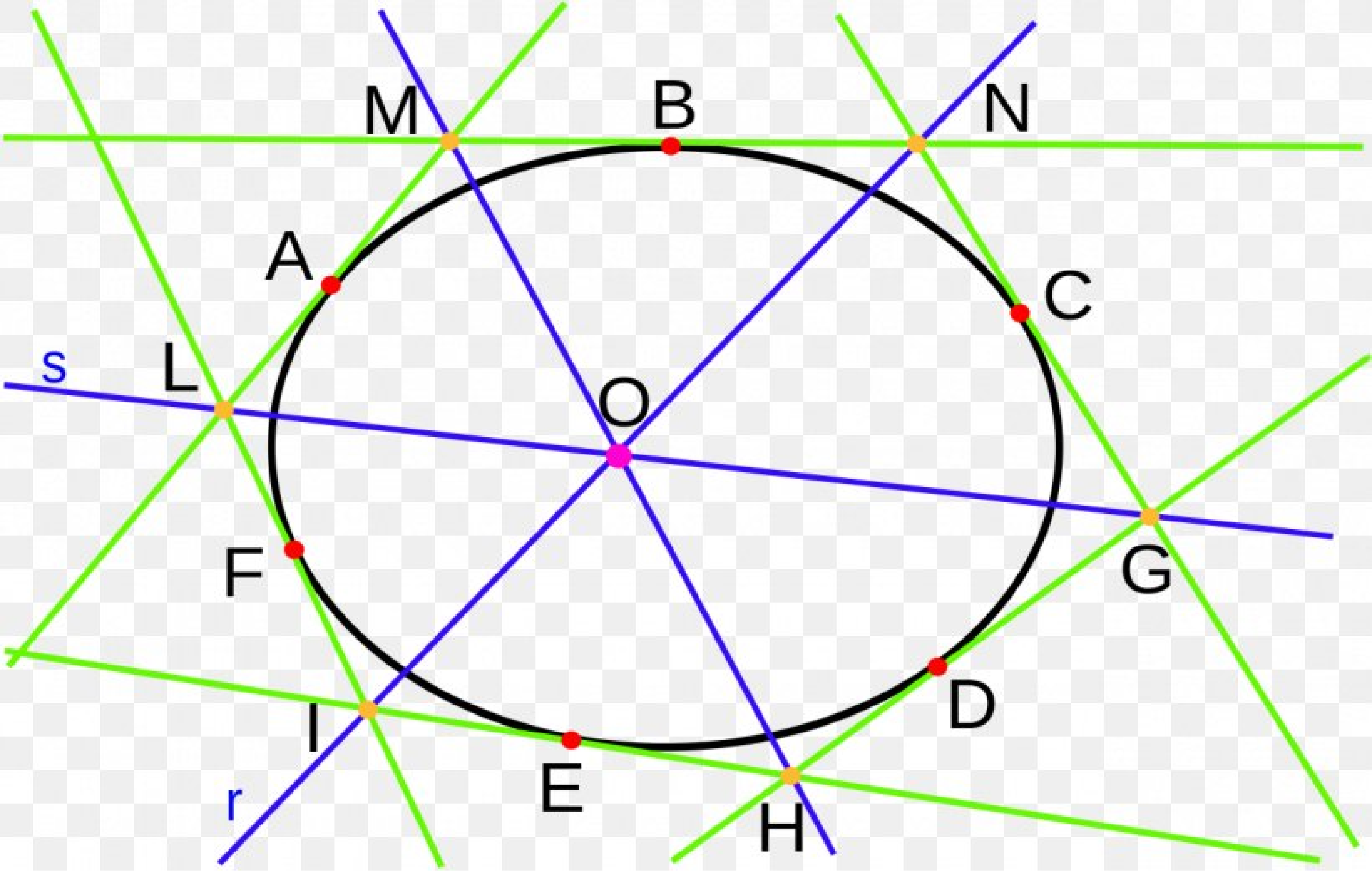

代数几何初步讲义

Author: 吕长乐

Institute: 中国科学技术大学

Date: 2025 年 7 月

本讲义由笔者在 *2024* 秋季听张磊老师的代数几何初步课程时的笔记整理而得，参考了张磊老师做的简略版讲义

目录

Chapter 1　代数簇

本章中总设 k 为代数闭域.

1.1 仿射代数簇

1.1.1 仿射代数集

对代数闭域 k, 定义 n 维仿射空间为 $\mathbb{A}_k^n = k^n$, 也简记为 $\mathbb{A}^n$. 对 $S \subseteq k[x_1, \cdots, x_n]$, 定义

$$V(S) = \{(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{A}^n : F(a_1, \cdots, a_n) = 0, \forall F \in S\}.$$

所有形如 $V(S)$ 的集合称为**仿射代数集**. 特别地，当 $S = \{F\}$ 时，称 $V(S) = V(F)$ 为**超曲面**.

我们可以在 $\mathbb{A}_k^n$ 上定义拓扑:

Theorem 1.1

*通过令仿射代数集为闭集可以定义 $\mathbb{A}^n$ 上的拓扑，称为 **Zariski 拓扑**.*

证明　记所定义的闭集全体为 $\mathcal{A}$.

(1) 显然 $\emptyset, \mathbb{A}^n \in \mathcal{A}$.

(2) 对 $V(S_i)(i \in I) \in \mathcal{A}$，有 $\cap_{i\in I} V(S_i) = V(\cup_{i\in I} S_i) \in \mathcal{A}$.

(3) 对 $V(S), V(T) \in \mathcal{A}$, 设 $S = \{F_i : i \in I\}, T = \{G_j : j \in J\}$, 则 $V(S) \cup V(T) = V(\{F_iG_j : i \in I, j \in J\}) \in \mathcal{A}$. □

Example 1.1 在 $\mathbb{A}^1$ 中，闭集只有 $\emptyset, \mathbb{A}^1$ 本身，以及有限点集.

1.1.2 Noether 环

Definition 1.1

*(1) 对环 R 和 $X \subseteq R$, 包含 X 的最小理想为 $(X) = RX = \{\sum a_i x_i : a_i \in R, x_i \in X\}$, 其中求和为有限求和. 理想 $I \lhd R$ 称为**有限生成**，若存在有限集合 X, 使得 $I = (X)$, 此时 X 称为 I 的生成元集.*

*(2) 环 R 称为 **Noether** 的，若 $\forall I \lhd R$ 有限生成.*

Proposition 1.1

(1) R 是 Noether 环等价于任意 R 中的理想升链最终稳定.

(2) R 为 Noether 环，$I \lhd R$, 则 R/I 也 Noether.

证明 (1) $\Rightarrow$: 若存在真理想的无限真升链 $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \cdots$, 考虑 $I = \cup_i I_i \lhd R$, 则取 I 的生成元集 $X = \{x_1, \cdots, x_r\}$. 由于 x_i 属于 I_j 的并，存在 m_i 使得 $x_i \in I_{m_i}$, 令 $N = \max_{1 \le i \le r} m_i$, 有 $I_N = I_{N+1} = \cdots$, 矛盾.

$\Leftarrow$: 任取理想 $I, x_1 \in I$, 若 $I = (x_1)$, 则结束. 否则取 $x_2 \in I - (x_1)$, 若 $I = (x_1, x_2)$, 则结束. 一直做同样的步骤，则由条件，必然在有限步后停止，否则有无限理想升链 $(x_1) \subsetneq (x_1, x_2) \subsetneq \cdots$. 则设在 n 时停止，有 $I = (x_1, \cdots, x_n)$.

(2) 利用商环的理想与原来的环的理想的对应关系并利用 (1) 中的判别法则即可证明. □

Theorem 1.2 (Hilbert 基定理)

若 R 为 Noether 环，则 $R[x]$ 也 Noether. ♡

证明 任取 $J \lhd R[x]$ 为理想，只需证明 J 有限生成. 定义 $J_n = \{f \in J : f\text{为}n\text{次多项式}\}$ 再取 $I_n = \{J_n\text{中的多项式的首项系数}\} \cup \{0\}$, 则可以验证 I_n 为理想，且 $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \cdots \subseteq$.

则由 R 为 Noether 环，存在 N 使得 $I_N = I_{N+1} = \cdots$. 对任意 $0 \le n \le N$, 记 $I_n = (a_{n_1}, \cdots, a_{nl_n})$, 在存在 $f_{nk}(x) = a_{nk}x^n + \cdots \in J_n$.

只需证明 $J' = \{f_{nk} : 0 \le n \le N, 1 \le k \le l_n\} = J$ 即可，则只要证 $\forall n, J_n \subseteq J'$.

$n = 0$ 时显然，若 $J_0, \cdots, J_{n-1} \in J'$, 则任意 $f \in J_n$, 设 $f = a_n x^n + \cdots$.

若 $n \le N$, 则设 $a_n = b_1 a_{n_1} + \cdots + b_{l_n} a_{nl_n}$, 进而有

$$f - (b_1 f_{n_1} + \cdots + b_{l_n} f_{nl_n}) \in J_0 \cup \cdots \cup J_{n-1} \subseteq J'.$$

当 $n > N$ 时，仍设 $a_n = b_1 a_{N_1} + \cdots + b_{l_N} a_{Nl_N}$, 同上

$$f - (b_1 f_{N_1} + \cdots + b_{l_N} f_{Nl_N}) \in J_0 \cup \cdots \cup J_{n-1} \subseteq J'.$$

综上有 $f \in J', J_n \subseteq J'$, 则得证 □

1.1.3 仿射代数集与理想

给定仿射代数集 $X = V(S) \subseteq \mathbb{A}^n$, 其中 $S = \{F_1, \cdots, F_n\}$, 令 $I = (S)$, 则显然 $V = X(I)$. 则自然考虑如下的对应:

$$\{I \lhd k[x_1, \cdots, x_n]\} \underset{I(X) \leftarrow X}{\overset{I \rightarrow V(I)}{\rightleftharpoons}} \{X \subseteq \mathbb{A}^n\text{为仿射代数集}\}.$$

其中 $I(X) = \{F \in k[x_1, \cdots, x_n] : F(X) = 0\}$.

是否为一一对应？可以验证：$V(I(X)) = X$, 但不一定有 $I = I(V(I))$! 例如 $V(F) = V(F^2)$, 但 $(F) \neq (F^2)$.

上面的反例也启发我们考虑根理想:

Proposition 1.2

任意 X 为仿射代数集，有 $I(X)$ 为根理想，即 $I(X) = \sqrt{I(X)}$. ♠

证明 只需证 $\sqrt{I(X)} \subseteq I(X)$.

任取 $f \in \sqrt{I(X)}$, 设 $f^m \in I(X)$, 则 $f^m(X) = 0, f(X) = 0$, 即 $f \in I(X)$. □

则我们希望建立根理想和仿射代数集之间的一一对应，这只需要证明：若 I 为根理想，则 $I = I(V(I))$. 事实上，该命题正确，并且可以一般化：对任意理想 I, 有 $\sqrt{I} = I(V(I))$. 这就是下面的 Hilbert 零点定理.

1.1.4 Hilbert 零点定理

Theorem 1.3 (Hilbert 零点定理)

k 为代数闭域，$I \leq k[x_1, \cdots, x_n] = R$, 则

(1) R 中极大理想 $\mathfrak{m}$ 形如 $(x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n)$.

(2) $V(I) = \emptyset \iff I = R$.

证明 (1) 下面引用的是许金兴老师《交换代数讲义》中的证明.

首先证明如下命题.

Proposition 1.3

设 $A \hookrightarrow B$ 为整环之间的单同态, 且为整扩张. 则 A 为域 $\iff$ B 为域.

证明 $\Longrightarrow$: 任取 $0 \neq b \in B$, 考虑 b 满足的次数最小的 A 系数首一方程: $b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$, $a_i \in A$.

如果 $a_0 = 0$, 则 b 将满足次数更小的首一方程 $b^{n-1} + a_{n-1}b^{n-2} + \cdots + a_1 = 0$, 这与开始选取的首一方程次数性最小矛盾.

故 $a_0 \neq 0$, 这就得到 $b(b^{n-1} + a_{n-1}b^{n-2} + \cdots + a_1) + a_0 = 0$, 从而由 A 为域知 b 在 B 中的逆元为 $-a_0^{-1}(b^{n-1} + a_{n-1}b^{n-2} + \cdots + a_1)$. 这样得到 B 中非零元均可逆, 从而 B 为域.

$\Longleftarrow$: 任取 $0 \neq a \in A$, 设 a 在域 B 中的逆元为 $a^{-1} \in B$. 只需证明 $a^{-1} \in A$.

由 $A \longrightarrow B$ 为整扩张, a^{-1} 满足 A 系数的首一方程: $(a^{-1})^n + a_{n-1}(a^{-1})^{n-1} + \cdots + a_0 = 0, a_i \in A$. 将该等式两边同时乘以 a^{n-1} 得到 $a^{-1} + a_{n-1} + \cdots + a_0 a^{n-1} = 0$, 由此知 $a^{-1} \in A$.

作为其推论，有：

Proposition 1.4

设 $A \longrightarrow B$ 为整扩张, 设 $Q \in \operatorname{Spec} B$, $P = Q \cap A$. 则 Q 为 B 的极大理想 $\iff$ P 为 A 的极大理想.

回到原定理. 对 n 进行归纳. 取 $0 \neq f \in m$, 作如下形状的可逆变量代换:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_n^{N_1} \\ \vdots \\ x_{n-1} = y_{n-1} + y_n^{N_{n-1}} \\ x_n = y_n. \end{cases}$$

不难看到, 通过适当地选取正整数 $N_1, \ldots, N_{n-1}$, 可以使 f 成为 y_n 的首一多项式. 从而 $k[y_1, \ldots, y_{n-1}] \longrightarrow k[x_1, \ldots, x_n]/(f) = k[y_1, \ldots, y_n]/(f)$ 为整扩张.

令 $\bar{m} = m/(f)$, 则由命题 1.4, 知 $\bar{m} \cap k[y_1, \ldots, y_{n-1}]$ 为极大理想.

由归纳假设知存在 $b_1, \ldots, b_{n-1} \in k$, 使得 $\bar{m} \cap k[y_1, \ldots, y_{n-1}] = (y_1 - b_1, \ldots, y_{n-1} - b_{n-1})$. 故 m 包含理想 $(y_1 - b_1, \ldots, y_{n-1} - b_{n-1}, f)$. 由于商环 $k[y_1, \ldots, y_n]/(y_1 - b_1, \ldots, y_{n-1} - b_{n-1}) = k[y_n]$ 为主理想整环, 可知其极大理想 $m/(y_1 - b_1, \ldots, y_{n-1} - b_{n-1})$ 为主理想, 因而具有形式 $(y_n - b_n)$, $b_n \in k$. 这样就得到 $(y_1 - b_1, \ldots, y_n - b_n) \subset m$.

注意到 $(y_1 - b_1, \ldots, y_n - b_n)$ 已经是极大理想, 故得到 $m = (y_1 - b_1, \ldots, y_n - b_n)$. 再通过变量代换即知 m 具有形式 $(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$, $a_i \in k$.

(2) 只需证 $\Rightarrow$:. 设 $I \neq R$, 则存在极大理想 $\mathfrak{m} = (x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n)$ 包含 I, 故 $V(\mathfrak{m}) = \{(a_1, \cdots, a_n)\} \subseteq V(I)$, 矛盾! □

Corollary 1.1

对任意 $I \subseteq R$ 为理想, 有 $I(V(I)) = \sqrt{I}$. ♡

证明 只需证 $I(V(I)) \subseteq \sqrt{I}$. 任取 $f \in I(V(I))$. 令 $J = (I, 1 - fy) \lhd k[x, y]$. 则

$$(a_1, \cdots, a_n, b) \in V(J) \subseteq \mathbb{A}^{n+1} \iff (a_1, \cdots, a_n) \in V(I), 1 - f(a_1, \cdots, a_n)b = 0.$$

故显然 $V(J) = \emptyset$, 由 Hilbert 零点定理有 $J = k[x, y]$.

则考虑 $(1) = {}^{J}/_{I[y]} = (R/I)[y]$, 存在 $g(x, y) \in k[x, y]$ 使得 $g(x, y)(1 - fy) \equiv 1 \mod I[y]$. 设 $g(x, y) = a_0(x) + \cdots + a_m(x)y^m$, 则

$$(a_0(x) + \cdots + a_m(x)y^m)(1 - yf(x)) \equiv 1 \mod I[y].$$

对比系数有

$$a_0 \equiv 1, a_1 \equiv a_0 f, \cdots, a_m \equiv a_{m-1} f \equiv 0 \mod I.$$

则有 $f^m \in I, f \in \sqrt{I}$. □

1.1.5 仿射代数集的不可约分解

Definition 1.2

对 $X \subseteq \mathbb{A}^n$ 为仿射代数集，若满足对任意并 $X = X_1 \cup X_2$，其中 X_i 为 X 中的闭集，均有 $X_1 = X$ 或 $X_2 = X$，则称 X 为**不可约**的.

Remark 这里 X 中的闭集是关于子空间拓扑而言．更精确地说，设 $X = V(I)$，则 X 中的闭集形如 $V(I) \cap V(J)$，记 $V_X(J)$.

Proposition 1.5

对仿射代数集 X，有 X 不可约 $\iff$ $I(X)$ 为素理想.

证明 $\Rightarrow$: 取 $f, g \in k[x_1, \cdots, x_n]$，设 $fg \in I(X)$，则 $X = V_X(f) \cup V_X(g)$，由不可约有 $V_X(f) = X$ 或 $V_X(g) = X$，即 $f \in I(X)$ 或 $g \in I(X)$，故 $I(X)$ 为素理想.

$\Leftarrow$: 若 X 可约，则设有 $X = X_1 \cup X_2$，其中 $X_1 \subseteq X, X_2 \subseteq X$ 为闭集，则存在 $F_1 \in I(X_1) - I(X), F_2 \in I(X_2) - I(X)$. 但 $F_1 F_2 \in I(X)$，与 $I(X)$ 为素理想矛盾！ □

Example 1.2 $V(F)$ 不可约等价于 $\sqrt{(F)}$ 为素理想. 进而当 F 不可约时有 $V(F)$ 不可约，但反之不一定.

Example 1.3 由此有不可约仿射代数集中的任意两个非空开集的交也非空，进而非空开集均稠密.

Theorem 1.4

X 为仿射代数集，则

(1) 任意 X 中的下降闭链集最终稳定.

(2) X 可以表示为 $X = X_1 \cup \cdots X_m$，其中 X_i 为不可约闭集且互相不包含. 而且该分解在调整次序的意义下唯一，称为 X 的**不可约分解**.

证明 (1) 设 $X = V(I)$，并有 $X_1 \supseteq X_2 \cdots \supseteq X_n \cdots$ 为下降闭集链，其中 $X_i = V_X(I_i)$，且 $I_i \subseteq I_{i+1}$. 则有理想的无限升链 $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$，故必须稳定.

(2) 存在性：若 X 不可约，则直接结束. 否则设 $X = X_1 \cup X_2$ 为真闭集的并，若 X_1 和 X_2 均能有限分解，则也结束. 否则若不妨设 X_1 不能有限分解，继续上述步骤，可以得到无穷长的不稳定降闭集链，与 (1) 矛盾.

唯一性：设 $X = X_1 \cup X_2 \cdots \cup X_m = Y_1 \cup \cdots Y_{m'}$，则 $X_1 = (X_1 \cap Y_1) \cup \cdots \cup (X_1 \cap Y_{m'})$.

又 X_1 不可约，存在 i 使得 $X_1 \subseteq Y_i$，类似存在 j 使得 $Y_i \subseteq X_j$，此时有 $X_1 \subseteq Y_i \subseteq X_j$，只能 $1 = j, X_i = Y_1$. 则利用归纳可以得到唯一性. □

Example 1.4 设 $F = f_1^{n_1} \cdots F_r^{n_r}$ 为 F 的不可约分解，则 $V(F) = V(F_1) \cup \cdots \cup V(F_r)$ 为 $V(F)$ 的不可约分解.

1.1.6 仿射代数簇以及其上的函数

Definition 1.3
对仿射代数集 X, 记 $\mathrm{Func}(X)=\{f:X\to k\}$ 为 X 上 k-值函数环，则有同态

$$\eta:k[x_1,\cdots,x_n]\to \mathrm{Func}(X), f\mapsto f|_X$$

记 $\mathrm{Poly}(X)=\mathrm{Im}\eta$ 为 X 上的**多项式函数环**，其中元素称为多项式函数. ♣

Example 1.5 显然 $\ker\eta=I(X)$, 故 $\mathrm{Poly}(X)\simeq {}^{k[x_1,\cdots,x_n]}/_{I(X)}$.
Example 1.6 设 $X=V(I)$, 则由 Hilbert 零点定理有所有包含 I 的极大理想形如 $(x_1-a_1,\cdots,x_n-a_n),(a_1,\cdots,a_n)\in X$. 进而 $\mathrm{Poly}(X)$ 的极大理想与 X 中的点一一对应.

Definition 1.4
不可约仿射代数集称为仿射代数簇. ♣

则由命题 1.5，仿射代数簇均形如 $X=V(P)$, P 为素理想, 此时有 $\mathrm{Poly}(X)={}^{k[x_1,\cdots,x_n]}/_{P}$ 为整环. 则可以定义 $K(X)=\mathrm{Frac}(\mathrm{Poly}(X))$ 为 X 上的**有理函数域**.

Example 1.7 $X=\mathbb{A}^n$, 则 $\mathrm{Poly}(X)=k[x_1,\cdots,x_n]$, 有 $K(X)=k(x_1,\cdots,x_n)$ 为 n 元有理函数域.
Example 1.8 $X=V(xy-zw)\subseteq\mathbb{A}^4$, 则 $\mathrm{Poly}(X)={}^{k[x,y,z,w]}/_{(xy-zw)}$, 不难发现它不是一个 UFD. 可以定义 $\varphi=\frac{x}{z}=\frac{w}{y}\in K(X)$, 它在任意 $z\neq 0$ 或 $y\neq 0$ 处有定义.

Definition 1.5
对 $\varphi\in K(X)$, 称 φ 在 $x\in X$ 处有定义，是指存在 x 的邻域 V_x, 使得存在 $f,g\in\mathrm{Poly}(X)$，使得 $\varphi=\frac{f}{g}, g\neq 0\ in\ V_x$.
记 $\mathrm{Dom}(\varphi)=\{x\in X:\varphi在x处定义\}$ 为 φ 的定义域. ♣

Proposition 1.6
(1) 对 $f,g\in\mathrm{Poly}(X)$, 若存在非空开集 U 使得 $f|_U=g|_U$, 则 $f=g$.
(2) 设 $\varphi\in K(X)$, 则 $\mathrm{Dom}(\varphi)\neq\emptyset$.
(3) 对 $\varphi_1,\varphi_2\in\mathrm{Poly}(X)$, 若存在非空开集 U 使得 $\varphi_1|_U=\varphi_2|_U$, 则 $\varphi_1=\varphi_2$. ♠

证明 (1) 显然 $Y=\{f-g=0\}$ 为闭集，又 $U\subseteq Y$，有 $X=\overline{U}\subseteq Y$.

(2) 设 $\varphi=\frac{f}{g}\in K(X)$, 其中 $f,g\in\mathrm{Poly}(X), g\neq 0\in\mathrm{Poly}(X)$. 则 $g\notin I(X)$, 即存在 $x\in X, g(x)\neq 0$. 进而 φ 在 x 处有定义.

(3) 留作练习.

Remark 事实上可以证明定义域 $\mathrm{Dom}(\varphi)$ 为非空开集. 进而可以定义一个真正的映射 $\varphi_{\mathrm{map}} : \mathrm{Dom}(\varphi) \to k$.

1.1.7 正则函数

Definition 1.6
对仿射代数簇 X, $U \subseteq X$ 为非空开集，若函数 $f : U \to k$ 满足 $\forall x \in U$, 存在 x 的邻域 V_x 和 $\varphi_x \in K(X)$, 使得 $f|_{V_x} = \varphi_x|_{V_x}$, 则称 f 为 U 上的**正则函数**. U 上正则函数的全体记为 $\mathrm{Reg}(U)$. ♣

首先可以发现对任意 $f \in \mathrm{Reg}(U)$, 取 x, V_x, φ_x 如上，则确定了一个 $\varphi_x \in K(X)$. 再由于上面的命题 1.6(3), 有 φ_x 不依赖于 x 的选取，故可以自然地视为 $\mathrm{Reg}(U) \subseteq K(X)$.

