1)形式，代表

$H^2_{dR}(M,\mathbb{C}) = H^{1,1}_{\bar\partial}(M)$ 中的一个元素.

该元素与g选取无关：称为L的第一陈类　记 $c_1(L)$

若另取度量 g'　对应表示 $\{g_\alpha\}$. $\{g'_\alpha\}$

$$g_\alpha = |f_{\beta\alpha}|^2 g_\beta \qquad g'_\alpha = |f_{\beta\alpha}|^2 g'_\beta$$

则 $\frac{g'_\alpha}{g_\alpha}$ 定义整体光滑函数，记为 f

则 $\Theta' - \Theta = \bar\partial\partial \log \frac{g'_\alpha}{g_\alpha} = \bar\partial\partial \log f = d\partial \log f$.　✓

Lemma 5.6.1　(i) M 为紧黎曼面，则 c_1 可看作同态

$$c_1 : \mathcal{L} \to H^2_{dR}(M)$$

若 M 上实(1,1)形式 ω 的积分为整数，则

$\exists$ 全纯线丛 L，s.t. $c_1(L) = [\omega]$

(ii) $\varphi : M \to N$ 为紧黎曼面间全纯映射

L 为 N 上全纯线丛，则 $c_1(\varphi^* L) = \varphi^* c_1(L)$