Example 1.9 对 $X = V(xy - zw) \subseteq \mathbb{A}^4$, 取开集 $U = X \setminus V(yz) = (X \setminus V(z)) \cup (X \setminus V(y)) = U_1 \cup U_2$. 则

$$f : U \to k, P \mapsto \begin{cases} \frac{x}{z} & P \in U_1 \\ \frac{w}{y} & P \in U_2 \end{cases}$$

定义了一个正则函数 $f \in \mathrm{Reg}(U)$.

Definition 1.7
对仿射代数簇 X 和 $x \in X$, 定义 $\mathcal{O}_{X,x} = \{\varphi \in K(X) : \varphi 在x处有定义\}$ 为 X 在 x 处的**正则函数茎**. ♣

Proposition 1.7
(1) $\mathrm{Reg}(U) = \cap_{x \in U} \mathcal{O}_{X,x}$.
(2) $\mathcal{O}_{X,x} = \mathrm{Poly}(X)_{m_x}$, 其中 $m_x = \{f \in \mathrm{Poly}(X) : f(x) = 0\}$ 为 x 处的极大理想.
(3) 令 $m_{X,x} = \{\varphi \in \mathcal{O}_{X,x} : \varphi(x) = 0\}$, 则 $(\mathcal{O}_{X,x}, m_{X,x})$ 为局部环. 进而此时有同构 $\mathcal{O}_{X,x} \big/ m_{X,x} \to k, \overline{\varphi} \mapsto \varphi(x)$.
(4) $\mathrm{Reg}(X) = \mathrm{Poly}(X)$, 之后也会记作 $\Gamma(X)$. ♠

证明 (1) 显然. (2) 是局部化的定义的语言翻译.

(3) 由交换代数知识，只需证任意 $\varphi \notin m_{X,x}$ 在 $\mathcal{O}_{X,x}$ 中是可逆的.

设 $\varphi \notin m_{X,x}$, 则取 x 的邻域 V_x 使得在 V_x 上 $\varphi = \frac{f}{g}$, 其中 $f, g \in \mathrm{Poly}(X)$, 且 $g \neq 0$ on V_x, $f(x) \neq 0$. 则存在 x 的更小邻域 U_x 使得 $f \neq 0$ on U_x, 则 $\frac{g}{f}$ 在 x 的邻域 U_x 中有定义，故 $\frac{g}{f} \in \mathcal{O}_{X,x}$ 为 φ 的逆.

(4) 我们承认如下交换代数的结论：对 R 整环，则有 $R = \cap_{m \in \mathrm{Max}(R)} R_m$. 故

$$\mathrm{Reg}(X) = \cap_{x \in X} \mathcal{O}_{X,x} = \cap_{x \in X} \mathrm{Poly}(X)_{m_x} = \mathrm{Poly}(X).$$

最后一步使用了上面的结论，并由 Hilbert 零点定理，$\mathrm{Poly}(X)$ 的最大理想与 X 中的点一一对应. □

Remark 利用正向极限的语言可以写作 $\mathcal{O}_{X,x} = \varinjlim_{x\in U} \mathrm{Reg}(U)$.

Example 1.10 设 $f \in \mathrm{Poly}(X)$, 定义 $D_X(f) = X \setminus V_X(f)$，这种集合称为 X 的**主开集**. 此时可以证明 $\mathrm{Reg}(D_X(f)) = \mathrm{Poly}(X)_{(f)}$:

注意到 $\mathrm{Max}(R_f) = \{m \in \max(R) : f \notin m\}$, 则

$$\mathrm{Reg}(D_X(f)) = \cap_{f(x)\neq 0}\mathrm{Poly}(X)_{m_x} = \cap_{f(x)\neq 0}(\mathrm{Poly}(X)_f)_{m_x} = \mathrm{Poly}(X)_{(f)}.$$

1.1.8 仿射簇之间的映射

Definition 1.8

对仿射簇 $X \subseteq \mathbb{A}^n, Y \subseteq \mathbb{A}^m$, 映射 $\phi : X \to Y$ 称为**多项式映射**，若存在 $\overline{u}_1 \cdots \overline{u}_m \in \Gamma(x)$, 使得 $\phi(x) = (\overline{u}_1(x), \cdots, \overline{u}_m(x))$. ♣

Proposition 1.8

设 $\phi : X \to Y$ 为多项式映射，则它诱导了 k-代数同态 $\phi^* : \Gamma(Y) \to \Gamma(x)$. ♠

证明 设 $\phi(x) = (u_1(x), \cdots, u_m(x))$ 如上，则定义

$$\phi^* : \Gamma(Y) = {}^{k[y_1,\cdots,y_m]}\Big/_{I(Y)} \to \Gamma(x), \overline{y}_i \mapsto \overline{u}_i.$$

这是一个 k-代数同态. 此时有 $\phi^*(\overline{g(y_1, \cdots, y_m)}) = g(\overline{u}_1, \cdots, \overline{u}_m)$. □

进一步有

Theorem 1.5

X 到 Y 的多项式映射集合 $\mathrm{Poly}(X, Y)$ 和 k-代数同态的集合 $\mathrm{Hom}_k(\Gamma(Y), \Gamma(X))$. ♡

证明 首先对 $\phi \in \mathrm{Poly}(X, Y)$ 可以取 $\phi^* \in \mathrm{Hom}_k(\Gamma(Y), \Gamma(X))$.

另一方面对 $\eta : \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ 为 k-代数同态，设 $\overline{u}_i = \eta(\overline{y}_i)$, 则定义

$$\phi_\eta : X \to \mathbb{A}^m, x \mapsto (\overline{u}_1(x), \cdots, \overline{u}_m(x)).$$

显然这是一个多项式映射，只需证明像在 $Y = V(I(Y))$ 中即可.

对任意 $f \in I(Y), x \in X$，这是因为

$$f(\phi_\eta(x)) = f(\overline{u_1}(x), \cdots, \overline{u}_m(x)) = \eta(f(\overline{y}_1, \cdots, \overline{y}_m))(x) = 0.$$

进一步可以验证这两个对应关系是互逆的，则得证. □

我们还可以定义有理映射.

Definition 1.9

对仿射簇 $X \subseteq \mathbb{A}^n, Y \subseteq \mathbb{A}^m$, 映射 $\psi : X \to Y$ 称为**有理映射**, 若存在 $\varphi_1 \cdots \varphi_m \in \Gamma(x)$, 使得 $\psi(x) = (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_m(x))$. ψ 的定义域为 $\mathrm{Dom}(\psi) = \cap_{1\leq k\leq m}\mathrm{Dom}(\varphi_k)$. ♣

和多项式映射时一样地，我们希望将 Y 上的有理函数拉回到 X 上，但事实上这不一定可以做到:

Example 1.11 设 $\psi : X = \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2 = Y, t \mapsto (\frac{1}{t}, \frac{1}{t^2})$, 可以发现 $\frac{1}{y-x^2} \in K(Y)$, 但它不能被拉回成 X 上的有理函数!

但 Y 上的多项式映射仍然可以拉回：对上面的有理映射，同样可以决定一个 k-代数同态

$$\psi^* : \Gamma(Y) \to \mathrm{Reg}(\mathrm{Dom}(\psi)) \subseteq K(X), \overline{g(y_1, \cdots, y_m)} \mapsto g(\varphi_1(x), \cdots, \varphi_m(x)).$$

故同上有理映射的集合 $\mathrm{Rat}(X, Y)$ 与 k-代数同态的集合 $\mathrm{Hom}_k(\Gamma(Y), K(X))$ 有对应.

自然会问：何时能够把 Y 上的有理函数也拉回?

Definition 1.10

有理映射 $\psi : X \to Y$ 称为**支配**的，若 ψ 的像在 Y 中稠密. X 到 Y 的支配有理映射全体记为 $\mathrm{DomRat}(X, Y)$. ♣

Example 1.12 仍然考虑 $\psi : X = \mathbb{A}^1 \to Y, t \mapsto (\frac{1}{t}, \frac{1}{t^2})$, 若 $Y = V(y - x^2)$, 则 ψ 支配. 但 $Y = \mathbb{A}^2$ 时就不支配.

Theorem 1.6

(1) $\psi : X \to Y$ 是支配的 $\iff$ $\psi^* : \Gamma(Y) \to K(X)$ 是单射.

(2) 有一一对应 $\mathrm{DomRat}(X, Y) \rightleftharpoons \mathrm{Hom}_k(K(Y), K(X))$. ♡

证明 (1) $\Rightarrow$: 任意 $\overline{g} \in \ker \psi^*, x \in X$, 有 $g(\varphi_1(x), \cdots, \varphi_m(x)) = 0$, 进而 $\mathrm{Im}(\psi) \subseteq V_Y(\overline{g})$.

又有支配条件，只能有 $V_Y(\overline{g}) = Y$, 即 $\overline{g} = 0$, 故 ψ^* 单.

$\Leftarrow$: 只需证包含 $\mathrm{Im}(\psi)$ 的闭集只能是 Y 即可. 则设 $\mathrm{Im}(\psi) \subseteq V_Y(\overline{g})$, 有 $\overline{g} \circ \psi = 0$ in $\mathrm{Dom}(\psi)$, 进而 $\psi^*(\overline{g}) = 0$ in $\mathrm{Dom}(\psi)$, 故 $\psi^*(\overline{g}) = 0$ in $K(X)$. 由 ψ^* 单射有 $\overline{g} = 0$, 即 $V_Y(\overline{g}) = 0 \in Y$.

(2) 任意支配映射 ψ, 由 (1) 有 $\psi^* : \Gamma(Y) \to K(X)$ 为单射，进而可以延拓为 $\psi^* : K(Y) \to K(X)$, 显然它仍然为 k-代数同态.

另一方面对 $\eta : K(Y) \to K(X)$ 为 k-代数同态，设 $\overline{u}_i = \eta(\overline{y}_i)$, 则定义

$$\phi_\eta : X \to \mathbb{A}^m, x \mapsto (\overline{u}_1(x), \cdots, \overline{u}_m(x)).$$

剩余同定理 1.5. □

注意到有如下的性质，验证均是直接的，留作练习.

Proposition 1.9

(1) 多项式映射的复合为多项式映射.

(2) 有理映射未必能够复合.

(3) 支配的有理映射可以复合成有理映射.

Example 1.13 考虑 $\psi : X = \mathbb{A}^1 \to Y = V(y - x^2) \subseteq A^2, t \mapsto (\frac{1}{t}, \frac{1}{t^2}), \varphi : Y \to X, x \mapsto \frac{1}{x}$. 两个映射均为支配的映射且互逆，进而由定理 1.6(2), 有

$$K(X) \simeq K(Y) = K(V(y - x^2)) = \mathrm{Frac}(k[x, y] \big/ (y - x^2)) \simeq \mathrm{Frac}(k[x]) = k(x).$$

这诱导我们定义如下的双有理映射.

Definition 1.11

对 $\psi : X \to Y$ 为支配映射，若 ψ 有逆 $\varphi : Y \to X$, 即 $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_X, \psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_Y$, 则称 ψ 为**双有理映射**. 此时称 X 和 Y 是**双有理等价**的.

事实上有

Theorem 1.7

对支配映射 $\psi : X \to Y$, 有 ψ 双有理 $\iff \psi^* : K(Y) \to K(X)$ 为同构.

该定理在后面会针对更广泛的抽象代数簇的情形进行证明并加以拓展.

Example 1.14 $V(x^2+y^2-1) \subseteq \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^1, (x, y) \to \frac{y-1}{x}$ 是双有理的, 进而有 $k(x) \simeq \mathrm{Frac}(k[x, y] \big/ (x^2 + y^2 - 1))$.

同样利用复变函数中的球极投影可以证明 $V(x^2 + y^2 + z^2 + 1) \subseteq \mathbb{A}^3$ 和 $\mathbb{A}^2$ 双有理等价，故有 $k(t, s) \simeq \mathrm{Frac}(k[x, y, z] \big/ (x^2 + y^2 + z^2 + 1))$.

1.2 射影代数簇

1.2.1 射影代数集

熟知射影空间 $\mathbb{P}_k^n = \mathbb{P}^n = (k^{n+1} \setminus \{0\})/k^*$, 且它有如下的"分片"

$$\mathbb{P}^{\Bbbk} = \cup_{i=0}^n U_i, U_i = \{[X_0, \cdots, X_n] \in \mathbb{P}^n : X_i \neq 0\}.$$

每一片都通过 $\phi_i : U_i \to k^n, [X_0, \cdots, X_n] \mapsto (\frac{X_0}{X_i}, \cdots, \frac{\hat{X}_i}{X_i}, \cdots, \frac{X_n}{X_i})$ 同构到仿射空间上，故可以将射影空间理解为仿射空间之并. 同时注意这里我们往往用大写的字母 X 代表射影空间中的变元.

对于齐次多项式 $F(X_0, \cdots, X_n)$, 显然有 $\forall \lambda \neq 0, F(\lambda X_0, \cdots, \lambda X_n) = 0 \iff F(X_0, \cdots, X_n) = 0$. 故对于齐次多项式，可以良好定义它在射影空间 $\mathbb{P}^n$ 上的零点集.

Definition 1.12

对 $S \subseteq k[X_0, \cdots, X_n]$ 为一些齐次多项式组成的集合, 则 S 中元素在 $\mathbb{P}^n$ 上的公共零点记为 $V_p(S)$, 这些集合称为**射影代数集**. ♣

与仿射情形一样地，以射影代数集为闭集可以定义 $\mathbb{P}^n$ 上的 Zariski 拓扑.

Proposition 1.10

(1) $\mathbb{P}^n$ 中射影代数集与 U_0 的交是 U_0 中仿射代数集.

(2) $U_0 \simeq \mathbb{A}^n$ 上的 Zariski 拓扑和 $\mathbb{P}^n$ 上诱导的 Zariski 拓扑一致. ♠

证明 (1) 注意到 $V_P(F(X_0, \cdots, X_n)) \cap U_0 = V(F(1, x_1, \cdots, x_n)) \subseteq A_0$.

(2) 由 (1) 只需证 U_0 上的闭集可以写为 $\mathbb{P}^n$ 和 U_0 之交. 给定 $f(x_1, \cdots, x_n)$, 设 $\deg f = N$, 有齐次化 $f = x_0^n F(\frac{x_1}{x_0}, \cdots, \frac{x_n}{x_0})$, 其中 F 齐次，则有 $V(f) = V_p(F) \cap U_0$. □

1.2.2 齐次理想

Definition 1.13

分次环是一个环 S，它可以写为 *Abel* 子群的直和 $S = \oplus_{d \geq 0} S_d$, 满足任意 $d, e \geq 0, S_d \cdot S_e \subseteq S_{d+e}$. 其中 S_d 中的元素称为 d 次元素.

分次环中的理想 I 是**齐次理想**，若有 $I = \oplus_{d \geq 0}(I_d = I \cap S_d)$. 此时有商环 $S/I = \oplus_{d \geq}(S_d(I \cap S_d))$. ♣

Proposition 1.11

设 S 为分次环，则

(1) 理想 I 是齐次的当且仅当它可以由齐次元生成.

(2) 若 I, J 为齐次理想，则 $I + J, IJ, \sqrt{I}$ 为齐次理想. ♠

证明 留作练习. □

考虑任意子集 $X \subseteq \mathbb{P}^n$ 和商映射 $\pi : \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n$，可以定义锥 $C(X) = \pi^{-1}(X) \cup \{0\}$. 此外还可以定义

$$I_p(X) = \{F \in k[X_0, \cdots, X_n] : \forall [a_0 : \cdots : a_n] \in X, \lambda \in \mathbb{R}, F(\lambda a_0, \cdots, \lambda a_n) = 0\}.$$

则对任意多项式 $F = F_0 + \cdots + F_d$, 其中 F_i 为 i 次的部分，有 $F \in I_p(X) \iff F_0, \cdots, F_d \in I_p(X)$. 故 $I_p(X)$ 为齐次理想, 进一步地有 $I_p(X) = I(C(X))$.

我们有如下的射影情形的 Hilbert 零点定理.

Theorem 1.8 (射影 Hilbert 零点定理)

(1) $X = V_p(I)$，且 $I \neq (1)$, 则 $I_p(Z)\sqrt{I}$.

(2) $V_p(I) = \emptyset \iff \sqrt{I} \supseteq (X_0, \cdots, X_n) \iff \exists N, \text{s.t.} X_0^N, \cdots, X_n^N \in I$.

证明 (1) 由命题 1.11(1), 设 $I = (F_1, \cdots, F_m)$, 其中 F_i 齐次, 则 $I_p(X) = I(C(X)) = I(V(I)) = \sqrt{I}$.

(2) 不妨 $I \neq (1)$, 则 $\emptyset \neq V(I) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$，又由于 $V_p(I) \neq \emptyset \iff V(I) = (0, 0, \cdots, 0)$, 故由仿射的 Hilbert 定理得证. □

与仿射情形一样地有下面的命题.

Proposition 1.12

(1) $X = V_p(I)$ 不可约 $\iff I_p(X)$ 为素理想.

(2) $X = V_p(I)$ 中的闭集真降链必然有限长.

(3) $X = V_p(I)$ 可以唯一分解为不可约分支之并.

1.2.3 射影簇

Definition 1.14

称 $V_p(P) = X \subseteq \mathbb{P}^n$ 为**射影簇**，其中 P 为素齐次理想.

此时有分次环 $S_X = {k[X_0, \cdots, X_n]}\big/{P}$.

我们期望在 X 上定义有理函数，若要良定，应当需要所谓的齐次性条件:

Definition 1.15

记 $\tilde{K}(X) = \{\frac{F}{G} : \deg F = \deg G, G \neq 0\}$, 并定义

$$\frac{F_1}{G_1} \sim \frac{F_2}{G_2} \iff F_1G_2 - F_2G_1 \in P.$$

则 $K(X) = \tilde{K}(X)/\sim$ 称为 X 上的**有理函数域**. 与仿射情形一样地可以定义正则函数茎 $\mathcal{O}_{X,x}$.

Remark 用局部化的语言有 $\mathcal{O}_{X,x} = (S_X)_{m_x}, K(X) = (S_X)_{(0)}$. 详见 Hartshone Chap1 Thm3.4.

Remark 任意 $\varphi = \frac{F}{G} \in K(X)$ 可以良好定义开集 $U = \{G \neq 0\}$ 上的一个函数.

Proposition 1.13

(1) 设 $X \subseteq \mathbb{P}^n$ 为射影簇，$Y = X \cap U_0 \neq \emptyset$，则 $Y \subseteq U_0 \simeq \mathbb{A}^n$ 为仿射簇，且 $K(X) \simeq K(Y)$.

(2) 任意仿射簇 $Y \subseteq U_0 \simeq \mathbb{A}^n$，存在 $\mathbb{P}^n$ 中的射影簇 X 使得 $Y = X \cap U_0$.

证明 (1) 设 $I_p(X) = (F_1, \cdots, F_m)$，则 $Y = V(F_1(1, x_1, \cdots, x_n), \cdots, F_m(1, x_1, \cdots, x_n))$，记为 $Y = V(f_1, \cdots, f_m)$. 则只需证 $I = (f_1, \cdots, f_m)$ 为素的.

若 $fg \in I$，其中 $f, g \in k[x_1, \cdots, x_n]$，则写为 $f(x_1, \cdots, x_n) = f(\frac{X_1}{X_0}, \cdots, \frac{X_n}{X_0})$，$g$ 也类似，故可以做齐次化：存在 N_1, N_2 使得 $X_0^{N_1} f, X_0^{N_2} g \in k[X_0, \cdots, X_n]$ 齐次.

又 $V_p((X_0^{N_1} f)(X_0^{N_2} g)) \supseteq \overline{Y} = X$，则由于 X 不可约，$X_0^{N_1} f$ 或者 $X_0^{N_2} g$ 为 $I_p(X)$ 中的元素.

则不妨 $X_0^{N_1} f = G_1 F_1 + \cdots + G_m F_m$，有 $f = X_0^{-N_1}(G_1 F_1 + \cdots + G_m F_m) = g_1 f_1 + \cdots + g_m f_m \in I$. 此外不难建立

$$K(X) \rightleftharpoons K(Y), \frac{\overline{F}(X_0, \cdots, X_n)}{\overline{G}(X_0, \cdots, X_n)} \to \frac{\overline{F}(1, x_1, \cdots, x_n)}{\overline{G}(1, x_1, \cdots, x_n)}, \frac{\overline{X_0^N f}}{\overline{X_0^N g}} \leftarrow \frac{\overline{f}(x_1, \cdots, x_n)}{\overline{g}(x_1, \cdots, x_n)}, \text{其中} x_i = \frac{X_i}{X_0}.$$

(2) 设 $Y = V(Q)$，其中 $Q \triangleleft k[x_1, \cdots, x_n]$ 为素理想，则令 $X = \overline{Y} \subseteq \mathbb{P}^n$，利用点集拓扑可以证明 Y 不可约，则 X 不可约，进而为射影簇. $\square$

1.3 抽象代数簇

1.3.1 代数簇

Definition 1.16

定义射影代数簇 $\overline{X}$ 中的非空开集为**代数簇**. $\varphi \in K(\overline{X})$ 称为 X 上的有理函数.

对 U 为开集, 同样可以定义 U 上的正则函数集合 $\mathrm{Reg}(U) = \Gamma(U) \subseteq K(X)$ 和正则函数茎 $\mathcal{O}_{X,x}$.

与仿射情形类似地也有如下的直接的结论.

Proposition 1.14

X 为代数簇, 是射影簇 $\overline{X} \subseteq \mathbb{P}^n$ 中的开集, 则

(1) 令 $Y = \overline{X} \cap U_0, x \in X \cap U_0$, 有 $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{\overline{X},x} = \mathcal{O}_{Y,x}$.

(2) $\Gamma(U) = \cap_{x\in U}\mathcal{O}_{X,x}$.

Theorem 1.9

(1) 代数簇 X 是拟紧的, 即 X 中的开集是紧的.

(2) $f \in \Gamma(X)$, 则 $V_X(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$ 为闭集.

证明 (1) 只需证代数簇是紧的. 则设 $X \subseteq \overline{X} \subseteq \mathbb{P}^n$ 为射影簇中的开集, 设 $\overline{X} = V_p(I), X = \overline{X} \setminus V_p(F_1, \cdots, F_m) = \overline{X} \setminus V_p(I)$.

设 X 有开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 则 U_α 可以表示为 $\overline{X} \setminus V_p(F_1, \cdots, F_m, \cdots) = V_p(I_\alpha)$, 且 $\cap_{\alpha\in\Lambda}V_p(I_\alpha) = V_p(I)$.

又由 Noether 性, 闭集降链必然有限步稳定, 故存在 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 使得 $V_p(I) = \cap_{i=1}^n V_p(I_{\alpha_i})$, 进而 $X = \cup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$.

(2) 由 (1), 存在有限个表达式 $f = \frac{F_1}{G_1} = \cdots = \frac{F_r}{G_r}$ 使得 $X = \cup_{i=1}^r (X \setminus V_p(G_i))$, 记 $X \setminus V_p(G_i) = U_i$, 则

$$V_X(f) = \cup_{i=1}^r (U_i \cap V_p(F_i)).$$

其中 $U_i \cap V_p(F_i)$ 为 U_i 中的闭集, 进而 $V_X(f)$ 为闭集. □

1.3.2 代数簇之间的映射

Definition 1.17

对代数簇 X,Y 和映射 $\phi: X\to Y$, 若

(1) ϕ 连续.

(2) 对任意开集 $U\subseteq X, V\subseteq Y$ 使得 $\phi(U)\subseteq V$, 有 $\phi^*(\Gamma(V))\subseteq\Gamma(U)$.

则称 ϕ 是一个**态射**. $X\to Y$ 的态射全体记为 $\mathrm{Mor}(X,Y)$.

Proposition 1.15

若 ϕ 连续，则上面的条件 *(2)* $\iff\forall x\in X,\phi^*(\mathcal{O}_{Y,\phi(x)}\subseteq\mathcal{O}_{X,x}$.

证明 $\Rightarrow$: 由于 $\mathcal{O}_{Y,\phi(x)}=\varinjlim_{\phi(x)\in V}\Gamma(V)$, 有 $\forall y\in\mathcal{O}_{Y,\phi(x)},\phi^*f\in\Gamma(\phi^{-1}V)\subseteq\mathcal{O}_{X,x}$. 注意到利用了 $\phi^{-1}V$ 是开集，即 ϕ 连续的条件.

$\Leftarrow$: 对任意 $f\in\phi^*(\Gamma(V))=\phi^*(\cap_{y\in V}\mathcal{O}_{Y,y}),x\in U$, 有 $f\in\phi^*(\mathcal{O}_{Y,\phi(x)})\subseteq\mathcal{O}_{X,x}$, 故有 $f\in\cap_{x\in X}\mathcal{O}_{X,x}\subseteq\Gamma(U)$. □

Definition 1.18

对代数簇 $X\subseteq\mathbb{P}^m,Y\subseteq\mathbb{P}^n$, 若映射 $\phi:X\to Y$ 由不全为 *0* 的 $u_0,\cdots,u_m\in K(X)$ 表示，即 $\phi(x)=[u_0(x):\cdots:u_m(x)]$, 则称 ϕ 为**有理映射**.

对两个有理映射 $\phi=[u_0:\cdots:u_m]$ 和 $\psi=[v_0:\cdots:v_m]$, 称它们**等价**，若存在 $\varphi\in K(X)$, 使得 $v_i=\varphi u_i$. 故显然可以把两个等价的有理映射在公共定义域上看成一样的.

称有理映射 ψ 在 x 处有定义，若在 x 处（或者在 x 的邻域内）有表达式 $\psi=[\frac{F_0}{G_0}:\cdots:\frac{F_m}{G_m}]$, 其中 $G_i(x)\neq 0,F_i(x)$ 不全为 *0*. 把有定义的点的集合称为定义域，记为 $\mathrm{Dom}(\psi)$, 它是一个非空开集.

Example 1.15 开嵌入、闭嵌入为态射；态射的复合为态射.

Theorem 1.10

对 X,Y 代数簇，其中 Y 仿射，则有一一对应 $\mathrm{Mor}(X,Y)\rightleftharpoons\mathrm{Hom}_k(\Gamma(Y),\Gamma(X))$.

特别地，若 X 也仿射，则有 $\mathrm{Mor}(X,Y)=\mathrm{Poly}(X,Y)$.

证明 $\Rightarrow$: $\phi\to\phi^*$.

$\Leftarrow$: 给定 $\eta:\Gamma(Y)\to\Gamma(X)$, 设 $u_i=\eta(\overline{y}_i)\in\Gamma(X)$, 则定义

$$\phi_\eta: X\to Y, x\mapsto(u_1(x),\cdots,u_m(x)).$$

首先有

$$\phi_\eta^*(\overline{g})(x)=\overline{g}(\phi_\eta(x))=\overline{g}(u_1(x),\cdots,u_m(x))=\overline{g}(\eta(\overline{y}_1),\cdots,\eta(\overline{y}_m))(x)=\eta(\overline{g})(x),\forall\overline{g}\in\Gamma(Y),x\in X.$$

故 $\phi_\eta^* = \eta$, 则只需验证 ϕ_η 是态射:

(1) 连续: 对 Y 中闭集 $M = V_Y(g_1, \cdots, g_r)$, 有 $\phi_\eta^{-1}(M) = V_X(g_1(u_1, \cdots, u_m), \cdots, g_r(u_1, \cdots, u_m))$ 为 X 中闭集.

(2) 对任意 $x \in X$, 设 $\varphi = \frac{f(y_1,\cdots,y_m)}{g(y_1,\cdots,y_m)} \in \mathcal{O}_{Y,\phi_\eta(x)}$, 有 $\phi_\eta^*\varphi = \frac{f(u_1,\cdots,u_m)}{g(u_1,\cdots,u_m)} \in K(X) \cap \mathcal{O}_{X,x}$, 故得证. $\square$

事实上上面定义的抽象的态射是完全可以被具体刻画的.

Theorem 1.11

对代数簇 X, Y, $\phi : X \to Y$ 为态射 $\iff$ ϕ 是有理映射且 $\mathrm{Dom}(\phi) = X$. ♡

证明 $\Rightarrow$: 设 $Y = \mathbb{P}^m$, 则设 $Y_i' = Y \cap U_i \subseteq \mathbb{A}^m$, 令 $X_i' = \phi^{-1}(Y_i')$. 则由条件, X_i' 为开集. 设 $\phi_i : X_i' \to \mathbb{A}^m$ 也为态射，故 $u_j = \phi_i^* y_j \in \Gamma(X_i'), 1 \le j \le m$. 故有

$$\phi_0' : X_0' \to \mathbb{A}^m \hookrightarrow \mathbb{P}^m, x \mapsto [1 : u_1 \cdots : u_m].$$

故 ϕ_0 为有理映射，且不难验证 $\phi_0 = \phi_1$ on $X_0' \cap X_1'$. 故可以粘合成一个有理映射 ϕ，且 $\mathrm{Dom}(\phi) = X$.

$\Leftarrow$: 首先对任意 $x \in X$, 任取 $\varphi \in \mathcal{O}_{Y,\phi(x)}$, 有表示 $\varphi = \frac{F}{G}$ 且 $G(\phi(x)) \neq 0$，又 ϕ 在 x 附近可以表示为 $[u_0, \cdots, u_m]$，其中 $u_i(x)$ 有定义且不全为 0. 则 $\phi^*\varphi = \frac{F(u_0,\cdots,u_m)}{G(u_0,\cdots,u_m)} \in K(X)$, 且在 x 处有定义. 则 $\phi^*\mathcal{O}_{Y,\phi(x)} \in \mathcal{O}_{X,x}$.

则只需证 ϕ 连续. 取 ϕ 的有限个表达 $\phi = [\frac{F_{t,0}}{G_{t,0}}, \cdots, \frac{F_{t,m}}{G_{tm}}], 1 \le t \le r$, 使得

$$X = \cup_{t=1}^r (X \setminus ((V_p(G_{t_0}, \cdots, G_{t_m}) \cup V_p(F_{t,0} \cdots F_{t,m}))) = \cup_{t=1}^r X_t'.$$

其中 X_t' 为开集，且令 $X_{t,j}' = \cup_{j=0}^m X_t' \cap \{F_{t_j} \neq 0\}$, 有 $X_t' = \cup_{j=0}^m X_{t,j}'$.

则只需验证 $\phi : X_{t,j}' \to Y_{t,j}' \subseteq \{Y_j \neq 0\} \subseteq \mathbb{A}^m$ 连续即可. 以 $t = 0, j = 0$ 为例，则仿射簇之间的映射 $\phi_0 : X_{0,0}' \to Y_{0,0}'$ 为有理映射且定义域为 X_{00}'，故为多项式映射，设 $\phi_0 = (u_1, \cdots, u_m), u_i \in \Gamma(X_{00}')$, 对 Y_{00}' 中的闭集 $V_{Y_{00}'}(g_1, \cdots, g_s)$, 有 $\phi_0^{-1} V_{Y_{00}'}(g_1, \cdots, g_s) = V_{X_{00}'}(\phi_0^* g_1, \cdots, \phi_0^* g_s)$ 为闭集，故连续. $\square$

Definition 1.19

对代数簇 X, Y，双射 $\phi : X \to Y$ 称为**同构**，若 ϕ 和 ϕ^{-1} 都是态射.

与之前定义的仿射代数簇同构的代数簇也被称为仿射代数簇，也简称仿射簇. ♣

Example 1.16 $X = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ 是仿射的: $\phi : X \to V(xy - 1) \subseteq \mathbb{A}^2, x \mapsto (x, \frac{1}{x})$ 为同构.

Example 1.17 $X = \mathbb{A}^2 - \{(0, 0)\}$ 不是仿射的. (提示: 可以计算 $\Gamma(X) = k[x, y]$)

Proposition 1.16

设 X 为仿射簇，则对 $0 \neq f \in \Gamma(X)$, 有主开集 $D_X(f)$ 也为仿射簇.

证明 设 $X = V(P) \subseteq \mathbb{A}^n$, P 为素理想，则设 $f = \overline{F}(x_1, \cdots, x_n) \in \Gamma(X)$, 则考虑

$$\phi : D_X(f) \to Y = V(P, yF - 1), x \mapsto (x, \frac{1}{f(x)}), \psi : Y \to D_X(f), (x, y) \mapsto x.$$

有它们互逆且均为态射，则 $D_X(f)$ 同构于 $V(P, yF - 1)$ 为仿射簇. □

Proposition 1.17

X 为代数簇，则

(1) 仿射开集构成了 X 的开集基.

(2) X 为有限个仿射开集之并.

证明 (1) 任意 $x \in X$, 设 $x \in \{X_0 \neq 0\}$, 故不妨设 $x \in U \subseteq \{X_0 \neq 0\} \subseteq \mathbb{A}^n$, 其中 U 为 X 中开集. 则 U 在 $\mathbb{A}^n$ 中的闭包为仿射簇，设 $\overline{U} = V(I)$, 则 $U = \overline{U} \setminus V(J), x \notin V(J)$.

不妨 $U \neq \overline{U}$, 则 $J \neq (0)$, 即存在 $f \in J, f(x) \neq 0$. 此时 $x \in D_{\overline{U}}(f) = \overline{U} \setminus V(f) \subseteq U$. 则 $D_{\overline{U}}$ 为包含 x 的仿射开集.

(2) 由 (1) 和 X 的紧性立得. □

最后来刻画代数簇上的双有理映射.

Theorem 1.12

对 X, Y 为代数簇，则对支配映射 $\psi : X \to Y$, 有如下等价

(0) ψ 双有理映射.

(1) 存在 $U \subseteq X, V \subseteq Y$ 开集，使得有同构 $U \simeq V$.

(2) $\psi^* : K(Y) \to K(X)$ 为同构.

证明 (0) $\Rightarrow$ (1) : 设 $\psi : X \to Y$ 有逆 $\phi : Y \to X$, 考虑

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\psi"] & Y \arrow[r, "\phi"] & X \arrow[r, "\psi"] & Y \\
U_1 \arrow[ur] & V_1 \arrow[ur] & U_1 & \\
U \arrow[ur, dashed] & V \arrow[ur, dashed] & U &
\end{tikzcd}$$

其中 $U_1 = \mathrm{Dom}(\psi), V_1 = \mathrm{Dom}(\phi), U = \psi^{-1}(V_1) \cap U_1, V = \psi^{-1}(U_1) \cap V_1$. 则 $\phi \circ \psi : U \to X$ 为恒等，则 $\phi(U) \subseteq V$. 故 U, V 为所求.

(1) $\Rightarrow$ (0) : 显然.

$(0) \Rightarrow (2)$: 由于为支配映射，有 $\psi^* \circ \phi^* = \mathrm{Id}_{K(X)}, \phi^* \circ \psi^* = \mathrm{Id}_{K(Y)}$. 故有同构 $K(X) \simeq K(Y)$.

$(2) \Rightarrow (0)$: 给定 $\psi^* : K(Y) \to K(X)$ 为同构，不妨 $X \subseteq \mathbb{A}^n$, 设坐标为 $x_1, \cdots, x_n \in K(X)$. 则 $y_i = (\psi^*)^{-1}(x_i) \in K(Y)$ 满足 $K(Y) = k(y_1, \cdots, y_n)$. 故令 $\phi : Y \to \mathbb{A}^n, y \mapsto (y_1(y), \cdots, y_n(y))$，可以验证 $\mathrm{Im}(\phi) \subseteq X$, 且 ϕ 为 ψ 的逆. □

1.4 维数

Proposition 1.18

对有限域扩张 K/k, 则

(1) 存在 $x_1,\cdots,x_r\in K$, 使得 $x_1,\cdots,x_r$ 是 k-代数无关的，且 $K/k(x_1,\cdots,x_r)$ 为代数扩张. 此时称 $x_1,\cdots,x_r$ 为一组**超越基**.

(2) 上面的 r 与超越基的选取无关，称为 K/k 的**超越次数**，记为 $\operatorname{tr.deg} K/k$.

证明 首先我们承认如下引理.

Lemma 1.1

记号如上，x_n 在 $k(x_1,\cdots,x_{n-1})$ 上代数 $\iff$ $\exists$ 不可约多项式 $F(T_1,\cdots,T_n)\in k[T_1,\cdots,T_n]$ 使得 $F(x_1,\cdots,x_n)=0$, 且 x_n 在 F 中出现.

(1) 由 Zorn 引理，存在 K 上的极大 k-代数无关子集 $x_1,\cdots,x_r$. 则此时显然 $K/k(x_1,\cdots,x_r)$ 为代数扩张，否则存在 $l\in K$ 关于 $k(x_1,\cdots,x_r)$ 超越，则加入 l 可以获得更大的代数无关集合，矛盾.

(2) 对两组超越基 $x_1,\cdots,x_r$ 和 $y_1,\cdots,y_s$, 不妨 $r\le s$.

由于 y_1 在 $k(x_1,\cdots,x_r)$ 上代数, 则存在 $F(x_1,\cdots,x_r,y_1)=0$, 且至少一个 x_i(不妨为 x_1) 在 F 中出现, 则由引理 x_1 在 $k(x_2,\cdots,x_r,y_1)$ 上代数, 进而 $K/k(x_2,\cdots,x_r,y_1)$ 为代数扩张, 故 y_2 在 $k(x_2,\cdots,x_r,y_1)$ 上代数.

类似地 $K/k(y_1,y_2,x_3,\cdots,x_r)$ 也代数，一直下去有 $K/k(y_1,\cdots,y_r)$ 也代数，则 $y_1,\cdots,y_r$ 为超越基，即 $r=s$. □

Definition 1.20

对代数簇 X, 定义其**维数**为 $\dim(X)=\operatorname{tr.deg} K(X)/k$.

则维数有如下的基本性质.

Proposition 1.19

(1) $U\subseteq X$ 为非空开集，则 $\dim U=\dim X$.

(2) 对不可约闭集 $Z\subseteq X$, 有 $\dim Z\le\dim X$, 且取等当且仅当 $Z=X$.

证明 (1) 此时有 $K(U)=K(X)$，则由定义立得.

(2) 不放 $Z\subseteq X\subseteq\mathbb{A}^n$ 为仿射簇，其中 $\Gamma(X)=k[T_1,\cdots,T_N]\big/I(X)$, $\Gamma(Z)=k[T_1,\cdots,T_N]\big/I(Z)$, 并记 T_i 在商中的像分别为 $\overline{T_i},\overline{\overline{T_i}}$. 则若任意 $\overline{\overline{T_{i_1}}},\cdots,\overline{\overline{T_{i_n}}}$ 代数无关可以推出 $\overline{T}_{i_1},\cdots,\overline{T}_{i_n}$ 代数无关，则 $\dim X\ge\dim Z$.

若 $\dim X=\dim Z=n, Z\ne X$, 则存在 $0\ne f\in\Gamma(X), f(Z)=0$. 设 $K(Z)$ 的超越基为 $\overline{\overline{T_1}},\cdots,\overline{\overline{T_n}}$,

则 $\overline{T_1}, \cdots, \overline{T_n}$ 为 $K(X)$ 的超越基. 设有关系

$$a_m(\overline{T_1}, \cdots, \overline{T_n}) f^m + \cdots + a_0(\overline{T_1}, \cdots, \overline{T_n}) = 0.$$

则在 Z 上考虑，只能有 $a_0(\overline{\overline{T_1}}, \cdots, \overline{\overline{T_n}}) = 0$, 与 $\overline{\overline{T_1}}, \cdots, \overline{\overline{T_n}}$ 作为超越基代数无关矛盾! □

Example 1.18 $\dim \mathbb{A}^n = n$.

Example 1.19 对 $\mathbb{A}^n$ 中超曲面 $V(F)$, 有 $X = \dim V(F) = n - 1$:

设 $K(X) = k(\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_n)$, 则 $F(\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_n) = 0$, 不妨 x_n 出现在 F 中，则 $\overline{x_n}$ 在 $k(\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_{n-1})$ 上代数，即 $\dim X \le n - 1$.

另一方面若 $G(\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_{n-1}) = 0$, 则 $G(x_1, \cdots, x_{n-1}) \in (F)$, 但 F 包含 x_n, 矛盾! 故 $\dim X = n-1$.

事实上在特征 0 的域中余维 1 的代数簇由超曲面刻画.

Proposition 1.20

对特征 0 的域 k, X 为 n 维代数簇，则它双有理等价于 $\mathbb{A}^{n+1}$ 中的超曲面.

证明 由定义，存在 $x_1, \cdots, x_n \in K(X)$ 是 k-代数无关的, 使得 $K(X) \big/ k(x_1, \cdots, x_n)$ 为有限扩张. 该扩张可分，故为单扩张，即设 $\alpha \in K(X), K(X) = k(x_1, \cdots, x_n, \alpha) \simeq k(x_1, \cdots, x_n)[y] \big/ (F)$, 其中 $f \in k[x_1, \cdots, x_n, y]$ 不可约. 则令 $Y = V(f) \in \mathbb{A}^{n+1}$, 有 $K(X) \simeq K(Y)$. 故 X 和 Y 双有理等价. □

小维数的代数簇也可以被刻画.

Proposition 1.21

设 X 为代数簇.

(1) $\dim X = 0 \iff X = \{pts\}$.

(2) $\dim X = 1$ 且 $X \subseteq \mathbb{A}^2$, 则 $I(X) = (f)$, 其中 $f \in k[x, y]$ 不可约.

(3) $\dim X = 1$, 则 X 与超曲面 $V(f) \subseteq \mathbb{A}^2$ 双有理等价.

证明 (1) 显然.

(2) 若 $I = I(X)$ 不为主理想，则存在 $f, g \in I$ 互素 (为什么？).

则进而 f, g 在 $k(x)[y]$ 中互素，又 $k(x)[y]$ 为 PID，存在 $R, S \in k(x)[y], Rf + Sg = 1$, 通分有 $Af + Bg = D, D \in k[x], A, B \in k[x, y]$.

若 $(a, b) \in V(f, g)$, 则只能 $D(a) = 0$, 又 D 为单元多项式，零点有限，故 $V(f, g)$ 的第一分量只有有限中可能，由对称性对第二分量也是，故 $V(f, g)$ 为有限个点，矛盾! 进而 I 为主理想，即 $I = (f)$, f 不可约.

(3) 由上面的命题，只需考虑 $\mathrm{char} k = p > 0$ 的情形. 由 $\dim X = 1$, 可取 $x \in K(X)$ 使得 $K(X) \big/ k(x)$ 为代数扩张，若该扩张可分，则与上面特征 0 的情形相同.

否则，取其可分闭包 $k(x)\subseteq L=k(x,\alpha)\subseteq K(X)$, 其中 $L/k(x)$ 可分，$K(X)/L$ 纯不可分. 此时有单扩张链 $K_0=L\subseteq K_1=K_0(\beta_1)=K_0(\beta_0^{\frac{1}{p}})\subseteq K_2=K_1(\beta_1^{\frac{1}{p}})\cdots\subseteq K_r=K(X)$, 其中 $\beta_{i-1}\in K_{i-1}$. 进而考虑

$$
\begin{tikzcd}
k(x) \arrow[r, "n\text{次，可分}"] \arrow[d, hook] & k(x,\alpha)=K_0 \arrow[r, "p\text{次}"] & K_1=K_0(\beta_0^{\frac{1}{p}}) \arrow[d, hook] \\
k(x^{\frac{1}{p}}) \arrow[rr, "\text{可分}"] \arrow[d, hook] & & k(x^{\frac{1}{p}},\alpha^{\frac{1}{p}}) \arrow[d, hook] \\
k(x^{\frac{1}{p^2}}) \arrow[rr, "\text{可分}"] & & k(x^{\frac{1}{p^2}},\alpha^{\frac{1}{p^2}})
\end{tikzcd}
$$

一直进行下去，有 $K(X)=k(x^{\frac{1}{p^r}},\alpha^{\frac{1}{p^r}})$, 则 $K(X)/k(x^{\frac{1}{p^r}})$ 为单扩张，进而化为命题 1.20 情形. $\square$

1.5 光滑与奇异

对仿射簇 $X=V(P)=V(f_1,\cdots,f_m)$，我们可以定义外蕴的切空间 $T_xX=\{v\in k^n: J_x\cdot v=0\}$，其中 J_x 是 f_i 在 x 处的线性部分张成的. 它有如下的内蕴刻画：

Theorem 1.13

$T_x^*X = {}^{m_{X,x}}\Big/_{m_{X,x}^2}$.

证明 设 $X=V(P)$, 由平移不妨 $x=0$. 记 $m_x=(x_1,\cdots,x_n)$, 则设 $f_i=l_i+h_i$，其中 l_i 为线性部分，则有 $h_i\in m_x^2$. 同时有 $T_x^*X={}^{(k^n)^*}\Big/_{\mathrm{Span}_k J_x}={}^{(k^n)^*}\Big/_{\mathrm{Span}_k\{l_i\}}$, 故

$$
{}^{m_{X,x}}\Big/_{m_{X,x}^2}=S^{-1}\left(\frac{m_x+P}{m_x^2+P}\right)\simeq\frac{m_x+P}{m_x^2+P}\simeq\frac{{}^{m_x}\big/_{m_x^2}}{{}^{(m_x^2+P)}\big/_{m_x^2}}\simeq\frac{\mathrm{Span}_k\{x_1,\cdots,x_n\}}{\mathrm{Span}_k\{l_1,\cdots,l_n\}}\simeq T_x^*X.
$$

则得证. □

上面的讨论是针对仿射簇的，但它启发我们对一般的代数簇作如下定义.

Definition 1.21

设 X 为代数簇，对 $x\in X$, 若 $\dim_k {}^{m_{X,x}}\Big/_{m_{X,x}^2}=\dim X$, 则称 x 为**光滑点**，否则为**奇异点**. 光滑点的集合记为 X^{sm}.

Example 1.20 对仿射簇，首先有 $\dim T_x^*X=n-\mathrm{rank}(J_x)$, 故考虑 $X=V(y^2-x^3)\subseteq\mathbb{A}^2$, 设 $P=(x_0,y_0)\in X$, 则 P 为光滑点 $\iff\dim X+\mathrm{rank}(-3x^2,2y)=2\iff\mathrm{rank}(-3x^2,2y)=1$. 故 $(0,0)$ 为奇异点，其它为光滑点.

或者也可以利用定理 1.13 来计算余切空间的维数. 则 $m=(x,y)+(y^2-x^3), m^2=(x^2,xy,y^2)+(y^2-x^3)=(x^2,xy,y^2)$, 则

$$
T_0^*X=m/m^2=(x,y)/(xy,y^2,x^2)=k\overline{x}\oplus k\overline{y}.
$$

故 $\dim T_0^*X=2$.

关于维数和光滑性进一步有如下的命题，在此不做证明.

Proposition 1.22

(1) $\dim X\le\dim_k {}^{m_{X,x}}\Big/_{m_{X,x}^2}$.

(2) 设 F 不可约，则 $X=V(F)\subseteq\mathbb{A}^n$ 的光滑点集 X^{sm} 为非空开集.

(3) 若 $\mathrm{char}k=0$ 或者 $\dim X=1$, 则 X^{sm} 为非空开集.

Theorem 1.14

X 为仿射曲线，$A=\Gamma(X)$, 则 A 的非平凡素理想均为极大理想.

证明 都则，有素理想 P 使得 $(0)\subsetneq P\subsetneq Q\subseteq A$, 则取 $0\neq u\in P, v\in Q\setminus P$. 则由 $\dim X=1$ 有 $K(X)/k(u)$ 为代数扩张，特别地 v 为 $k(u)$ 上的代数元. 故存在不可约多项式 $F\in k[x,y], F(u,v)=0$.

设 $F(x,y)=xG(x,y)+H(y)$, 则 $uG(u,v)+H(v)=0$, 进而 $H(v)=-uG(u,v)\in P$. 设 $H(y)=a(y-b_1)\cdots(y-b_n)$, 有 $a(v-b_1)\cdots(v-b_n)\in P$.

由 P 为素理想，存在 $v-b_i\in P\subseteq Q$, 但由于 $v\notin P$, 有 $b_i\neq 0, v\notin Q$, 则矛盾! □

下面我们用环论的语言刻画光滑性.

Definition 1.22

对整环 R, 设 $K=\mathrm{Frac}(R)$ 为分式域，定义

$$R^{\nu}=\{\alpha\in K:\alpha 在 R 上是整的，即存在首一多项式 f\in R[x], f(\alpha)=0\}.$$

为 R 的**正规化**.

若 $R=R^{\nu}$，则称 R 为**正规环**.

Proposition 1.23

(1) UFD 是正规的.

(2) k 为代数闭域，R 为整环且为有限生成 k-代数，则 R^{ν}/R 是有限扩张. 特别地，R^{ν} 也有限生成.

证明 (1) 若不正规，则存在 $\frac{u}{v}\in K-R$ 在 R 上整，不妨 $\gcd(u,v)\sim 1$, 并设

$$f(\frac{u}{v})=(\frac{u}{v})^n+a_{n-1}(\frac{u}{v})^{n-1}+\cdots+a_0=0, a_i\in R.$$

则通分后有 $-u^n=a_0v^n+a_1v^{n-1}u+\cdots+a_{n-1}vu^{n-1}$. 但 v 整除右边，不整除左边，矛盾!

(2) 远超本课程范围，略去. □

Example 1.21 设 $R=k[x,y]\big/(y^2-x^3)$, 则 $K(t)\xrightarrow{\sim}K(R), t\mapsto\frac{y}{x}$. 注意到 $(\frac{y}{x})^2=x\in R, (\frac{y}{x})3=y\in R$, 有 $\frac{y}{x}\in R^{\nu}$, 进而 $R^{\nu}\supseteq R[\frac{y}{x}]=k[\frac{y}{x}]\simeq k[t]$. 可以验证 $k[t]$ 为正规的，则 $R^{\nu}=k[t]\neq R$, 即 R 不是正规环.

Definition 1.23

对整环 R 和分式域 $K=\mathrm{Frac}(R)$，称 R 为**离散赋值环 (DVR)**, 若存在**赋值** $v: K^* \to \mathbb{Z}$, 满足:

(1) $v(1)=0$.

(2) $v(r_1r_2)=v(r_1)+v(r_2), \forall r_1, r_2 \in K^*$.

(3) $\exists x \in K, V(x)=1$.

(4) $v(r_1+r_2) \geq \min\{v(r_1), v(r_2)\}, \forall r_1, r_2 \in K^*$.

(5) $R=\{a \in K : v(a) \geq 0\} \cup \{0\}$.

Proposition 1.24

若 R 为 DVR，则

(1) $m=\{a \in K : v(a)>0\} \cup \{0\}$ 为极大理想，且 (R,m) 为局部环.

(2) x 如定义中的 (3), 则 $m=(x)$, 且 R 是正规的，为 PID.

证明 (1) 任意 $s \in R \setminus m$, 有 $v(s)=0$, 则 $v(\frac{1}{s})=v(1)-v(s)=0.\frac{1}{s} \in R$, 即 s 可逆，故 m 为极大理想，且 (R,m) 为局部环.

(2) 显然 $(x) \subseteq m$, 任取 $0 \neq a \in m$, 设 $v(a)=r$, 则 $v(\frac{a}{x^r})=0$, 即 $\frac{a}{x^r} \in R$, 进而 $a=\frac{a}{x^r}x^r \in m, m \subseteq (x)$. 故 $m=(x)$.

再证 R 是正规的，注意到：任取 $y \in K^*$, 有 $y \in R$ 或者 $y^{-1} \in R$.

任取 $y \in R^{\nu}$, 则设 $y^n+a_{n-1}y^{n-1}+\cdots+a_0=0, a_i \in R$, 若 $y \in R$, 则结束，否则有 $y^{-1}=z \in R$, 此时有

$$y=-(a_{n-1}+a_{n-2}z+\cdots+a_0z^{n-1}) \in R.$$

再证为 PID. 任意 $0 \neq z \in R$, 设 $n=v(z) \geq 0$，则 $v(\frac{z}{x^n})=0$, 即 $\frac{z}{x^n}$ 可逆.

则任取 I 为 R 的理想，则取 $a_0 \in I$, 使得 $k=v(a_0)=\min\{v(a) : a \in I, a \neq 0\}$, 则 $x^k=a_0 \cdot \frac{x^k}{a_0} \in I$, 进而 $(x^k) \subseteq I$. 可以验证 $I=(x^k)$. □

下面用上面的语言来刻画曲线上的光滑性.

Theorem 1.15

对代数曲线 X 和 $P \in X$, 有下列命题等价.

(1) P 为 X 的光滑点.

(2) $(\mathcal{O}_{X,P}, m_{X,P})$ 为 DVR.

(3) $\mathcal{O}_{X,P}$ 为正规环.

证明 (2) $\Rightarrow$ (3) : 上面的命题给出.

(1) $\Rightarrow$ (2) : 设 $m_{X,P}\big/m_{X,P}^2=\mathrm{Span}_k(\overline{u})$, 其中 $u \in \mathcal{O}_{X,P}, u(P)=0$. 可以验证 $m_{X,P}=(u)$, 进而 $m_{X,P}^r=(u^r)$.

又 $m_{X,p}\cdot\cap_r m_{X,P}^r=\cap_r m_{X,P}^r$, 则由 Nakayama 引理，有 $\cap_r m_{X,P}^r=(0)$.

则在 $\mathcal{O}_{X,P}$ 上定义赋值：若 $0\neq f\in\mathcal{O}_{X,P}$, 则存在 r 使得 $f\in m_{X,P}^r\setminus m_{X,P}^{r+1}$. 则定义 $v(f)=r$. 进一步可以扩展到分式域上，可以定义一个赋值.

$(3)\Rightarrow(1)$: 任取 $u,v\in m_{X,P}$, 只需证 $\overline{u},\overline{v}$ 线性相关. 由 $\dim K(X)=1$, 故 u,v 代数相关，即存在不可约多项式 $f=f_d+\cdots+f_N$, 使得 $f(u,v)=0$, 其中 f_i 为 i 次部分. 则通过对 u,v 做合适的可逆线性变换，可设 $f_d(u,v)=u^d+\cdots+a_0v^d$, 则

$$\frac{f(u,v)}{v^d}=(1+c_d(u,v))(\frac{u}{v})^d+\cdots+(a_0+c_0(u,v))=0.$$

其中 c_i 为多项式，且由于 $c_d(u,v)\in m_{X,P}$, 有 $1+c_d(u,v)$ 可逆，故上面的多项式可以首一化，进而 $g=\frac{u}{v}\in(\mathcal{O}_{X,P})^\nu=\mathcal{O}_{X,p}$, 则 $\overline{u}=\overline{v}\cdot\overline{g}$, 其中 $\overline{g}\in\mathcal{O}_{X,P}\big/m_{X,P}=k$, 则线性相关. □

Proposition 1.25

对代数曲线 X, P 为光滑点，则任意有理映射 $\phi:X\to\mathbb{P}^n$ 在 P 处有定义.

证明 设 $\phi=[u_0:\cdots:u_n], u_i\in K(X)$, 则由于 $\mathcal{O}_{X,P}$ 为 DVR, 存在赋值 $v:K(X)\to\mathbb{Z}$.

不妨设 $v(u_0)$ 最小，则 $v(\frac{u_i}{u_0})\geq 0$, 从而 $\frac{u_i}{u_0}\in\mathcal{O}_{X,P}$. 则 $\phi=[1:\frac{u_1}{u_0}:\cdots:\frac{u_n}{u_0}]$ 有定义. □

1.6 奇点解消

Definition 1.24

对代数簇 X, X 的一个**奇点解消**是指一个双有理映射 $\mu : \tilde{X} \to X$, 使得 $\tilde{X}$ 为光滑射影簇，且 $\mu : \mu^{-1}(X^{sm}) \to X^{sm}$ 为同构.

Theorem 1.16

设 C 为射影代数曲线，则

(1) C 的正规化 $\nu : \tilde{C} \to C$ 为奇点解消.

(2) C 的解消在同构意义下唯一.

证明 (1) 超过本课程范畴，略去.

(2) 可以约化为证明：若态射 $\psi : \tilde{C} \to \tilde{C}$ 满足 $\psi^* = \mathrm{Id} : K(\tilde{C}) \to K(\tilde{C})$, 则 $\psi = \mathrm{Id}_{\tilde{C}}$, 留作作业. □

Example 1.22 对 $C = \{y^2 - x^3 = 0\} \subseteq \mathbb{A}^2$, 则考虑 $\Gamma(C) = {}^{k[x,y]}/_{(y^2 - x^3)}$ 的正规化 $k[\frac{y}{x}]$（第一章例 1.21），可知 $\tilde{C} = \mathbb{A}^1$.

Chapter 2 概型

2.1 层

Definition 2.1

对拓扑空间 X, 设 S 为 X 上开集的范畴，则 *Abel* 群**预层**是指一个函子 $\mathcal{F}: S^{op} \to \mathcal{A}$, 其中 $\mathcal{A}$ 为 *Abel* 群范畴. 具体而言，即对任意开集 $U \subseteq X$, 指定一个 *Abel* 群 $\mathcal{F}(U)$, 满足

(0) $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$.

(1) $\forall V \subseteq U$ 开集，存在 *Abel* 群同态 $r_{UV}: \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, 称为**限制映射**.

(2) 任意开集链 $W \subseteq V \subseteq U$ 有 $r_{UW} = r_{UV} \circ r_{VW}$.

对两个预层 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$, **预层同态**η 由下面形式表达:

$\forall U$ 为开集，$\eta_U: \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ 为群同态，且满足对任意 $V \subseteq U$，使得有如下交换图表:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\eta_U"] \arrow[d, "r_{UV}"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "r_{UV}"] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\eta_V"] & \mathcal{G}(V) \end{tikzcd}$$

♣

Example 2.1 X 为光滑流形，$C_X^\infty(U) = \{U\text{上的光滑函数}\}$, 则 C_X^∞ 为预层，其中限制映射即为典范意义的限制. 事实上它是一个层.

Example 2.2 对 $X = \mathbb{R}$, 取 $L_X^1(U) = \{U\text{上绝对可积函数}\}$, 则 L_X^1 为预层.

Definition 2.2

$s \in \mathcal{F}(U)$ 称为 U 上的**截面**. 若 $V \subseteq U$, 则记 $r_{UV}(s) = s|_V$.

定义 x 处的**茎**$\mathcal{F}_x = \varinjlim\limits_{x \in U} \mathcal{F}(U) = \bigsqcup_{x \in U} \mathcal{F}(U)/\sim$, 其中对 $s_U \in \mathcal{F}(U), t_V \in \mathcal{F}(V)$，则定义

$$s_u \sim t_v \iff \exists W \subseteq U \cap V, \text{s.t.} s_U|_W = t_V|_W.$$

则 $\alpha \in \mathcal{F}_x$ 可以用 $\bar{s}_U$ 表示. 对 $s \in \mathcal{F}(U)$, 记 s_x 为 s 在 $\mathcal{F}(U)$ 中的像.

♣

下面的命题都是易于验证的.

Proposition 2.1

(1) $\alpha = \bar{s}_U = 0 \iff \exists V \subseteq U, \text{s.t.} s_U|_V = 0$.

(2) $\alpha = \bar{s}_U, \beta = \bar{t}_V$, 则 $\alpha = \beta \iff \exists W \subseteq U \cap V, \text{s.t.} s_U|_W = t_V|_W$.

(3) $s \in \mathcal{F}(U)$, 则 $\{x \in U : s_x = 0 \in \mathcal{F}_x\}$ 为开集.

♠

Definition 2.3

若预层 $\mathcal{F}$ 满足对任意开集 $U \subseteq X$, 以及 U 的开覆盖 $V_i, i \in I$, 以及 $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$, 若令 $V_{ij} = V_i \cap V_j$, 有 $s_i|_{V_{ij}} = s_j|_{V_{ij}}$, 则存在唯一 $s \in \mathcal{F}(U)$, 使得 $|_{V_i} = s_i$. 粘合性). 则称 $\mathcal{F}$ 为**层**.

则有如下命题.

Proposition 2.2

对层 $\mathcal{F}$, 有

(1) $\forall s \in \mathcal{F}(U)$, 有 $\{x \in U : s_x = 0 \in \mathcal{F}_x\}$ 为开集.

(2) $s \in \mathcal{F}(U)$, 则 $s = 0 \iff \forall x \in U, s_x = 0$.

证明 (2) $\Rightarrow$: 显然.

$\Leftarrow$: $\forall x \in U$, 存在其邻域 V_x 使得 $s|_{V_x} = 0 \in \mathcal{F}(V_x)$, 则对 U 的开覆盖 $(V_x, s|_{V_x} = 0)$ 作粘合, 有 $s = 0$. □

Definition 2.4

对层的同态 $\eta : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, 称 η 为**单同态**, 若任意开集 $U \subseteq X$, 有 $\eta_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ 是群的单同态. 类似可以定义满同态和同构.

并可以定义预层 $\ker(\eta) : U \mapsto \ker(\eta_U), \eta(\mathcal{F}) : U \mapsto \mathrm{Im}(\eta_U)$.

Remark $\ker(\eta)$ 是一个层, 但 $\eta(\mathcal{F})$ 不一定! 后面会定义所谓的像 $\mathrm{Im}(\eta)$, 使得它是一个层.

Proposition 2.3

对层同态 $\eta : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, 有

(1) $\ker(\eta)$ 是一个层.

(2) 可以定义 $\eta_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$, 且 $(\ker \eta)_x = \ker(\eta_x)$.

(3) η 为单同态 $\iff \forall x \in X, \eta_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ 单 $\iff \ker \eta = 0$.

(4) 对预层 $\eta(F)$, 有 $(\eta(\mathcal{F}))_x = \eta_x(\mathcal{F}_x)$.

证明 (1) 对任意 $s_i \in (\ker \eta)(V_i) = \ker(\eta_{V_i})$, 且 $s_i|_{V_{ij}} = s_j|_{V_{ij}}$, 则将 s_i 视为 $\mathcal{F}(V_i)$ 中的元素, 则可以唯一粘合成 $s \in \mathcal{F}(U)$. 则此时

$$t_i = (\eta_U(s))|_{V_i} = \eta_{V_i}(s_i) = 0 \in \mathcal{G}(V_i).$$

则由 $\mathcal{G}$ 是层, t_i 可以粘合成 $0 \in \mathcal{G}(U)$, 则 $0 = \eta_U(s)$. 故 $s \in \ker(\eta_U) = (\ker \eta)(U)$, 即可以唯一粘合.

(2) 由定义有

$$\begin{aligned}\ker(\eta_x) &= \{\bar{s}_U : \overline{\eta_U(s_U)} = 0\} = \{\bar{s}_U : \exists V \subseteq U, \eta_U(s_U)|_V = 0\} \\ &= \{\bar{s}_U|_V : \eta_V(s_u|_V) = 0\} = \{\bar{s}_V : \eta_V(s_V) = 0\} = (\ker \eta)_x.\end{aligned}$$

(3) 若 η 单，则 $(\ker\eta)(U) = 0$, 进而 $(\ker\eta)_x = 0$. 反之若 $\forall x \in X, \eta_x$ 单，则由 (2)，$(\ker\eta)_x = \ker(\eta_x) = 0$, 则任意 U, $(\ker\eta)(U) = 0$, 即 η 单.

(4) 同 (2), 在此省略. □

任意预层都可以“层化”.

Theorem 2.1

X 上预层 $\mathcal{F}$, 则存在层 $\mathcal{F}^+$ 和预层同态 $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$, 使得满足泛性质:

$\forall$ 层 $\mathcal{G}$ 和预层同态 $\eta : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, 存在唯一层同态 $\eta^+ : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ 使得如下图表交换.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\theta"] & \mathcal{G} \\ \mathcal{F}^+ \arrow[ur, dashed, "\eta^+"] & \end{tikzcd}$$

此外，$\mathcal{F}^+$ 在同构意义下唯一，且 $\forall x \in X, \theta_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_x^+$ 为同构.

证明 定义

$$\mathcal{F}^+(U) = \{f : U \to \bigsqcup_{x\in U} \mathcal{F}_x : \forall z \in U, \exists 邻域 V_z, s_{V_z} \in \mathcal{F}(V_z), \text{s.t.}, f|_{V_z} = s_{V_z} : V_z \to \bigsqcup_{x \in V_z} \mathcal{F}_x \hookrightarrow \bigsqcup_{x\in U} \mathcal{F}_x\}.$$

$\mathcal{F}^+$ 以函数的自然粘合称为层（验证!）.

并定义 $\theta_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}^+(U), s \mapsto \{s : U \to \bigsqcup_{x\in U} \mathcal{F}_x, x \mapsto s_x\}$.

用另一种形式看 $\mathcal{F}^+$ 的截面：设 $f \in \mathcal{F}^+(U)$, 则由定义存在开覆盖 V_i 和 $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$, 使得 $f|_{V_i} = s_i : V_i \to \bigsqcup_{x \in V_i} \mathcal{F}_x$. 则显然有 $(s_i)_x = (s_j)_x, \forall x \in V_i \cap V_j$. 我们称 f 是由 (V_i, s_i) 粘成的截面, 也简记为 $f = (V_i, s_i)$.

则任意 $\eta_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$, 定义 $\eta_U^+(U) : \mathcal{F}^+(U) \to \mathcal{G}(U)$, $f = (v_i, s_i) \mapsto (V_i, \eta_{V_i}(s_i))$ 在 $\mathcal{G}(U)$ 中粘成的截面. 它满足上面的交换图表.

$\mathcal{F}^+$ 的唯一性可以利用泛性质得到，并可以验证存在一一对应 $\theta_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_x^+$. □

Definition 2.5

设层同态 $\eta : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, 考虑

$$\begin{tikzcd} \eta(\mathcal{F}) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\theta"] & \mathcal{G} \\ \eta(\mathcal{F})^+ \arrow[ur, dashed, "\iota^+"] & \end{tikzcd}$$

则定义 $\text{Im}\eta = \iota^+(\eta(\mathcal{F})^+)$ 为 η 的**像**. 它是一个层，并自然视为 $\mathcal{G}$ 的子层.

称 η 是满的，若 $\text{Im}(\eta) = \mathcal{G}$.

Proposition 2.4

(1) η 满 $\iff \forall x \in X, \eta_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ 满.

(2) η 同构 $\iff \forall x \in X, \eta_x$ 为同构.

证明 (1) $\Rightarrow$: $\eta(\mathcal{F}_x) = \eta(\mathcal{F})_x = (\mathrm{Im}\eta)_x = \mathcal{G}_x$.

$\Leftarrow$: 对任意 $t \in \mathcal{G}(U)$, 利用 $\eta_x(\mathcal{F}_x)_x = \eta(\mathcal{F})_x^+ = \mathcal{G}_x$, 对 $\forall x \in U$, 存在 $s_x \in \mathcal{F}_x$ 使得 $\eta_x(s_x) = t_x$.

即存在邻域 V_x 和 s_{V_x} 使得 $s_x = (s_{V_x})_x, \eta_{V_x}(s_{V_x}) = t|_{V_x}$, 则 $(V_x, \eta_{V_x}(s_{V_x}))$ 可以粘合成 $\mathrm{Im}(\mathcal{F})$ 中的截面，则 $\mathcal{G} = \mathrm{Im}(\mathcal{F})$. □

Definition 2.6

(1) 对 $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$, 定义**商层**$\mathcal{F}\big/_{\mathcal{F}'}$ 为预层 $\mathcal{G} : U \mapsto \mathcal{F}(U)\big/_{\mathcal{F}'(U)}$ 的层化.

(2) 对连续映射 $f : X \to Y, \mathcal{F}$ 为 X 上的层，则定义推出为层 $f_*\mathcal{F} : V \mapsto \mathcal{F}(f^{-1}V)$.

(3) 对连续映射 $f : X \to Y, \mathcal{G}$ 为 Y 上的层，则定义拉回为预层 $f^{-1}\mathcal{G} : U \mapsto \varinjlim_{f(U)\subseteq V} \mathcal{G}(V)$ 的层化。

关于如上的定义有下面的命题，证明作为作业.

Proposition 2.5

定义如上，则

(1) $\forall x \in X, (f^{-1}\mathcal{G})_x = \mathcal{G}_{f(x)}$.

(2) $\mathrm{Hom}_X(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) = \mathrm{Hom}_Y(G, f_*\mathcal{F})$.

本节最后介绍截面函子的左正合性，以及层的粘合. 下面的定理证明略去.

Theorem 2.2

(1) 层的正合列 $0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$ 等价于有正合列 $0 \to \mathcal{F}_{1x} \to \mathcal{F}_{2x} \to \mathcal{F}_{3x} \to 0, \forall x \in X$.

此时有正合列 $0 \to \mathcal{F}_1(X) \to \mathcal{F}_2(X) \to \mathcal{F}_3(X)$.

(2) 设 X 有开覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}, \mathcal{F}_i$ 为 U_i 上的层，令 $U_{ij} = U_i \cap U_j$，且

(a) $\varphi_{ij} : \mathcal{F}_i|_{U_{ij}} \to \mathcal{F}_j|_{U_{ij}}$ 为同构.

(b) $\varphi_{ik} = \varphi_{ij} \circ \varphi_{jk}$.

则存在 X 上的层 $\mathcal{F}$ 使得 $\mathcal{F}|_{U_i} \simeq \mathcal{F}_i, \forall i \in I$.

2.2 概型

2.2.1 环化空间

Definition 2.7

定义**环化空间**为二元组 $(X,\mathcal{O}_X)$, 其中 X 是拓扑空间, $\mathcal{O}_X$ 为 X 上环层.

环化空间之间的态射是指 $(f,f^{\#}):(X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$, 满足 $f:X\to Y$ 为拓扑空间的连续映射, $f^{\#}:f^{-1}\mathcal{O}_Y\to\mathcal{O}_X$ 是环层同态.

若 $\forall x\in X,\mathcal{O}_{X,x}$ 为局部环, 则称为**局部环化空间**. 局部环化空间之间的态射是指环化空间的态射 $(f,f^{\#})$, 满足 $f^{\#}$ 的诱导同态 $\mathcal{O}_{Y,f(x)}\to\mathcal{O}_{X,x}$ 为局部环同态. ♣

Example 2.3 (X,C^{∞}_X) 为局部环化空间.

Example 2.4 对代数簇 X, 定义环层 $\mathcal{O}_X(U)=\{U\text{上正则函数}\}$. 则 $(X,\mathcal{O}_X)$ 是局部环化空间, 且代数簇之间的态射对应于局部环化空间之间的态射.

下面把第一章中定义的 Zariski 拓扑扩展到 Noether 环上, 以定义素谱空间的拓扑结构.

Definition 2.8

A 为 Noether 环, 设 $X=\mathrm{Spec}A=\{A\text{的素理想}\}$, 定义 X 上的闭集形如 $V(I)=\{P\in X:I\subseteq P\}$. ♣

Remark 同前, 此时有 $V(I)\cap V(J)=V(I+J),V(I)\cup V(J)=V(IJ)$, 进而可以验证上面的定义确实给出了一个拓扑.

Example 2.5 设 k 为代数闭域, $A=k[x,y],X=\mathrm{Spec}A$. 则 $V((x))=\{(x)\}\cup\{(x,y-a):a\in k\}$.

以下的事实来自于交换代数, 均设 A 为 Noether 环. 证明可以参考许金兴老师的交换代数讲义.

Proposition 2.6

(1) 设 S 为 A 的乘性子集, 则任意同态 $A\to S^{-1}A$ 可以诱导素谱空间的连续映射 $\mathrm{Spec}(S^{-1}A)\to\mathrm{Spec}(A)$. 进而 $\mathrm{Spec}(S^{-1}A)$ 与 A 中和 S 不交的素理想有一一对应.

特别地, 对 $s\in A$, 有 $\mathrm{Spec}(A_s)=\{P\in\mathrm{Spec}(A):s\notin P\}$, 并定义形如 $D(s)=\mathrm{Spec}(A_s)=\mathrm{Spec}(A)\setminus V((s))$ 的开集为**主开集**.

(2) 对 $I\lhd R$, 有 $\sqrt{I}=\cap_{P\in V(I)}P$. 特别地有幂零元生成的理想 $\mathrm{rad}(I)=\cap_{P\in\mathrm{Spec}(A)}P$.

(3) $X=\mathrm{Spec}(A)$ 的主开集构成了其上的一组开集基.

(4) $\mathrm{Spec}(A)$ 是拟紧的, 即每个开集都是紧的.

(5) 设 M 为 A-模, 对 $x\in M$, 有

(a) $x=0\in S^{-1}M \iff \exists s\in S,sx=0$ *in* M.

(b) 若 $\forall P \in \mathrm{Spec}(A), x = 0$ *in* M_P, 则 $x = 0$ *in* M.

现在我们可以定义如下的环层:

Definition 2.9

对 *Noether* 环, 可以定义 $X = \mathrm{Spec}A$ 上的环层 $\mathcal{O}_X$:

$$\mathcal{O}_X(U) = \{f : U \to \bigsqcup_{p\in U} A_p \mid \forall p \in U, \exists h, s \in A, \text{s.t.} p \in D(s), f|_{D(s)} = \frac{h}{s} : D(s) \to \bigsqcup_{p\in U} A_p\}.$$

Remark 我们可以将 $f \in \mathcal{O}_X(U)$ 视为由 $(D(s_i), \frac{h_i}{s_i})$ 粘合得到, 其中粘合性可以如下刻画:

$$\begin{aligned} &\frac{h_i}{s_i} = \frac{h_j}{s_j} \text{ in } A_p, \forall p \in D(s_i s_j) \\ \iff &\frac{h_i}{s_i} = \frac{h_j}{s_j} \text{ in } A_{s_i s_j} \\ \iff &\exists N, \text{s.t.} s_i^{N-1} s_j^N h_i = s_i^N s_j^{N-1} h_j \text{ in } A. \end{aligned}$$

Proposition 2.7

如上定义的 $(X, \mathcal{O}_X)$ 为局部环化空间 (被称为仿射概型), 且 $\mathcal{O}_{X,P} \simeq A_P$.

证明 由于关于素理想的局部化为局部环, 故只需证后面的同构.

首先定义 $\phi : \mathcal{O}_{X,P} \to A_P, \overline{f_U} \mapsto [\frac{h}{s}] \in A_P$, 其中 f 由 $\frac{h}{s} : U \to \bigsqcup_{Q\in U} A_Q$ 实现.

它是良好定义的: 若 $\overline{f_U} = \overline{g_V}$, 设 f 由 $\frac{h}{s}$ 表示, g 由 $\frac{h'}{s'}$ 表示, 则取开集 $W \subseteq U \cap V$, 有 $\frac{h}{s} = \frac{h'}{s'}$ in A_W, 进而 $\frac{h}{s} = \frac{h'}{s'}$ in A_P.

再定义 $\psi : A_P \to \mathcal{O}_{X,P}, [\frac{h}{s}] \mapsto \overline{f}_{D(s)}$, 其中 $P \in D(s)$, 且 $f = \frac{h}{s}$ on $D(s)$.

它也是良定的: 若 $[\frac{h_1}{s_1}] = [\frac{h_2}{s_2}]$ in A_P, 则存在 $s \notin P, s(s_2 h_1 - s_1 h_2) = 0$. 故 $\frac{h_1}{s_1} = \frac{h_2}{s_2}$ in $D(s s_1 s_2)$, 进而 $\overline{\frac{h_1}{s_1}}_{D(s s_1 s_2)} = \overline{\frac{h_2}{s_2}}_{D(s s_1 s_2)}$, 即 $\overline{\frac{h_1}{s_1}} = \overline{\frac{h_2}{s_2}}$ in $\mathcal{O}_{X,P}$.

显然 ϕ 和 ψ 为互逆映射, 则同构得证. □

Theorem 2.3

(1) $\mathcal{O}_X(X) = A$.

(2) 对 $f \in A$, 有环化空间的同构 $(X_f = \mathrm{Spec}A_f, \mathcal{O}_{X_f}) \simeq (D(f), \mathcal{O}_X|_{D(f)})$.

证明 (1) 只需证任意 $f \in \mathcal{O}_X(X)$, 有 $f \in A$.

设 $f = (D(s_i), \frac{h_i}{s_i})$, 由之前的讨论, 存在 N, 使得 $(s_i s_j)^N (\frac{h_i}{s_i} - \frac{h_j}{s_j}) = 0$.

又由于 $X = \cup_i D(s_i)$. 即 $V(\{s_i\}) = \emptyset \iff (\{s_i\}) = (1)$. 进而存在 $s_1, \cdots, s_n$ 使得 $(s_1^N, \cdots, s_n^N) = (1)$. 设 $a_1, \cdots, a_n \in A$ 使得 $a_1 s_1^N + \cdots + a_n s_n^N = 1$, 则令 $\tilde{f} = a_1 s_1^{N-1} h_1 + \cdots + a_n s_n^{N-1} h_n \in A$, 有在任

意 $D(s_i)$ 上，有

$$\frac{h_i}{s_i}=\sum_{j\neq i}(a_js_j^N\frac{h_i}{s_i})+a_is_i^{N-1}h_i=\sum_{j\neq i}(a_js_j^{N-1}h_j)+a_is_i^{N-1}h_i=\tilde{f}.$$

故 $f=\tilde{f}\in A$.

(2) 只需验证对 $\phi:\mathrm{Spec}(A_f)\to D(f)$ 为环层同构即可，不难验证它是环层同态，且显然为双射.
ϕ 是连续的：对 $V(I)\in D(f)$ 为闭集，有 $\phi^{-1}(V(I))=V(IA_f)$ 为闭集.
ϕ^{-1} 是连续的：对 $V(J)\in\mathrm{Spec}(A_f)$ 为闭集，有 $\phi(V(J))=V(J^c)\cap D(f)$ 为闭集. □

2.2.2 概型

Definition 2.10

概型是一个局部环化空间 $(X,\mathcal{O}_X)$，它由 $(U_i=\mathrm{Spec}(A_i),\mathcal{O}_X|_{U_i}=\mathcal{O}_{U_i})$ 粘合而成，每一个 $(U_i,\mathcal{O}_{U_i})$ 也被称为仿射邻域.

此时称 X 为**承载拓扑空间**，$\mathcal{O}_X$ 称为**结构层**. 概型之间的态射定义为局部环化空间之间的态射. ♣

Theorem 2.4

对 $X=\mathrm{Spec}A, Y=\mathrm{Spec}B$, 有环同态和概型态射之间的一一对应 $\mathrm{Hom}(B,A)\simeq\mathrm{Mor}(X,Y)$. ♡

证明 对 $\eta:B\to A$ 为环同态，则熟知有连续的拉回映射 $f_\eta:X\to Y$.

并考虑 U 为 X 的开集，对 $f_\eta(U)\to V$, 可以定义 $\mathcal{O}_Y(V)\to\mathcal{O}_X(f^{-1}(V)), f=(D(s_i),\frac{h_i}{s_i})\mapsto(D(\eta(s_i)),\frac{\eta(h_i)}{\eta(s_i)}))$, 则由于 $f^{-1}\mathcal{O}_Y(U)=\varinjlim_{f_\eta(U)\subseteq V}\mathcal{O}_Y(V)$ 以及 $\mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$, 可以定义 $f_\eta^\#:f^{-1}(\mathcal{O}_Y(U))\to\mathcal{O}_X(U)$.

则 f_η 为环层态射，且由命题 2.7，则有 $f_Q^\#:\mathcal{O}_{Y,Q}=B_Q\mapsto A_P=\mathcal{O}_{X,P}$ 为局部环同态，进而 f_η 为局部环层态射，即为概型的态射.

反之对 $(f,f^\#)$ 为概型的态射，则考虑 $\eta=f_X^\#\circ i:\mathcal{O}_Y(Y)=B\to(f^{-1}\mathcal{O}_Y)(X)\to\mathcal{O}_X(X)=A$, 它是一个环同态.

再验证这是可逆的对应，即 $f=f_\eta$：对任意 $P\in X$, 由于有局部环同态 $f_P^\#=\eta_P:\mathcal{O}_{Y,Q}\to\mathcal{O}_{X,P}$, 则 $\eta^{-1}(PA_P)=QB_Q$, 即 $f_\eta(P)=\eta^{-1}P=Q$. □

与层的粘合类似地，有概型的粘合：

Theorem 2.5

对拓扑空间 X 和开覆盖 $\{U_i\}$，设 $(U_i,\mathcal{O}_{U_i})$ 为概型，令 $U_{ij}=U_i\cap U_j$, 且有同构

$$f_{ij}:(U_{ij},\mathcal{O}_{U_i}|_{U_{ij}})\xrightarrow{\sim}(U_{ij},\mathcal{O}_{U_j}|_{U_{ij}}).$$

满足 $f_{ij}\circ f_{jk}=f_{ik}$, 则存在概型 $(X,\mathcal{O}_X)$，使得 $\mathcal{O}_X|_{U_i}\simeq\mathcal{O}_{U_i}$. ♡

由此可以描述概型之间的态射. 对概型 X, Y, 设 $f : X \to Y$ 为连续映射，取仿射开覆盖 $Y = \cup_i (Y_i = \mathrm{Spec} B_i)$, 则可以对 $f^{-1}(Y_i)$ 取仿射开覆盖 $f^{-1}(Y_i) = \cup_j (X_{ij} = \mathrm{Spec} A_{ij})$.

需要 $f_{ij} : X_{ij} \to Y_i$ 之间满足粘合关系. 如果 X_{ij} 和 X_{kl} 的交也是仿射的，则可以利用定理 2.4 将问题转化为环的同态进行分析. 在验证粘合条件之后我们就将态射约化到仿射概型上，将问题加以简化.

下面是一个重要且基本的例子，即所谓射影空间概型的构造：

设 R 为环，则设 $\mathbb{A}_R^n = (\mathrm{Spec} R[x_1, \cdots, x_n], \mathcal{O}_{\mathbb{A}_R^n})$. 则考虑射影坐标 $[X_0 : \cdots : X_n]$, 定义 $U_0 = \mathrm{Spec} R[x_1, \cdots, x_n]$, 其中 $x_i = \frac{X_i}{X_0}$, 并类似定义 $U_i, 1 \le i \le n$.

则在集合意义上定义 $\mathbb{P}_R^n = \cup_{i=0}^n U_i$, 希望利用上面的粘合定理来构造概型.

进而需要考虑两片的交. 为了方便不妨设一片为 U_0, 则 $U_{0i} = U_0 \cap U_i = \mathrm{Spec}(R[x_1, \cdots, x_n]_{x_i}) = D_{U_0}(x_i = \frac{x_i}{x_0})$, 则有

$$(\mathrm{Spec}(R[\frac{X_0}{X_i}, \cdots, \frac{X_n}{X_i}]_{\frac{X_0}{X_i}}), \mathcal{O}_{U_i}|_{U_{0i}}) \xrightarrow{\simeq} (\mathrm{Spec}(R[\frac{X_1}{X_0}, \cdots, \frac{X_n}{X_0}]_{\frac{X_i}{X_0}}), \mathcal{O}_{U_0}|_{U_{0i}})$$

$$R \xrightarrow{\mathrm{Id}} R, \qquad \frac{X_0}{X_i} \mapsto (\frac{X_i}{X_0})^{-1}, \qquad \frac{X_j}{X_i} = \frac{\frac{X_j}{X_0}}{\frac{X_i}{X_0}}, j \neq 0.$$

且不难验证复合的相同条件，进而可以进行层的粘合. 我们记得到的概型为 $\mathbb{P}_R^n$.

最后与代数簇时的情形一样地，有如下的定理.

Theorem 2.6

(1) 任意概型中的仿射开集构成了开集基.

(2) 仿射概型中的主开集构成了开集基.

2.2.3 闭子概型

Definition 2.11

对概型 $(X, \mathcal{O}_X)$, 若

(1) $Z \xrightarrow{i} X$ 为闭集.

(2) 存在理想层 $\mathcal{I}_Z \subseteq \mathcal{O}_X$, 使得 $i_* \mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_X / \mathcal{I}_Z$.

则称概型 $(Z, \mathcal{O}_Z)$ 为**闭子概型**，$\mathcal{I}_Z$ 称为**定义理想层**.

对 k 域，则 $\mathbb{P}_k^n$ 的闭子概型称为**射影概型**. 射影概型的开子概型 (即开子集上自然定义的子概型) 称为**拟射影概型**.

下面是闭子概型的最基本的例子.

Proposition 2.8

设 $(X = \mathrm{Spec}A, \mathcal{O}_X)$，则对 $I \leq A$, 有 $(Z = V(I) \simeq \mathrm{Spec}(A/I), \mathcal{O}_Z)$ 为闭子概型.

证明 对任意开集 $U \subseteq X$, 定义 $\mathcal{I}_Z(U) = \{f \in \mathcal{O}_X(U) : f(P) \in I_P, \forall P \in X\}$, 不难验证它是一个理想层，且满足条件. □

Example 2.6 对 $X = \mathbb{A}_k^1$, 则有闭子概型 $(Z = \mathrm{Spec}({}^{k[x]}\big/_{(x^2)}), \mathcal{O}_Z)$.

事实上对仿射概型而言上面的例子刻画了所有的闭子概型.

Theorem 2.7

(1) 对概型 X 的闭子概型 Z, 存在 X 的仿射开覆盖 $X = \cup_i(U_i = \mathrm{Spec}A_i, \mathcal{O}_i)$, 使得 $Z \cap U_i = \mathrm{Spec}(A_i/I_i)$.

(2) 设 $X = \mathrm{Spec}A$ 为仿射概型，则 X 的闭子概型形如 $\mathrm{Spec}(A/I)$.

2.2.4 整概型

Definition 2.12

对概型 X:

若 X 作为拓扑空间不可约，则称为**不可约概型**.

若任意开集 $U, \mathcal{O}_X(U)$ 作为环既约（即幂零理想平凡），则称为**既约概型**.

若任意开集 U, 有 $\mathcal{O}_X(U)$ 为整环，则称为**整概型**.

Theorem 2.8

概型 X 是整的当且仅当它不可约且既约.

证明 $\Rightarrow$: 整环显然是既约的. 若 X 不可约，则存在 $X = X_1 \cup X_2$, 其中 X_i 为真闭子集，则 $U_1 = X \setminus X_1, U_2 = X \setminus X_2$ 为不交的开集. 但 $\mathcal{O}_X(U_1 \times U_2) = \mathcal{O}_X(U_1) \times \mathcal{O}_X(U_2)$ 不是整环，矛盾！

$\Leftarrow$: 任取 $U \subseteq X$ 为开集，若 $f, g \in \mathcal{O}_X(U), fg = 0$，则考虑 $Y = \{x \in U : f_x \in m_x\}, Z = \{x \in U : g_x \in m_x\}$, 则 U 可以写成闭集的并 $U = Z \cup Y$, 进而由不可约只能 $Y = U$ 或者 $Z = U$. 不妨 $Y = U$, 则考虑 U 的任意仿射开子集 $V = \mathrm{Spec}A$, 有 $D_V(f) = \mathrm{Spec}(A_f)$ 为空集，进而 f 在 V 上幂零，则由既约只能 $f|_V = 0$，故由任意性可知 $f = 0$. □

Definition 2.13

对概型 X, 设 $N \leq \mathcal{O}_X$ 为幂零理想层，则定义闭子概型 $(X_{\mathrm{red}} = X, \mathcal{O}_{X,\mathrm{red}} = \mathcal{O}_X/N)$ 为 X 的**既约概型**.

Example 2.7 $(\mathrm{Spec}{}^{k[x]}/_{(x^2)})_{\mathrm{red}} = \mathrm{Spec}{}^{k[x]}/_{(x)}, (\mathrm{Spec}{}^{k[x,y]}/_{(x^2y)})_{\mathrm{red}} = \mathrm{Spec}{}^{k[x,y]}/_{(xy)}$.

2.2.5 概型和簇

根据之前的种种观察，我们希望概型和代数簇之间能建立某种对应. 下面设 k 为代数闭域，则考虑 $\mathcal{V}ar/k$ 为 k 上代数簇范畴，$\mathcal{S}ch/k$ 为 k-概型范畴.

Theorem 2.9

存在完全忠实函子 $\mathcal{V}ar/k \to \mathcal{S}ch/k$.

证明 利用粘合，只需要对仿射情形考虑. 设 $X = V(I) \subseteq \mathbb{A}^n$ 为仿射簇，则定义 $X_{sch} = \operatorname{Spec}(\Gamma(X))$. 可以验证 $\operatorname{Mor}_{\mathcal{V}ar/k}(X, Y) \simeq \operatorname{Mor}_{\mathcal{S}ch/k}(X_{sch}, Y_{sch})$. □

我们可以用概型的语言来考虑代数簇的问题，并且概型可以描述更多的信息：例如考虑 $\operatorname{Spec}{k[x]}/_{(x^2)}$ 和 $\operatorname{Spec}{k[x]}/_{(x)}$.

2.3 可逆层

Definition 2.14

对概型 X, 一个 $\mathcal{O}_X$-模层是指一个层 $\mathcal{M}$, 使得任意开集 $U \subseteq X$, $\mathcal{M}(U)$ 是一个 $\mathcal{O}_X(U)$-模.

概型 X 上的**可逆层**是指秩为 1 的局部自由 $\mathcal{O}_X$-模层 $\mathcal{L}$. 即存在 X 的开覆盖 $\{U_i\}$ 使得有模层同构 $\eta_i : \mathcal{L}_{U_i} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{O}_{U_i}$.

此时有模层同构 $\eta_{ij} = \eta_j \circ \eta_i^{-1} : \mathcal{O}_{U_{ij}} \to \mathcal{O}_{U_{ij}}, 1 \mapsto f_{ij} \in \mathcal{O}_X(U_{ij})^*$, 且 $f_{ik} = f_{ij} f_{ik}$. ♣

Example 2.8 $\mathcal{O}_X, \mathcal{I}_Z$ 均为 $\mathcal{O}_X$ 模层.

Example 2.9 对整概型 X, 定义 $K(X)$ 为常值层, 任取仿射开集 $U = \mathrm{Spec}(A)$, 定义 $K(X)(U) = \mathrm{Frac}(A)$, 即 U 上的正则函数全体的分式域. 事实上它等于 X 在 generic point 处的茎，故这给出了一个常值层.

也可以用粘合的视角来描述可逆层: 对 $\eta_i : \mathcal{L}|_{U_i} \to \mathcal{O}_{U_i}$, 记 $s_i = \eta_i^{-1}(1)$, 则 $\eta_{ij} : \mathcal{L}|_{U_{ij}} = \mathcal{O}_{U_{ij}} s_i \to \mathcal{O}_{U_{ij}} s_j, s_i \mapsto f_{ij} s_j$, 有 $f_{ik} = f_{ij} f_{jk}$. 反之对 $\{f_{ij}\}$ 满足上面的条件，可以构造出对应的可逆层.

下面是一个基本的例子.

Example 2.10 设 $X_0, \cdots, X_n$ 为 $\mathbb{P}^n = X$ 的齐次坐标, 有 $U_i = \{X_i \neq 0\} = \mathrm{Spec} k[\frac{X_0}{X_i}, \cdots, \hat{\frac{X_i}{X_i}}, \cdots, \frac{X_n}{X_i}] \simeq \mathbb{A}^n$. 简写 $\mathcal{O}_{U_i} = \mathcal{O}_X(U_i)$.

我们考虑 $\mathcal{O}_X(d)|_{U_i} = \mathcal{O}_{U_i} \cdot (s_i = X_i^d)$, 则在 $U_{ij} = \mathrm{Spec} k[\frac{X_0}{X_i}, \cdots, \frac{X_n}{X_i}]_{\frac{X_j}{X_i}}$ 中，有 $\frac{X_i}{X_j}, \frac{X_j}{X_i} \in \mathcal{O}(U_{ij})^*$.

通过粘合 $s_i|_{U_{ij}} = (\frac{X_i}{X_j})^d s_j|_{U_{ij}}$ 可以得到可逆层 $\mathcal{O}(d)$.

注意到 $X_i^d \in \mathcal{O}(d)(U_i)$, 且 $d \geq 0$ 时 $(\frac{X_i}{X_j})^d \in \mathcal{O}(d)(U_{ij})^*$, 故 $X_i^d = (\frac{X_i}{X_j})^d X_j^d \in \mathcal{O}(d)(U_j)$. 则可以粘合成一个整体的截面 $s \in \Gamma(\mathcal{O}(d))$, 记为 X_i^d.

Theorem 2.10

对 $d \geq 0$, 有 $\Gamma(\mathcal{O}(d)) = \mathrm{Span}_k\{X_0^{i_0} \cdots X_d^{i_d}\}_{i_0 + \cdots + i_d = d}$. ♡

证明 每个截面 $s \in \Gamma(\mathcal{O}(d))$ 由它在一个开集的值 $s|_{U_0}$ 完全决定. 设 $s|_{U_0} = f s_0, f \in \mathcal{O}_{U_0}$, 即 $f = f(x_1, \cdots, x_n)$，其中 $x_i = \frac{X_i}{X_0}$.

若能延拓成为整体截面, 则设 $\deg f = l$, 有

$$s|_{U_i} = s_i f \frac{s_0}{s_i} = s_i f(x_1, \cdots, x_n) \frac{X_0^d}{X_i^d} = \frac{F(X_0, \cdots, X_n)}{X_0^l} \frac{X_0^d}{X_i^d} s_i = \frac{F(x_0, \cdots, X_n)}{X_i^d} X_0^{d-l} s_i.$$

故有 $\frac{F(x_0, \cdots, X_n)}{X_i^d} X_0^{d-l} \in \mathcal{O}_{U_i}$, 即只能 $d \geq l$. 即 $\Gamma(\mathcal{O}(d)) = \{f(x_1, \cdots, x_n) : \deg f \leq d\} \cdot X_0^d$. □

Example 2.11 对代数闭域 k, 令 $C = \mathbb{P}_k^1$, 记 Ω_C^1 为 C 上 1-形式层，即对开集 U, $\Omega_C^1(U)$ 为 U 上 1-形式的集合.

则对仿射开集 $U=\{X\neq 0\}$ 和 $V=\{Y\neq 0\}$, 记 $x=\frac{X}{Y}, y=\frac{Y}{X}$, 显然有 $\Omega_C^1(U)=\mathcal{O}_U\cdot dy, \Omega_C^1(V)=\mathcal{O}_V\cdot dx$.

在 $U\cap V$ 上有 $dy=d\frac{1}{x}=-\frac{1}{x^2}dx=-\frac{Y^2}{X^2}dx$. 则有 $\Omega_C^1\simeq\mathcal{O}(-2)$.

与可逆层紧密相关的是 Cartier 除子的概念.

Definition 2.15

对整概型 X, 一个 *Cartier* 除子 D 由 $\{(U_i,f_i)\}_{i\in I}$ 表示, 其中 $X=\cup_{i\in I}U_i$ 为开覆盖, 且 $0\neq f_i\in K(X)$, 满足 $u_{ij}=\frac{f_i}{f_j}\in\mathcal{O}(U_{ij})^*$.

称 (U_i,f_i) 和 (V_j,g_j) 定义了相同的除子, 是指对 $W_{ij}=U_i\cap V_j$, 有存在 $u_{ij}\in\mathcal{O}(W_{ij})^*, f_i=u_{ij}g_j$.

对两个除子 $D_1=(U_i,f_i), D_2=(U_i,g_i)$, 称 D_1 和 D_2 **线性等价**, 记作 $D_1\sim D_2$, 是指存在 $h\in K(X)^*, u_i\in\mathcal{O}(U_i)^*$, 使得 $f_i=h(u_ig_i)$.

对除子 $D=(U_i,f_i)$, 若 $f_i\in\mathcal{O}(U_i)$, 则称 D 为**有效除子**, 记为 $D\geq 0$.

♣

Example 2.12 对 $X=\mathbb{P}_k^n$, 设 $d>0, F\in k[X_0,\cdots,X_n]$ 为 d 次齐次多项式, 则考虑 $D_F=(U_i,f_i=\frac{F}{X_i^d})$, 显然 $u_{ij}=(\frac{X_i}{X_j})^d\in\mathcal{O}(U_{ij})^*$, 即 D_F 给出了一个除子, 称为 F 定义的除子.

Definition 2.16

对 X 上的除子 $D=(U_i,f_i)$, 定义 $\mathcal{O}(D)|_{U_i}=\mathcal{O}(U_i)s_i\subseteq K(X)|_{U_i}$, 其中 $s_i=\frac{1}{f_i}$. 则可以粘合成一个可逆层, 记为 $\mathcal{O}(D)$.

♣

Example 2.13 不难验证 $\mathcal{O}(D_F)\simeq\mathcal{O}(d)$.

Proposition 2.9

$D_1\sim D_2 \iff \mathcal{O}(D_1)\simeq\mathcal{O}(D_2)$.

♠

证明 $\Rightarrow$: 设有 $D_1=(U_i,f_i), D_2=(U_i,g_i), f_i=hu_ig_i$, 则定义

$$\mathcal{O}(D_1)(U_i)=\mathcal{O}(U_i)\cdot\frac{1}{f_i}\to\mathcal{O}(D_2)(U_i)=\mathcal{O}(U_i)\cdot\frac{1}{g_i}, \frac{1}{f_i}\mapsto\frac{1}{u_ig_i}.$$

由于 $h\in K(X), u_i\in\mathcal{O}(U_i)^*$, 有上面的映射给出了可逆层的同构.

$\Leftarrow$: 同理, 留作练习. □

Remark 故对任意 d 次齐次多项式所定义的除子均线性等价.

Definition 2.17

对概型 X 和 $\mathcal{O}_X$-模层 $\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2$, 则有预层 $U\mapsto\mathcal{M}_1(U)\otimes_{\mathcal{O}_X(U)}\mathcal{M}_2(U)$, 它的层化记作 $\mathcal{M}_1\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{M}_2$.

♣

Remark 可以验证 $(\mathcal{M}_1\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{M}_2)_x=\mathcal{M}_{1x}\otimes_{\mathcal{O}_{X,x}}\mathcal{M}_{2x}$.

且对于可逆层 $\mathcal{L}_j(U_i) = \mathcal{O}_{U_i} \cdot s_{ij}, j = 1, 2$, 有 $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$ 也为可逆层，且 $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2(U_i) = \mathcal{O}_{U_i} \cdot (s_{i1}s_{i2})$.

这引导我们定义除子的运算.

Definition 2.18

对除子 $D_1 = (U_i, f_i), D_2 = (U_i, g_i)$, 定义 $D_1 + D_2 = (U_i, f_i g_i), D_1 - D_2 = (U_i, \frac{f_i}{g_i})$.

Proposition 2.10

(1) X 上的可逆层同构类的集合在张量积运算下构成交换群，记为 $\mathrm{Pic}(X)$.

(2) $\mathcal{O}_X(D_1 + D_2) = \mathcal{O}_X(D_1) \otimes \mathcal{O}_X(D_2)$. 则 X 上除子的线性等价类集合在加法下构成交换群，记作 $\mathrm{Div}(X)$.

(3) 对可逆层 $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$, 则 $\mathcal{O}_X$-模层同态的集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_x}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) \simeq \Gamma(X, \mathcal{L}_1^{-1} \otimes \mathcal{L}_2)$.

(4) 模层同态层 $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) \otimes \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$.

证明 (1) 注意到对 $\mathcal{L}(U_i) = \mathcal{O}_{U_i} \cdot s_i$, 定义 $\mathcal{L}$ 的逆为 $\mathcal{L}^{-1}(U_i) = \mathcal{O}_{U_i} \cdot \frac{1}{s_i}$. 显然有 $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1} = \mathcal{O}_X$.

(2) 显然.

(3)(4) 设 $\mathcal{L}_1(U_i) = \mathcal{O}_{U_i} \cdot s_i, \mathcal{L}_2(U_i) = \mathcal{O}_{U_i} \cdot t_i$, 则对预层 $\mathcal{H}om^{pre}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{L}_1(U), \mathcal{L}_2(U))$, 可以定义同态:

$$
\begin{aligned}
\eta_i(V) : \mathcal{H}om^{pre}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)(V) &\to \mathcal{O}_V \cdot s_i^{-1} t_i \\
\phi &\mapsto \frac{\phi(s_i)}{t_i} \cdot s_i^{-1} t_i.
\end{aligned}
$$

可以验证它是预层同态并在茎上是同构，则由层化的泛性质得证. □

则可以定义群同态 $\eta : \mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Pic}(X), D \mapsto \mathcal{O}_X(D)$. 则 $\ker \eta = \{D : D \sim 0\}$，其中的元素称为**主除子**.

对 Z 为 X 的闭子概型和 X 上的可逆层 $\mathcal{L}$, 定义 $\mathcal{L}_Z = \mathcal{L}/\mathcal{I}_Z\mathcal{L}$. 则 $\mathcal{L}_Z$ 可以视为 Z 上的可逆层: $\mathcal{L}_{Z \cap U_i} = \mathcal{O}_{Z \cap U_i} \cdot s_i$, 且 $s_i = \bar{f}_{ij} s_j$，其中 f_{ij} 为 $\mathcal{L}$ 在 X 上的转移系数.

Proposition 2.11

对 $D = (U_i, f_i) \geq 0$, 则有 $\mathcal{O}(-D) = \mathcal{O}_{U_i} \cdot f_i$. 则理想层 $\mathcal{O}(-D)$ 决定了 X 的闭子概型，也记作 D, 此时有正合列

$$0 \to \mathcal{O}_X(-D) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_D \to 0.$$

对可逆层 $\mathcal{L}$, 做张量积可得

$$0 \to \mathcal{O}_X(-D) \otimes \mathcal{L} \to \mathcal{L} \to \mathcal{L}_D \to 0.$$

Chapter 3 射影平面的相交理论

3.1 Artin 环

Definition 3.1

若环 R 的理想降链均最终稳定，则称为 ***Artin 环****.*

Example 3.1 $\mathbb{Z}, k[x]$ 不是 Artin 环，但 $\mathbb{Z}/(m)$ 和 $k[x]/(f(x))$ 是 Artin 环，其中 $f(x)$ 不可约, m 为素数.

Example 3.2 若 R 是 k-代数，且为有限维 k-线性空间，则 R 为 Artin 环.

Theorem 3.1

R 为 Artin 环，则

(1) R 的素理想极大.

(2) R 只有有限个极大理想 $m_1, \cdots, m_r$.

(3) 存在 N 使得 $(m_1 \cdots m_r)^N = 0$, 此时 $R \simeq R/m_1^N \times \cdots \times R/m_r^N$.

(4) R 是 Noether 环.

证明 (1) 对素理想 P，若 R/P 不是域，则存在 $\bar{a} \neq 0$ 且不可逆，进而有 R 中的理想无穷降链 $(a) \supsetneq (a^2) \supsetneq \cdots$, 矛盾!

(2) 承认如下的结论：若理想的交 $P_1 \cap \cdots \cap P_n \subseteq Q$, 则若 Q 为素理想，至少有一个 $P_i \subseteq Q$.

若有无限个不同极大理想 $P_1, \cdots, P_r, \cdots$, 考虑降链 $P_1 \supseteq P_1P_2 \cdots$. 它是严格的：若 $P_1 \cdots P_k = \cdots P_1 \cdots P_{k-1}$. 则

$$P_1 \cap \cdots P_k = \sqrt{P_1 \cdots P_k} = \sqrt{P_1 \cdots P_{k-1}} = P_1 \cap \cdots P_{k-1}.$$

则 P_k 为包含 $P_1 \cap \cdots P_{k-1}$ 的素理想，由上面的结论只能有某个 $P_i \subseteq P_k$，矛盾!

则得到了严格无穷理想降链，与 Artin 环定义矛盾！故只有有限个极大理想.

(3) 设 $J = (m_1 \cdots m_r)$, 则由 Artin 性质存在 k 使得 $J^{k+1} = J^k$, 若 $J^k \neq 0$, 考虑非空集合 $X = \{I \triangleleft J : IJ^k \neq 0\}$, 它有最小元 I_0, 显然此时 $I_0 = (x)$.

又由于 $x \cdot J^k \subseteq I_0$ 且 $x \cdot J^k \cdot J^k = x \cdot J^k \neq 0$, 由最小性只能 $I_0 = x \cdot J^k$. 故存在 $y \in J^k, x = xy$. 但 $1 - y$ 不属于任何一个极大理想，故可逆，有 $x = 0$, 矛盾！故 $J^k = 0$.

后半部分由中国剩余定理立得.

(4) 利用 (2)(3) 和模论的知识可得，在此省略. □

则自然有下面的推论.

Corollary 3.1

记号如上，则令 $X=\mathrm{Spec}(R)$, 有

(1) $(X,\mathcal{O}_X)=\bigsqcup_i(P_i=m_i,\mathcal{O}_X|_{P_i}=\mathcal{O}_{X,P_i}=R m_i\simeq R/m_i^N)$.

(2) 若 $\mathcal{L}$ 为 X 上可逆层，则 $\mathcal{L}\simeq\mathcal{O}_X$.

更进一步地，在我们关心的代数集有关的背景下有:

Proposition 3.1

设 k 为代数闭域，且 $R=k[x_1,\cdots,x_n]/I$, 则

(1) R 为 Artin 环 $\iff V(I)=\{P_1,\cdots,P_r\}$ 有限.

(2) 此时 $I=Q_1\cdots Q_r$, $\sqrt{Q_i}=m_{P_i}$, 且 $R\simeq {}^{k[x_1,\cdots,x_n]}/_{Q_1}\times\cdots\times{}^{k[x_1,\cdots,x_n]}/_{Q_r}$.

证明 (1) $\Rightarrow$: 因为 I 的零点一一对应于包含 I 的极大理想，进而一一对应于 R 的极大理想，故有限.

$\Leftarrow$: 记 $m_{P_i}=m_i$, 则 $\sqrt{I}=m_1\cdots m_r$, 进而存在 N' 使得 $m_1^{N'}\cdots m_r^{N'}\subseteq I$. 又由于

$$ {}^{k[x_1,\cdots,x_n]}/_{m_1^{N'}\cap\cdots\cap m_r^{N'}}\simeq{}^{k[x_1,\cdots,x_n]}/_{m_1^{N'}}\times\cdots\times{}^{k[x_1,\cdots,x_n]}/_{m_r^{N'}}. $$

且 $\dim{}^{k[x_1,\cdots,x_n]}/_{m_i^{N'}}<\infty$ (事实上可以证明它的值为 $\frac{N'(N'+1)}{2}$), 则 $\dim k[x_1,\cdots,x_n]/I<\infty$, 故 R 为 Artin 环.

(2) 考虑 $(X=\mathrm{Spec}R,\mathcal{O}_X)=\bigsqcup_i(P_i,R/\overline{m}_i^{N'}\simeq{}^{k[x_1,\cdots,x_n]}/_{I+m_i^{N'}}$, 则令 $Q_i=I+m_i^{N'}$, 可以证明 $Q_i=I_{m_i}\cap m_i$, 且 $V(Q_i)=\{P_i\}$, 故 $\sqrt{Q_i}=m_i$, 且

$$ R\simeq{}^{k[x_1,\cdots,x_n]}/_{Q_1}\times\cdots\times{}^{k[x_1,\cdots,x_n]}/_{Q_r}. $$

故得证. 并且事实上我们给出了 Q_i 的具体计算方式. □

Example 3.3 对 $I=(y-x^2,x-y)$, $R={}^{k[x,y]}/_{(y-x^2,x-y)}$, 显然有 $V(I)=\{(0,0),(1,1)\}$. 则

$$ I_{m_1}=(y-x^2,x-y)_{(0,0)}=(x-x^2,x-y)_{(0,0)}=(x,x-y)_{(0,0)}=(x,y)_{(0,0)}. $$

进而 $Q_1=I_{m_1}\cap m_1=(x,y)$, 类似可得 $Q_2=(x-1,y-1)$.

3.2 0 维拟射影子概型

以下均假设 k 为代数闭域.

对 $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ 为拟射影概型（即射影概型的开子概型），可以定义其维数为各不可约分支的维数的最大值. 我们想研究 0 维拟射影子概型. 仍然通过与仿射片取交以化为仿射情形. 所以首先需要对 0 维仿射子概型进行研究.

Theorem 3.2

设 $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ 为 0 维闭子概型，则 $X = \operatorname{Spec} {}^{k[x_1, \cdots, x_n]}/{}_I$，且 ${}^{k[x_1, \cdots, x_n]}/{}_I$ 为 Artin 环. ♡

证明 记 $X = \{P_1, \cdots, P_r\}$, 则由于为闭子概型，存在 $f_i \in k[x_1, \cdots, x_n]$ 使得 $P_i = D(f_i) \cap X$, 且

$$\mathcal{O}_{X,P_i} = R_i = {}^{k[x_1, \cdots, x_n]_{f_i}}/{}_{J_i} \simeq {}^{k[x_1, \cdots, x_n, y]}/{}_{I_i}.$$

其中 $\sqrt{I_i}$ 极大，故 R_i 为 Artin 局部环.

故 $X = \operatorname{Spec} \prod_i R_i \to \mathbb{A}_k^n$ 诱导了 $\eta : k[x_1, \cdots, x_n] = \prod_i {}^{k[x_1, \cdots, x_n]_{f_i}}/{}_{J_i}$. 令 $Q_i = J_i \cap k[x_1, \cdots, x_n]$，则 ${}^{k[x_1, \cdots, x_n]}/{}_{Q_i}$ 也为 Artin 局部环, 且可以验证 $\sqrt{Q_i} = m_i$.

只需证明 η 为满同态. 考虑任意 $\eta_i : k[x_1, \cdots, x_n] = {}^{k[x_1, \cdots, x_n]_{f_i}}/{}_{J_i} = Y_i$, 则任意 $\overline{g} f^N \in Y_i$, 取 $f_i = f_i(P_i) + h_i, h_i \in m_i = m_{P_i}$, 则 $\overline{h_i}$ 在 Y_i 中幂零，进而由 Taylor 展开可以写成 $\overline{g} f^N = \overline{g_i}, g_i \in k[x_1, \cdots, x_n]$, 故 η_i 为满同态，进而由中国剩余定理有 η 为满同态. □

则来处理拟射影的情形.

Theorem 3.3

$X \subseteq \mathbb{P}^n$ 为 0 维拟射影子概型，则

(1) $(X, \mathcal{O}_X) = \bigsqcup_{i=1}^r (P_i, \mathcal{O}_{X,P_i} = {}^{k[x_1, \cdots, x_n]}/{}_{Q_i})$, 其中 $\sqrt{Q_i} = m_{P_i} = m_i$, 则实际上有 X 为仿射概型.

(2) X 为 $\mathbb{P}^n$ 的闭子概型.

(3) 可以做线性变换使得 $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ 为闭子概型. ♡

证明 (1) 设 $X = U \cap Z$, 其中 U 为开集，Z 为射影概型，则对仿射片 U_i, 由于 $U \cap U_i$ 可以写成有限个主开集的并, 以及 $X \cap U_i = (U \cap U_i) \cap Z$，故 X 可以写成有限个主开集的闭子集之并. 考虑

$$X \cap D_{U_i}(f) \subseteq D_{U_i}(f) = \operatorname{Spec} k[x_1, \cdots, x_n]_f \simeq {}^{k[x_1, \cdots, x_n, y]}/{}_{(yf-1)} \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$$

故 $X \cap D_{U_i}(f)$ 为 0 维仿射闭子概型，则由上面的定理，存在 I 使得

$$X \cap D_{U_i}(f) \simeq \operatorname{Spec} {}^{k[x_1, \cdots, x_n, y]}/{}_I \simeq \bigsqcup_{i=1}^r (P_i, \mathcal{O}_{X,P_i}).$$

再对所有主开集取并即得.

(2) 任意 $Z \subseteq X$, 证明 Z 为闭子概型等价于任意 $z \in Z$, 存在仿射邻域 $U_i = \operatorname{Spec}(A_i)$ 使得 $Z \cap U_i =$

$\mathrm{Spec}(A_i/I)$.

则任意 P_i, 取不妨 $P_i \in U_0 = \{X_0 \neq 0\}$, 设 $(P_i, \mathcal{O}_{X,P_i}) \subseteq D_{U_0}(f)$. 又 $V = U_0 \setminus \{P_2, \cdots, P_r\}$ 为开集，故存在 g 使得 $X \cap D_{U_0}(fg) = P_1$, 则令 $V_i = D_{U_0}(fg)$ 为只包含 P_i 的仿射开集，且同定理 3.2 可以证明 $(P_i, \mathcal{O}_{X,P_i}) \to (V_i, \mathcal{O}_{V_i})$ 由理想所定义，故得证.

(3) 由 (2) 的证明过程立得. □

3.3 射影平面的闭子概型

首先是 1 维概型，即曲线：

考虑 $F(X,Y,Z)$ 为齐次多项式，令 $x=\frac{X}{Z}, y=\frac{Y}{Z}$, 则令 $f(x,y)=\frac{F(X,Y,Z)}{Z^{\deg F}}\in k[x,y]$ 为去齐次化. 不难证明如下命题：

Proposition 3.2

(1) $\deg F\geq\deg f$.

(2) F 不可约 $\iff$ f 不可约，且 $Z\nmid F$.

(3) $\dim V_P(f)=1$, 记 $C_F=V_P(F)\subseteq\mathbb{P}^2$ 为 F 定义的曲线，则 F 不可约 $\iff$ C_F 为整概型. 否则设不可约分解 $F=F_1^{r_1}\cdots F_m^{r_m}$, 记 $C_F=r_1C_{F_1}+\cdots+r_mC_{F_m}$.

再考虑 0 维，特别地研究曲线的交：

Theorem 3.4

对 $F,G\in k[X,Y,Z]$ 齐次且互素，则

(1) $V_P(F,G)$ 为 *0* 维概型.

(2) $V_P(F,G)=\coprod_{i=1}^r(P_i,\mathcal{O}_{P_i})$.

(3) 存在坐标变换使得 $V_P(F,G)\subseteq\{Z\neq 0\}\simeq\mathbb{A}^2$, 则 $V_P(F,G)=\operatorname{Spec}{}^{k[x,y]}/_{(f,g)}$, 其中 $f=\frac{F}{Z^{d_1}}, g=\frac{G}{Z^{d_2}}$, $d_1=\deg F, d_2=\deg G$.

证明 (1) 考虑仿射片 $\{Z\neq 0\}$ 上，对 f,g 如上，有 $V_P(F,G)\cap\{Z\neq 0\}=\operatorname{Spec}{}^{k[x,y]}/_{(f,g)}$, 则第一章命题 1.21 中证明了 $V(f,g)$ 有限，故 $V_(P(F,G)$ 是 0 维的.

(2)(3) 同定理 3.3. □

下面讨论分次环的局部化. 设 $S=k[X,Y,Z]=\oplus_{d\geq 0}S_d$, 则设 $P\in\mathbb{P}^2$ 对应齐次理想, 可以定义齐次局部化

$$S_P=\oplus_{d\in\mathbb{Z}}\{\frac{A}{T}:A,T\text{齐次},T\notin P,\deg A-\deg T=d\}/\sim.$$

则零次部分为 $S_P^{(0)}=\mathcal{O}_P$, 有 $S_P=S\cdot\mathcal{O}_P$.

例如对 $P=[0:0:1]$ 对应理想 (X,Y), 则有 $S_P^{(0)}={}^{k[x,y]_{(0,0)}}/_{(x,y)_{(0,0)}}$.

利用上面的语言我们可以讨论如下的 Max Noether 定理，首先是简单的仿射情形

Theorem 3.5

$f,g,h\in k[x,y]$, 则若对任意闭点（即对应极大理想）$P\in\mathbb{A}^2$, 有 $h\in(f,g)_{m_P}$, 则 $h\in(f,g)$.

证明 注意到 $\mathbb{A}^2$ 的极大理想和点一一对应，则利用如下模的局部化的结论即得：

对 R-模 M, 则 $M = 0 \iff M_m = 0, \forall m \in \mathrm{Max}(R)$.

只需证明 $\Leftarrow$: 否则取 $0 \neq x \in M$, 有 $\mathrm{Ann}(x) \subsetneq R$, 进而存在 $m \in \mathrm{Max}(R)$, 使得 $\mathrm{Ann}(x) \subseteq m$, 则令 $S = R - m$, 有 $0 \neq x \in S^{-1}M$, 矛盾! $\square$

Theorem 3.6 (Max Noether)

设 $F, G, H \in k[X, Y, Z]$ 齐次, 且对任意闭点 $P \in \mathbb{P}^2$ 有 $H \in (F, G)_P$, 则 $H \in (F, G)$.

证明 对任意 $P \in \mathbb{A}^2$, 有 $H = U_P F + V_P G$, 其中 $U_P, V_P \in k[X, Y, Z]$ 齐次, 进而做去齐次化, 有 $h = u_p f + v_p g, u_p, v_p \in k[x, y]_P$, 则由仿射情形有 $h \in (f, g)$ in $k[x, y]$, 故存在 N 使得 $Z^N H = UF + VG, U, V \in k[X, Y, Z]$ 齐次.

只需证 N 可以为 0. 则取 N 是满足 $Z^N H = UF + VG$ 的 N 中最小的, 通过线性变换不妨 $V_P(F, G, Z) = \emptyset$, 则 $F_1(X, Y) = F(X, Y, 0)$ 和 $G_1(X, Y) = G(X, Y, 0)$ 互素. 记 $U = U_1(X, Y) + ZU_2, V = V_1(X, Y) + ZV_2$, 则

$$Z^N H = (U_1 + ZU_2)(F_1 + ZF_2) + (V_1 + ZV_2)(G_1 + ZG_2).$$

若 $N > 0$, 则 $U_1 F_1 + V_1 G_1 = 0$, 即 $G_1 \mid U_1$. 故可以设 $U_1 = G_1 U_1' = (G - ZG_2) U_1'$, 有

$$Z^N H = (G_1 U_1' - ZG_2 U_1' + ZG_2) F + VG = ZU'' F + V'' G.$$

其中 $U'' = U_2 - G_2 U_1', V'' = V - G_1'$, 则 $Z \mid V''$. 设 $V'' = ZW''$, 则 $Z^{N-1} H = U'' F + W'' G$, 与 N 的最小性矛盾! 故得证. $\square$

我们称 Max Noether 定理中的条件记作 Noether 条件, 即对任意闭点 P 都有 $H \in (F, G)_P$. 下面是一个判定 Noether 条件的方法.

Proposition 3.3

F, G, H 同前, 则若 P 为 $X = C_F$ 上的光滑点, 即 $(\mathcal{O}_{X,P}, m_{X,P})$ 为 DVR, 取 v_p 为对应的赋值. 若 $v_P(H) \geq v_P(G)$, 则有 $H \in (F, G)_P$.

证明 不妨 $P = [0 : 0 : 1] \in \mathbb{A}^2$, 则 $X|_{\mathbb{A}^2} = C_f$, 其中 $f = ax + by + \cdots$. 由光滑性不妨 $a \neq 0$, 则 $m_{C_f,P} = {k[x,y]_P}/{(f)_P} = (\bar{y})$. 此时有 $v_P(H) = v_P(h = \frac{H}{Z^{\deg H}}) = n_1$, 即 $h = u\bar{y}^{n_1}$. 故 $n_1 = \dim {\mathcal{O}_{C_f,P}}/{(\bar{h})_P}$. 则

$$\begin{aligned} v_P(h) \geq v_p(g = \frac{G}{Z^{\deg G}}) &\iff \bar{h} \in \bar{g} \triangleleft \mathcal{O}_{C_f,P} = {k[x,y]_P}/{(f)_P} \\ &\iff h \in (f, g)_P \triangleleft k[x, y]_P \\ &\iff H \in (F, G)_P \end{aligned}$$

故得证. $\square$

最后是一个应用.

Corollary 3.2

对三次曲线 F, G, 设 $C_F \cap C_G = \{P_1, \cdots, P_9\}$, 其中 $P_1, \cdots, P_6$ 为 C_F 上互异的光滑点，且这六个点在同一个二次曲线 C_Q 上，则 P_7, P_8, P_9 共线. ♡

证明 对 $P_i (1 \leq i \leq 6)$ 有 $v_{P_i}(G) = 1 = v_{P_i}(Q)$, 故 $G \in (F, Q)$, 设 $G = F + QL$, 比较次数有 L 为一次的，则 P_7, P_8, P_9 共线 L. □

Remark 取上述命题的退化情形（即三次曲线为三条直线）可以推出平面几何中的 Pascal 定理.

3.4 相交数

对互素的齐次多项式 $F, G \in k[X,Y,Z]$, 则 $T = V_P(F,G)$ 为 0 维的，有 $T = \bigsqcup_{i=1}^{t}(P_i, \mathcal{O}_{T,P_i})$. 当仿射情形，即 $T \subseteq \mathbb{A}^2$ 时，有 $T = {}^{k[x,y]}/_{I}$, 其中 $I = Q_1 \cdots Q_r, \sqrt{Q_i} = m_{P_i}$, 此时有 $\mathcal{O}_{T,P_i} = {}^{k[x,y]}/_{Q_i} \simeq {}^{k[x,y]_{P_i}}/_{(f,g)_{P_i}}$.

一般情形下，可以将 $\mathcal{O}_T$ 视为 $\mathbb{P}^2$ 上的层，即 $i_*\mathcal{O}_T = {}^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}}/_{\mathcal{I}_T}$.

Definition 3.2

对闭点 $P \in \mathbb{P}^2$, 定义**局部相交数** $I_P(F,G) = \begin{cases} 0 & P \notin T \\ \dim_k \mathcal{O}_{T,P_i} & P \in T \end{cases}$.

整体相交数为 $I(F,G) = \sum_P I_P(F,G)$. ♣

Remark 对仿射情形，即 $P \in \mathbb{A}^2$ 时，有 $I_P(F,G) = \dim_k {}^{k[x,y]_{(p)}}/_{(f,g)_{(p)}}$.

Example 3.4 对 $F = X, G = X^2 + YZ$, 则在 $P_1 = [0:0:1], P_2 = [0:1:0]$ 处，有

$$I_{P_1}(F,G) = \dim_k {}^{k[x,y]_{(0,0)}}/_{(x,x^2+y)_{(0,0)}} = {}^{k[x,y]_{(0,0)}}/_{(x,y)_{(0,0)}} = 1.$$

$$I_{P_2}(F,G) = \dim_k {}^{k[x,y]_{(0,1)}}/_{(x,x^2+y)_{(0,1)}} = {}^{k[x,y]_{(0,1)}}/_{(x,y)_{(0,1)}} = 1.$$

对 $F = X, G = XZ - Y^2$, 则在 $P = [0:0:1]$ 处，有

$$I_P(F,G) = \dim_k {}^{k[x,y]_{(0,0)}}/_{(x,x-y^2)_{(0,0)}} = {}^{k[x,y]_{(0,0)}}/_{(y^2)_{(0,0)}} = 2.$$

Proposition 3.4

对 $F_1, F_2, G, H \in k[X,Y,Z]$ 齐次，$P \in \mathbb{P}^2$, 有

(1) $I_P(F_1F_2, G) = I_P(F_1, G) + I_P(F_2, G)$.

(2) $I_P(F,G) = I_P(F, G + \lambda FH)$. ♠

证明 (1) 划归为仿射情形，记 $R = {}^{k[x,y]_p}/_{(g)_p}$, 则只需证

$$\dim_k {}^{R}/_{(f_1f_2)_p} = \dim_k {}^{R}/_{(f_1)_p} + \dim_k {}^{R}/_{(f_2)_p}.$$

故只需证有正合列

$$0 \to {}^{R}/_{(f_1)_p} \to {}^{R}/_{(f_1f_2)_p} \to {}^{R}/_{(f_2)_p} \to 0.$$

只需证 ${}^{R}/_{(f_1)_p} \to {}^{R}/_{(f_1f_2)_p}, \bar{h} \mapsto \overline{f}_2\bar{h}$ 为单射. 这是因为

$$\begin{aligned} \overline{f}_2 \cdot \bar{h} = 0 &\iff \overline{f}_2 \cdot \bar{h} \in (\bar{f}_1\bar{f}_2) \text{ in } R \\ &\iff \exists a \in R, \overline{f}_2 \cdot \bar{h} - a\bar{f}_1\bar{f}_2 = 0 \text{ in } R \iff g | f_2(h - af_1) \text{ in } k[x,y]_p \\ &\iff g \mid h - af_1 \text{ in } k[x,y]_p \iff \bar{h} = \bar{a}\bar{f}_1 \text{ in } R \iff \bar{h} = 0 \text{ in } {}^{R}/_{(\bar{f}_1)_p} \end{aligned}$$

注意到中间使用到了 $k[x,y]_p$ 为 UFD. 故得证.

(2) 显然. □

Example 3.5 设 $f = x^2 - y^3, g = y^2 - x^3$, 则

$$I_0(f,g) = I_0(x^2 - y^3, y^2(1-xy)) = 2I_0(x^2 - y^3, y) = 2I_0(x^2, y) = 4.$$

Proposition 3.5

设 $I_P(F,G) = 1$，则 C_F, C_G 在 P 点光滑且横截相交.

证明 不妨 $P = [0:0:1]$, 设 $f = ax + by + \cdots, g = cx + dy + \cdots$, 则横截相交 $\iff T_{\mathbb{A}^2,P} = T_{f,P} + T_{g,P} \iff ad - bc \neq 0$. 另一方面

$$I_P(F,G) = 1 = \dim_k {}^{k[x,y]_{(0,0)}}/_{(f,g)_{(0,0)}} \iff (f,g)_{(0,0)} = (x,y)_{(0,0)}.$$

不难验证这等价于 $ad - bc \neq 0$, 故得证. □

类似于命题 3.3 可以证明如下命题

Proposition 3.6

设 P 为 C_F 的光滑点，则

$$I_P(H,F) \geq I_P(G,F) \iff \frac{h}{g} \in \mathcal{O}_{C_F,P} \iff H \in (F,G)_P.$$

3.5 Bezout 定理

Theorem 3.7

$F, G \in k[X, Y, Z]$ 齐次互素，则 $I(F, G) = \deg F \cdot \deg G$.

证明 对 $T = V_P(F, G)$, 有层正合列

$$0 \to \mathcal{I}_T \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \to \mathcal{O}_T \to 0.$$

另一方面，对 $\mathcal{O}(-F)|_{\mathbb{A}^2} = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2} \cdot f$, 不难验证有正合列

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2} \cdot (fg) \to (\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2} \cdot f) \oplus (\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2} \cdot g) \to (f, g)\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2} \to 0.$$

故有正合列

$$0 \to \mathcal{O}(-F - G) \to \mathcal{O}(-F) \oplus \mathcal{O}(-G) \to \mathcal{I}_T \to 0.$$

对上面的正合列张量积上 $\mathcal{O}(d)$ 有

$$0 \to \mathcal{I}_T(d) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d) \to \mathcal{O}_T(d) \to 0.$$

$$0 \to \mathcal{O}(-F - G + d) \to \mathcal{O}(d - F) \oplus \mathcal{O}(d - G) \to \mathcal{I}_T(d) \to 0.$$

Step 1: 对于 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)|_{\mathbb{A}^2} = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2} \cdot Z^d$, 有 $O_T(d) = \mathcal{O}_T \cdot Z^d$, 进而 $\mathcal{O}_T(d)_{P_i} = \mathcal{O}_{T,P_i} \cdot Z^d$, 则 $\Gamma(\mathcal{O}_T(d)) = \oplus_i \mathcal{O}_{T,P_i} \cdot Z^d$. 即 $\dim_k \Gamma(\mathcal{O}_T(d)) = I(F, G)$.

Step 2: 回忆我们曾经证明了 $k[x, y] \to \oplus_i {}^{k[x,y]}/_{Q_i}$ 为满同态，故任意 $f \in \Gamma(\mathcal{O}_T(d))|_{\mathbb{A}^2}$ 可以实现为次数 $\le d$ 的多项式，进而 $\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)) \to \Gamma(\mathcal{O}_T(d))$ 为满射.

Step 3: 任意 $f \in \Gamma(\mathcal{I}_T(d))$，$f$ 为 d 次齐次且在 T 上为 0，则利用 Max Noether 定理和命题 3.3，有 $\Gamma(\mathcal{O}(d - F)) \oplus \Gamma(\mathcal{O}(d - G)) \to \Gamma(\mathcal{I}_T(d))$ 为满射.

Step 4: 设 $\deg F = d_1, \deg G = d_2$, 则当 d 充分大时，

$$0 \to \Gamma(\mathcal{I}_T(d)) \to \Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)) \to \Gamma(\mathcal{O}_T(d)) \to 0.$$

$$0 \to \Gamma(\mathcal{O}(-F - G + d)) \to \Gamma(\mathcal{O}(d - F)) \oplus \Gamma(\mathcal{O}(d - G)) \to \Gamma(\mathcal{I}_T(d)) \to 0.$$

又由于 $\dim \Gamma(\mathcal{O}(d)) = \frac{(d+2)(d+1)}{2}$, 有

$$\begin{aligned}
I(F, G) &= \dim_k \Gamma(\mathcal{O}_T(d)) = \dim_k \Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)) - \dim_k \Gamma(\mathcal{I}_T(d)) \\
&= \dim_k \Gamma(\mathcal{O}(d)) - \dim_k \Gamma(\mathcal{O}(d - F)) - \dim_k \Gamma(\mathcal{O}(d - G)) + \dim_k \Gamma(\mathcal{O}(-F - G + d)) \\
&= \dim_k \Gamma(\mathcal{O}(d)) - \dim_k \Gamma(\mathcal{O}(d - d_1)) - \dim_k \Gamma(\mathcal{O}(d - d_2)) + \dim_k \Gamma(\mathcal{O}(d - d_1 - d_2)) \\
&= n_1 n_2.
\end{aligned}$$

则得证. □

3.6 射影簇上正则函数

首先对光滑射影曲线不难有如下命题

Proposition 3.7

对 $C = C_G$ 为 $\mathbb{P}^2$ 上光滑射影曲线，则 $\Gamma(C, \mathcal{O}_C) = k$.

证明 设 $f = \frac{\overline{F_1}}{\overline{F_2}} \in \Gamma(C, \mathcal{O}_C)$, 其中 $\deg F_1 = \deg F_2$, 则 $\forall P \in C$, $\frac{\overline{F_1}}{\overline{F_2}} \in \mathcal{O}_{C,P}$, 由命题 3.6 和 Max Noether 定理，有 $F_1 \in (F_2, G)$. 则设 $F_1 = \lambda F_2 + GH$, 比较次数有 $\lambda \in k$，进而 $f = \lambda \in k$. □

事实上对更一般的情形都成立：

Theorem 3.8

对 $X = V_P(J) \subseteq \mathbb{P}^n$ 为射影代数簇，则 $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k$.

证明 设 $S_X = {k[X_0, \cdots, X_n]}/{J}$, 取 $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, 对 $U_i = \{X_i \neq 0\}$, 令 $V_i = X \cap U_i \subseteq \mathbb{A}^n$, 进而 $f|_{V_i} = \frac{\overline{F_i(X_0, \cdots, X_n}}{X_i^{N_i}}$, 即 $X_i^{N_i} f \in S_X^{(N_i)}$.

取 $N = \max\limits_{1 \leq i \leq n} N_i$, 则此时对任意 $1 \leq i \leq n$, 有 $X_i^N f \in S_X^{(N)}$.

再令 $N' = nN + 1$, 则对任意 $G \in S_X^{(\geq N')}$, 有 $Gf \in S_X^{(\geq N')}$, 故 $f \cdot S_X^{(\geq N')} \subseteq S_X^{(\geq N')}$. 又 S_X 为 Noether 的，故 $S_X^{(\geq N')}$ 为有限生成 S_X-模. 又 S_X 为整环，故 f 在 S_X 上是整的 (Nakayama 引理的证明过程，行列式方法)，即设

$$f^m + A_{m-1} f^{m-1} + \cdots + A_0 = 0, A_i \in S_X.$$

设 a_i 为 A_i 的 0 次部分，则 $f^m + a_{m-1} f^{m-1} + \cdots + a_0 = 0$, 由 k 为代数闭域，有 $f \in k$. □

Chapter 4 Riemann-Roch 定理

4.1 曲线上的除子

曲线上的 Cartier 除子可以用更简单的方式来表达.

Definition 4.1

对光滑曲线 C, C 上的 *Weyl* 除子形如 $D = n_1p_1 + \cdots + n_rp_r, n_i \in \mathbb{Z}$, 且 p_i 为闭点. ♣

Proposition 4.1

记号如上, 则 *Weyl* 除子和 *Cartier* 除子之间有一一对应. ♠

证明 对 Cariter 除子 $D_C = (U_i, f_i)$, 定义 Weyl 除子 $D = \sum\limits_{P \in C} v_P(f_i)P$. 其中 i 使得 $P \in U_i$. 由于 $\frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}(U_{ij})^*$, 故不依赖于 i 的选取. 还需要验证它是良定的，即求和有限:

由于 C 可以被有限覆盖，故只需在每个开集 U_i 上验证有限性，不妨 U_i 是仿射的，则 $f_i = \frac{g_i}{h_i}$, 有 $v_P(f_i) = v_P(g_i) - v_P(h_i)$，进而 $\{P \in U_i : v_P(f_i) \neq 0\} \subseteq V_{U_i}(g_i) \cup V_{U_i}(h_i)$ 有限.

反之对 Weyl 除子 $D = \sum\limits_{i=1}^{r} n_iP_i$, 设 $(\mathcal{O}_{C,P_i}, m_i = (f_i))$, 取 P_i 的开邻域 U_i 使得 f_i 在 U_i 正则，且 $P_j \notin U_i (i \neq j)$.

则令 $U_0 = C \setminus \{P_1, \cdots, P_r\}$, 定义 $D_C = \{(U_0, 1), (U_i, f_i^{n_i})\}$ 为 Cartier 除子. 可以验证上面的对应是互逆的. □

Example 4.1 D_C 为有效除子 $\iff D_C \geq 0 \iff D = \sum_i n_iP_i \geq 0 \iff n_i \geq 0, \forall i$.

Definition 4.2

对曲线 C 上的 *Cartier* 除子 $D_C = \{(U_i, f_i)\}$，其中 U_i 仿射，$f_i = \frac{u_i}{v_i} \in K(U_i)$, 则定义

$$\deg D_C = \sum_{P \in C} \dim_k \mathcal{O}_{C,P}/(u_i)_P - \dim_k \mathcal{O}_{C,P}/(v_i)_P.$$

♣

Remark 上面的定义是良好的:

(1) 有限性：类似命题 4.1 中有限性的证明.

(2) 不依赖于 (u_i, v_i) 的选取：若 $f_i = \frac{u_ig_i}{v_ig_i}$, 则类似于之前证明 $I_P(FG, H) = I_P(F, H) + I_P(G, H)$ 一样，可以证明

$$\dim_k \mathcal{O}_{C,P}/(u_ig_i)_P = \dim_k \mathcal{O}_{C,P}/(u_i)_P + \dim_k \mathcal{O}_{C,P}/(g_i)_P.$$

故定义的量一致.

(3) 不依赖于 f_i 的选取：可以验证 f_i 乘上可逆元也不影响.

Proposition 4.2

若 C 光滑，$D=\sum\limits_{i=1}^{r} n_iP_i$, 则 $\deg D=\sum\limits_{i=1}^{r} n_i$.

证明 由命题 4.1 中构造过程，只需证 $\dim_k {}^{\mathcal{O}_{C,P}}/_{(f_i^{n_i})}=n_i$, 这是容易的. □

我们可以定义除子的拉回：设 $\eta: C'\to C$ 为曲线之间的支配态射，设 C 上除子 $D=\{(U_i,f_i)\}$, 则定义 C' 上除子 $\eta^*D=\{(\eta^{-1}U_i,\eta^*f_i)\}$.

Theorem 4.1

设 C 为曲线，$\nu: C^\nu\to C$ 为正规化，则任意 C 上除子 D, 有 $\deg_C D=\deg_{C^\nu}\nu^*D$.

证明 首先不妨设仿射，此外还通过除子的加减法，可以化为有效除子的情形，故设 $D=(C,f), f\in\Gamma(C)$, 则考虑正合列

$$0\to\Gamma(C)\to\Gamma(C^\nu)\to\tau\to 0.$$

我们承认 $\Gamma(C^\nu)$ 是 $\Gamma(C)$-模，设生成元为 $f_1,\cdots,f_r$, 设 $f_i=\frac{u_i}{v_i}, u_i,v_i\in\Gamma(C)$, 则由于 f_i 在 $\Gamma(C)$ 上整，存在 $f_i^{n_i}+a_{n_i-1}f_i^{n_i-1}+\cdots+a_0=0$, 则通过通分可以证明存在 $h\in\Gamma(C)$, 使得存在 N, 对任意 i 有 $hf_i^N\in\Gamma(C)$.

由于 C^ν 仿射，且 $V_{C^\nu}(h)$ 为 0 维概型，故 $\dim_k {}^{\Gamma(C^\nu)}/_{(h)}<\infty$. 又由 h 的选取有 $(h)_{\Gamma(C^\nu)}\subseteq\Gamma(C)$, 故 $\dim_k\tau\le\dim_k {}^{\Gamma(C^\nu)}/_{(h)}<\infty$.

进而考虑如下的正合列

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & k_1 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \Gamma(C) \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \Gamma(C^\nu) \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \tau \arrow[r] \arrow[d, "\bar{f}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Gamma(C) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(C^\nu) \arrow[r] \arrow[d] & \tau \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & {}^{\Gamma(C)}/_{(f)} \arrow[r] \arrow[d] & {}^{\Gamma(C^\nu)}/_{(f)} \arrow[r] \arrow[d] & k_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

则由蛇形引理，存在正合列

$$0\to k_1\to {}^{\Gamma(C)}/_{(f)}\to {}^{\Gamma(C^\nu)}/_{(f)}\to k_2\to 0.$$

故

$$\dim_k {}^{\Gamma(C)}/_{(f)}-\dim_k {}^{\Gamma(C^\nu)}/_{(f)}=\dim_k k_1-\dim_k k_2=\dim_k\tau-\dim_k\tau=0.$$

最后一步用到了最后一个列上的正合列，故得证. □

Theorem 4.2

对光滑射影曲线 C, 若 $0 \neq f \in K(C)$, 则有 $\deg(\operatorname{div}(f)) = 0$.

证明 存在双有理态射 $\phi : C \to \bar{C}$, 其中 $\bar{C} \subseteq \mathbb{P}^2$ 为平面射影曲线. 则 ϕ 与 $\bar{C}$ 的正规化一致，则把 f 推到 $\bar{C}$ 上，设 $f = \overline{\frac{F_1}{F_2}}$, 其中 $F_i \in k[X, Y, Z]$ 齐次且次数一致，并且 $\bar{C}$ 作为平面射影曲线可以用一个方程 G 来定义.

则由 Bezout 定理，$\deg_{\bar{C}}\operatorname{div}(f) = I(G, F_1) - I(G, F_2) = 0$. 则由定理 4.1，有 $\deg(\operatorname{div}(f)) = 0$. □

Theorem 4.3

若 $\eta : C \to C'$ 为光滑射影曲线之间的支配映射，则任意 $P \in C$ 为闭点，有

$$\deg\eta^* P = [K(C') : K(C)].$$

证明 设 C 有仿射覆盖 $U_i = \operatorname{Spec}A_i$, 则 C' 有仿射覆盖 $U_i' = \operatorname{Spec}(\Gamma(U_i)^{\nu}_{K(C')})$.

则设 P 为 A 的极大理想，有 $A_P = S^{-1}A$ 为 DVR, 其极大理想 $m_P = (f_P)$. 则拉到 A' 上有 $\eta^* P$ 在 $\operatorname{Spec}(S^{-1}A')$ 中局部也由 f_P 定义，则

$$\deg_{C'}\eta^* P = \dim_k {S^{-1}A'}/{(f_P)} = \dim_k {S^{-1}A'}/{(f_P)S^{-1}A'} = \dim_k S^{-1}A \otimes_{A_P} {A_P}/{(f_P)}.$$

$S^{-1}A$ 为有限生成无挠 A_P-模，则 $S^{-1}A'$ 为 A_P-自由模，且

$$\operatorname{rank}S^{-1}A' = \dim_{K(C)} S^{-1}A' \otimes_{A_P} K(C) = \dim_{K(C)} K(C').$$

故

$$\deg_{C'}\eta^* P = \dim_k S^{-1}A \otimes_{A_P} K(P) = \operatorname{rank}S^{-1}A' = [K(C') : K(C)].$$

则得证. □

4.2 线性系

下面总设 C 为光滑射影曲线.

Definition 4.3

D 为 C 上除子，定义

$$\mathcal{L}(D) = \{f \in K(C) : \mathrm{div}(f) + D \geq 0\}$$

其中默认 $\mathrm{div}(0)$ 为无穷大除子.

Proposition 4.3

(1) $\mathcal{L}(D)$ 为线性空间，记其维数为 $l(D)$.

(2) $\mathcal{L}(0) = \Gamma(C) = k$.

(3) $\mathcal{L}(D) = \Gamma(C, \mathcal{O}_C(D))$.

(4) $D_1 \geq D_2$, 则 $\mathcal{L}(D_1) \subseteq \mathcal{L}(D_2)$.

(5) $P \in C$ 为闭点，则 $\dim_k \mathcal{L}(D+P)/\mathcal{L}(D) \leq 1$. 进而有

$$\dim_k \mathcal{L}(D) \begin{cases} = 0 & \deg D < 0 \\ \leq \deg D + 1 & \deg D \geq 0 \end{cases}.$$

证明 (1) 注意到 $\mathrm{div}(f) + \sum_P n_P P \geq 0 \iff v_P(f) \geq -n_P$. 故显然对数乘仍然保持.

对 $f, g \in \mathcal{L}(D)$, 有 $v_P(f+g) \geq \min\{v_P(f), v_P(g)\} \geq -n_P$, 故 $f + g \in \mathcal{L}(D)$.

(2) 来自于 (3) 和第三章命题 3.7.

(3) 设 $D = \{U_i, h_i)\}$, 则 $f \in \mathcal{L}(D) \iff fh_i \in \mathcal{O}_C(U_i)$. 故有对应:

$$\mathcal{L}(D) \to \Gamma(C, \mathcal{O}_C(D)), f \mapsto s_f = \{s_f|_{U_i} = (fh_i) \cdot \frac{1}{h_i}\}.$$

$$\Gamma(C, \mathcal{O}_C(D)) \to \mathcal{L}(D), s = \{s|_{U_i} = (g_i \cdot \frac{1}{h_i})\} \mapsto \frac{g_i}{h_i}.$$

故得证.

(4) 显然.

(5) 考虑正合列

$$0 \to \mathcal{O}(-P) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_P \to 0.$$

张量积上 $\mathcal{O}(D+P)$ 并限制在 C 上有

$$0 \to \mathcal{O}_C(D) \to \mathcal{O}_C(D+P) \to \mathcal{O}(D+P)|_P \to 0.$$

注意到 $\mathcal{O}(D+P)|_P \simeq \mathcal{O}_P \simeq k$, 故有正合列

$$0 \to \mathcal{L}(D+P)/\mathcal{L}(D) \to \Gamma(C, \mathcal{O}_P) = k \to 0$$

则 $\dim {}^{\mathcal{L}(D+P)}/_{\mathcal{L}(D)} \leq 1$. □

Example 4.2 对 $C=\mathbb{P}^1, P=[0:1], D=nP$. 设 $x=\frac{X}{Y}, y=\frac{Y}{X}$, 则 $\mathbb{P}^1=\mathbb{A}_x^1\cup\mathbb{A}_y^1$.

设 $f(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_n), g(x)=(x-b_1)\cdots(x-b_m)$, 则有

$$\operatorname{div}(\frac{f(x)}{g(x)})=[a_1:1]+\cdots+[a_n:1]-[b_1:1]-\cdots-[b_m:1]+(m-n)[1:0].$$

故 $\mathcal{L}(D)=\{\frac{f(x)}{x^n}:\deg f(x)\leq n\}, l(D)=n+1$.

Definition 4.4

对除子 D, 定义其**完全线性系**为 $|D|=\mathbb{P}(\mathcal{L}(D))$. ♣

显然 $|D|$ 与 $\{D'\geq 0: D'\sim D\}$ 有一一对应 $[f]\mapsto \operatorname{div}(f)+D$. 之后将这两个集合视为等同. 则记 $V=\max\{V'\geq 0: V'\leq D', \forall D'\in|D|\}$ 称为 $|D|$ 的**固定部分**，任意闭点 $P\in|V|$ 称为 $|D|$ 的**基点**.

可以记 $|D|=|M|+V$, 其中 $|M|$ 称为**自由部分**，且 $\mathcal{L}(M)=\mathcal{L}(D)$.

利用上面的记号我们可以考虑曲线的嵌入问题：设 $D=\{(U_i,h_i)\}$，则取 $\mathcal{L}(D)$ 的基 $f_1,\cdots,f_n\in K(C)$. 定义

$$\phi_{|D|}: C\setminus V\to\mathbb{P}^{n-1}, P\in U_i\mapsto[f_1h_i:\cdots:f_nh_i](P).$$

不难验证不同 U_i 上的映射可以粘合成一个态射.

在 V 上上面的定义显然无法进行，但可以考虑在 V 上延拓成 $\phi_{|D|}(P)=\phi_{|D-V|}(P)$. 我们称 $\phi_{|D|}$ 为除子 D 决定的映射.

Example 4.3 对 $C=\mathbb{P}^1, P=[0:1], D=nP$. 设 $x=\frac{X}{Y}, y=\frac{Y}{X}$, 则 $\mathbb{P}^1=\mathbb{A}_x^1\cup\mathbb{A}_y^1$.

此时有 $\phi_{|D|}:\mathbb{A}_x^1\to\mathbb{P}^n, x\mapsto[1:x:\cdots:x^n]$, 且 $\phi_{|D|}:\mathbb{A}_y^1\to\mathbb{P}^n, y\mapsto[y^n:\cdots:y:1]$.

4.3 微分和典范除子

Definition 4.5

对 k-代数 A, 设 M 为 A-模, 一个相对于 k 的**微分**是指映射 $d_M: A \to M$, 满足

(1) $\forall \lambda \in k, d_M(\lambda A) = \lambda d_M(a)$.

(2) $\forall a, b \in A, d_M(ab) = a d_M(b) + b d_M(a)$.

若对 A-模 $\Omega_{A/k}$ 和微分 $d: A \to \Omega_{A/k}$, 且有泛性质: 对任意 A-模和微分 $d_M: A \to M$, 存在唯一 A-模同态 η 使得图表交换

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "d"] \arrow[dr, "d_M"'] & & \Omega_{A/k} \arrow[dl, dashed, "\exists!\eta"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

则称 $\Omega_{A/k}$ 为 A 相对于 k 的**微分模**.

Theorem 4.4

微分模 $\Omega_{A/k}$ 存在.

证明 设 $J = \{a\otimes b - b\otimes a : a, b \in A\} \lhd A \otimes_k A$, 令 $\Omega_{A/k} = J/J^2$, 定义 $d: A \to \Omega_{A/k}, a \mapsto \overline{a\otimes 1 - 1\otimes a}$, 可以验证这满足定义中的条件. □

Example 4.4 设 $R = k[x_1, \cdots, x_n]$, 则 $d: R \to \oplus_{i=1}^n R dx_i, f \mapsto \sum\limits_{i=1}^n f_{x_i} dx_i$. 可以验证这是微分模：首先显然 d 是一个微分，另一方面任取 M 为 A-模，设 d_M 为对应的微分，则由微分的定义可知 $d_M(x_i^r) = r x_i^{r-1} d_M(x_i)$.

故定义 $\eta: \oplus_{i=1}^n R dx_i \to M, dx_i \mapsto d_M(x_i)$ 即可，即泛性质满足.

Proposition 4.4

设 $A = {}^{k[x_1,\cdots,x_n]}\big/_{I}$, $I = (g_1, \cdots, g_m)$, 则 $\Omega_{A/k} = {}^{\oplus_{i=1}^n A dx_i}\Big/_{\mathrm{Span}_A\{dg : g \in I\}}$.

证明 定义 $d: A \to \Omega_{A/k}, \overline{f(x_1, \cdots, x_n)} \mapsto \sum\limits_{i=1}^n \overline{f_{x_i}} d\overline{x_i}$.

设 $T = \mathrm{Span}_A\{dg : g \in I\}$, 则对任意 A-模和微分 $d_M: A \to M$，同理有 $d_M(\overline{f}) = \sum\limits_{i=1}^n \overline{f_{x_i}} d_M(\overline{x_i})$, 则定义 $\eta: \oplus_{i=1}^n A dx_i \to M, dx_i \mapsto d_M(\overline{x_i})$.

由于此时 $\eta(T) = \eta(d(I)) = d_M(0) = 0$, 故可以诱导 $\eta: \Omega_{A/k} \to M$, 则泛性质满足. □

Proposition 4.5

$S^{-1}\Omega_{A/k} \simeq \Omega_{S^{-1}A/k}$.

Definition 4.6
X 为代数簇，定义预层 $\Omega_{X/k}^{pre}(U)=\Omega_{\Gamma(U)/k}$，其层化为 $\Omega_{X/k}$，称为 X 的**微分层**. ♣

Example 4.5 若 $X=\mathrm{Spec}A$，则 $\Omega_{X/k}(X)=\Omega_{A/k},\Omega_{X/k,P}=\Omega_{A_P/k}$.

Definition 4.7
若 C 为曲线，P 为其光滑点，则若 $f\in\mathcal{O}_{C,P}$ 满足 $m_{C,P}=(f-f(P))_P$，则称 f 为在 P 点的**局部参数**. ♣

Example 4.6 设 $C=V(y-x^3(x-y^2))\subseteq\mathbb{A}^2,P=(0,0)$，不难验证为光滑点，则 $y=\frac{x^4}{1+x^3y}\in(x)_P$，故 x 可以作为 P 处的局部参数.

回忆光滑点的局部环是 DVR 的证明过程，我们实际上有：若 $g\in m_{C,P},\overline{g}\neq 0 \mod m_{C,P}/m_{C,P}^2$，则 $m_{C,P}=(g)$. 则由 x 为局部参数，有 $x+y$ 也可以作为局部参数：$x+y\equiv x \mod m_{C,P}^2$，故 $x+y\equiv x \mod m_{C,P}$.

Theorem 4.5
C 为光滑曲线，f 为 C 在 P 处的局部参数，则存在 P 的邻域 U 使得 $f\in\mathcal{O}_C(U)$ 且 f 在 U 的每一点处均为局部参数. ♡

证明 设 $C=V(f_1,\cdots,f_m)\subseteq\mathbb{A}^n$，则由光滑可知 $df_1,\cdots,df_m$ 张成的空间维数为 $n-1$. 又回忆 $m_{C,P}/m_{C,P}^2=\oplus_{i=1}^n kdx_i\Big/\mathrm{Span}_k\{df_i\}$，故有

$$
\begin{aligned}
f\text{为局部参数} &\iff m_{C,P}/m_{C,P}^2=kdf\\
&\iff \oplus_{i=1}^n kdx_i=\mathrm{Span}_k\{df,df_1,\cdots,df_m\}\\
&\iff \mathrm{rank}\frac{\partial(f,f_1,\cdots,f_m)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}|_p=n.
\end{aligned}
$$

则由秩达到极大值的点为开集得证. □

Corollary 4.1
C 为光滑曲线，设 f 为 C 在 U 上的局部参数，则 $\Omega_{C/k}(U)=\mathcal{O}_C(U)\cdot df$ 为可逆层. ♡

证明 设 $C=\mathrm{Spec}^{k[x_1,\cdots,x_n]}\Big/(f_1,\cdots,f_m)=\mathrm{Spec}A$，只需证 $\Omega_{A/k}=Adf$ 为自由模.

在主开集 $D(f)$ 上有 $\Omega_{C/k}(D(f))=\Omega_{f^{-1}C/k}$. 又 $\Omega_{A/k}=\oplus_{i=1}^n Adx_i\Big/\mathrm{Span}_A\{df_j\}$ 以及 f 为局部参数，有 $\Omega_{A/k}\otimes_A(A/m_P=K(P))=kd\overline{f}$，

则考虑自然映射 $\eta:Adf\to\Omega_{A/k}$，在每个极大理想处，有 $\eta\otimes A/m_P:K(P)df\to\Omega_{A/k}\otimes K(P)$ 为满射，由 Nakayama 引理有 η 为满射，进而 $\Omega_{A/k}=Ad\overline{f}\simeq A/J$. 其中 $J=\mathrm{Ann}(d\overline{f})$.

若 $J\neq 0$，取 $m_P\supsetneq J$，进而 $A/J\otimes K(P)=0$，与 $\Omega_{A/k}\otimes_A(A/m_P=K(P))=kd\overline{f}$ 矛盾! □

Example 4.7 设 $C=\mathbb{P}^1=\mathbb{A}_x^1\cup\mathbb{A}_y^1$，有 $\Omega_{C/k}|_{\mathbb{A}_x^1}=\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}\cdot dx,\Omega_{C/k}|_{\mathbb{A}_y^1}=\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}\cdot dy$，故同第二章例 2.11 有

$\Omega_{C/k} \simeq \mathcal{O}(-2)$.

Example 4.8 $C = V(X^3 - Y^3 - Z^3) \subseteq \mathbb{P}^2$, 则 $C|_{\{Z\neq 0\}} = V(x^3 - y^3 - 1) \subseteq \mathbb{A}^2$, 则此时有 $x^2dx - y^2dy = 0$.

在 $U_{YZ} = C \cap \{Z \neq 0, Y \neq 0\}$ 上 C 有局部参数 x, 故 $\Omega_{C/k}|_{U_{YZ}} = \mathcal{O} \cdot dx$, 类似有 $\Omega_{C/k}|_{U_{XZ}} = \mathcal{O} \cdot dy, \Omega_{C/k}|_{U_{XZ}} = \mathcal{O} \cdot d\frac{1}{x}$. 可以利用此证明 $\Omega_{C/k} = \mathcal{O}_C$.

Corollary 4.2

f 为 P 处的局部参数，则 $\Omega_{K(C)/k} = K(C) \cdot df$, 其中 $K(C)$ 为 C 上的有理函数域.

证明 利用推论 4.1，有 $(\Omega_{X/k})_P = \mathcal{O}_{X,P} \cdot df$, 则由微分模与局部环交换，考虑如下交换图表

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{X,P} \arrow[r, "d"] \arrow[d] & \Omega_{\mathcal{O}_{X,P}/k} \arrow[r] & (\Omega_{X/k})_P = \mathcal{O}_{X,P} \cdot df \arrow[d] \\
K(C) \arrow[rr, "d"] & & K(C)df
\end{tikzcd}$$

自然得证. □

Definition 4.8

称 $\omega \in \Omega_{K(C)/K} = K(C) \cdot df$ 为**有理微分**.

设 $P \in C$, t_P 为局部参数，则 $\omega = gdt_P$, 可以定义赋值 $v_P(\omega) = v_P(g)$.

对 $0 \neq \omega \in \Omega_{K(C)/K}$, 定义 $\mathrm{div}(\omega) = \sum\limits_{P\in C} v_P(\omega) \cdot P$. 通过用有限邻域覆盖可知这是一个有限求和，故有意义.

Remark 赋值是良定的：若 t'_P 也是局部参数，则有 $m_{C,P} = (t_P) = (t'_P)$, 进而 $t'_P = ut_P, u \in \mathcal{O}^*_{C,P}$.

有 $dt'_P = t_P du + udt_P$, 又 $du \in= \Omega_{\mathcal{O}_{X,P}/k} = \mathcal{O}_{X,P}dt_P$, 设 $du = vdt_P$, 则有 $dt'_P = (u + t_P v)dt_P$, 其中 $u + t_P v \in \mathcal{O}^*_{X,P}$, 故所定义的赋值相同.

Theorem 4.6

设有理微分 $\omega \neq 0$, 则 $\mathcal{O}_C(\mathrm{div}(\omega)) \simeq \Omega_{C/k}$.

证明 将 C 分解为仿射开集 U_i 之并，且在 U_i 上有局部参数 t_i. 则 $\Omega_{C/k}(U_i) = \mathcal{O}_{U_i} \cdot dt_i$. 再设 $\omega = g_i dt_i$ in U_i, 则有 $\mathcal{O}_C(\mathrm{div}(\omega))(U_i) = \mathcal{O}_{U_i} \cdot \frac{1}{g_i}$.

在每个 U_i 上定义 $\eta_i : \Omega_{C/k}(U_i) \to \mathcal{O}_C(\mathrm{div}(\omega))(U_i), dt_i \mapsto \frac{1}{g_i}$, 由上面的讨论这是一个同构.

另一方面在 U_{ij} 上有 $\omega = g_i dt_i = g_j dt_j$, 故 η_i 可以粘合成同构 $\eta : \Omega_{C/k} \to \mathcal{O}_C(\mathrm{div}(\omega))$, 则得证. □

Corollary 4.3

所有的 $\mathrm{div}(\omega)$ 均线性等价，故在线性等价意义下该除子唯一，记作 $K_C = K$, 称为 C 的**典范除子**.

证明 由第二章命题 2.9 和上面的定理立得. □

4.4 Riemann-Roch 定理与应用

现在我们可以叙述 Riemann-Roch 定理.

Theorem 4.7 (Riemann-Roch)

设 C 为光滑射影曲线，则对任意 C 上的除子 D, 有

$$l(D)-l(K_C-D)=\deg D+1-g(C).$$

其中 $g(C)$ 只与 C 有关，称为 C 的**亏格**.

本节先来给出它的一些简单应用.

Corollary 4.4

(1) $l(K_C)=g\geq 0, \deg K_C=2(g-1)$.

(2) 若 C 为 d 次光滑平面射影曲线，则 $g(C)=\frac{(d-2)(d-1)}{2}$.

证明 (1) 在 Riemann-Roch 公式中取 $D=0$ 和 $D=K_C$ 即得.

(2) 设 $C=V_P(F)$, 在 $Z\neq 0$ 时，有 $F_X=Z^{d-1}f_x, F_Y=Z^{d-1}f_y, f_xdx+f_ydy=0$. 则当 $f_x\neq 0$ 时，y 为局部参数.

通过坐标变换不妨设 $V_P(F,Y,Z)=V_P(F_X,F,Z)=0$(为什么?), 则在 $\{Z\neq 0\}$ 上，$dx=-\frac{f_y}{f_x}dy$ 由 f_y 定义.

$\{Z=0\}$ 上，有 $Y\neq 0$, 故令 $x'=\frac{X}{Y}, z'=\frac{Z}{Y}$, 则同理有 $dx'=-\frac{F_Z}{F_X}dz'$. 此时 z' 为局部参数，且

$$dx=d\frac{x'}{z'}=\frac{z'dx'-x'dz'}{z'^2}=\frac{F_Ydx'}{F_Xz'^2}.$$

则综上有理微分 $K_C=dx$ 可以用 $\frac{F_Y}{Z^2}$ 表示. 代入 (1) 有

$$g(C)=1+\frac{\deg(K_C)}{2}=\frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

则得证. □

我们还可以对小亏格的曲线进行分类.

Theorem 4.8

(1) $g(C)=0 \iff C\simeq\mathbb{P}^1$.

(2) $g(C)=1$, 则 C 可以嵌入为射影平面中的三次曲线.

证明 (1) 任取 $P\in C, l(P)-l(K_C-P)=2$, 又 $\deg K_C=-2<0$, 故 $l(K_C-P)=0$, 即 $l(P)=2$. 设 $\mathcal{L}(P)=\mathrm{Span}_k\{1,f\}$. 其中 $\mathrm{div}(f)=P'-P$. 又任意 Q，有 $l(P-Q)=\deg(P-Q)+1=1\neq l(P)$, 故 $|P|$ 没有基点. 考虑

$$\phi_{|P|}:C\to\mathbb{P}^1, x\mapsto\begin{cases}[1:f(x)] & x\neq P\\ [0:1] & x=P\end{cases}$$

则 $\phi^*|_{|P|}: K(\mathbb{P}^1) \to K(C)$, 有 $\phi^*_{|P|}([1,0]) = \mathrm{div}(f|_{C-\{P\}}) = P'$, 则由定理 4.3 有 $[K(C):K(\mathbb{P}^1)] = 1$, 进而利用在奇点解消的唯一性中我们曾经使用过的结论，即光滑曲线的函数域同构等价于曲线的同构，故有 $C \simeq \mathbb{P}^1$.

(2) $l(K_C) = 1, \deg(K_C) = 0$, 故只能 $K_C \sim 0$. 取 $P \in C, n \geq 0$, 则 $l(nP) - l(K_C - nP) = n$, 即 $l(nP) = n$. 故由命题 4.3(5), 可知有

$$\mathcal{L}(0) \subsetneq \mathcal{L}(P) \subsetneq \mathcal{L}(2P) \subsetneq \mathcal{L}(3P) \subsetneq \mathcal{L}(4P) \subsetneq \mathcal{L}(5P) \subsetneq \mathcal{L}(6P).$$

取 $x \in \mathcal{L}(2P) \setminus \mathcal{L}(P), y \in \mathcal{L}(3P) \setminus \mathcal{L}(2P)$, 有 $x^2 \in \mathcal{L}(4P) \setminus \mathcal{L}(3P), xy \in \mathcal{L}(5P) \setminus \mathcal{L}(4P)$ 以及 $x^3, y^2 \in \mathcal{L}(6P) \setminus \mathcal{L}(5P)$.

由于 $\dim \mathcal{L}(6P) = \dim \mathcal{L}(5P) + 1$, 只能存在不可约（否则 $1, x, y, x^2, xy$ 有代数关系）代数关系

$$y^2 - \lambda x^3 - (a + bx + cy + dx^2 + exy) = 0 \text{ in } K(C).$$

再考虑 $\phi_{|2P|}: C \to \mathbb{P}^1$（由于 $l(2P-Q) = 1 \neq l(2P)$, 故没有基点），它在 $C \setminus P$ 上定义为 $[1:x]$, 在 P 处定义为 $[\frac{1}{x}:1] \subseteq \{X_1 \neq 0\} = \mathbb{A}^1_t$. 则 $\phi^*_{|2P|}(\mathrm{div}(t)|_{\mathbb{A}^1_t}) = 2P$, 进而再次由定理 4.3 有 $[K(C):K(\mathbb{P}^1)] = 2$.

再考虑 $\phi_{|3P|}: C \to \mathbb{P}^2$（同样没有基点），定义为 $[1:x:y]$, 则设 x, y 满足的代数关系在 $\mathbb{P}^2$ 上实现为齐次多项式 F, 有 $\phi_{|3P|}(C) \subseteq V_P(F) \subseteq \mathbb{P}^2$. 其中 $K(C') \subseteq K(C)$.

另一方面，$[K(C'):K(\mathbb{P}^1)] = 2$, 故综上有 $K(C) = K(C')$, 则 C 与射影平面中三次曲线 F 同构. $\square$

4.5 Riemann-Roch 定理的证明

最后来证明 Riemann-Roch 定理，首先需要引进如下的概念.

Definition 4.9

一个**分布**是指 $r: C \to K(C), x \mapsto r_x$, 使得对除了有限个 x 以外，均有 $r_x \in \mathcal{O}_{C,x}$. 记 R 为 C 上分布所构成的 k-线性空间.

对除子 $D = \sum_P n_P P$, 定义 $R(D) = \{r \in R : v_P(r_P) + n_P \geq 0, \forall P \in C\}$.

Proposition 4.6

(1) $D \leq D'$, 则 $R(D) \subseteq R(D')$.

(2) 若 $D = n_P P + \cdots, m_{C,P} = (t_P)$, 则 ${R(D+P)}/{R(D)} = k(\frac{1}{t_P^{n_P+1}})$.

(3) $R = \varinjlim_D R(D)$.

Definition 4.10

对除子 D, 定义 $\lambda(D) = \dim_k \Lambda(D)$, 其中 $\Lambda(D) = {R}/{R(D) + K(C)}$.

Proposition 4.7

若 $D_1 \sim D_2$, 则 $\Lambda(D_1) \simeq \Lambda(D_2)$.

证明 设 $D_2 = D_1 + \mathrm{div}(f)$, 则考虑 $\frac{r}{f} : \Lambda(D_1) \to \Lambda(D_2)$. 它是良定的:

$$r \in R(D_1) \iff (\mathrm{div}(r_x) + D_1)_x \geq 0 \iff (\mathrm{div}(r_x \frac{1}{f}) + D_2)_x \geq 0 \iff \frac{r}{f} \in R(D_2).$$

并同理构造反向的对应，则得证. □

我们要证明如下的主定理

Theorem 4.9

(1) 若 $D' \geq D$, 则 $\dim_k {R(D') + K(C)}/{R(D) + K(C)} = \deg D' - l(D') - \deg D + l(D)$.

(2) 存在 D_0, 使得对任意 D, 有 $\deg(D_0) - l(D_0) \geq \deg(D) - l(D)$.

(3) 任意 D 有 $\lambda(D) < \infty$.

证明 (1) 首先有

$$ {R(D') + K(C)}/{R(D) + K(C)} \simeq \frac{{R(D')}/{R(D') \cap K(C)}}{{R(D)}/{R(D) \cap K(C)}} = \frac{{R(D')}/{\mathcal{L}(D')}}{{R(D)}/{\mathcal{L}(D)}}.$$

其中用到了 $R(D) \cap K(C) = \{f \in K(C) : \mathrm{div}(f) + D \geq 0\} = \mathcal{L}(D)$.

利用蛇形引理考虑如下的正合列

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{L}(D) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{L}(D') \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{L}(D')/\mathcal{L}(D) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{R}(D) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{R}(D') \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & R(D)/\mathcal{L}(D) \arrow[r] \arrow[d] & R(D')/\mathcal{L}(D') \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

则

$$\dim W = \dim V - \dim \mathcal{L}(D')/\mathcal{L}(D) = \deg D' - \deg D - \dim \mathcal{L}(D')/\mathcal{L}(D).$$

故得证.

(2) 任取 $f \in K(C) \setminus k$, 则 $\phi = [1 : f] : C \to \mathbb{P}^1$ 支配 (为什么？)

设 $[K(C) : K(f)] = n$ 且令 $g_1, \cdots, g_n$ 为 $K(C)/K(f)$ 的基，则存在 $D_1 \geq 0$ 使得对任意 i, 有 $\mathrm{div}(g_i) + D_1 \geq 0$.

设 $E = \phi^*[0 : 1]$, 则 $\deg E = n$, 此时 $f_i^i g_j (0 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq n) \in \mathcal{L}(D_1 + (m-1)E)$ 且 k-线性无关. 则 $l(D_1 + (m-1)E) \geq mn$, 进而

$$l(D_1 + (m-1)E) - \deg(D_1 + (m-1)E) \geq mn - \deg(D_1) - (m-1)n = n - \deg(D_1).$$

我们承认如下引理：对 $P_0 \in C$, 有 $\phi^*(\phi(P_0)) \geq P_0$(尝试证明).

则对任意 D, 设 $D = \sum_i n_i P_i$, 则 $D \leq \sum_i \phi^*(n_i \phi(P_i)) \sim \sum_i n_i \phi^*[0 : 1] = \sum_i n_i E$.

令 $D' = D_1 + \sum_i \phi^*(n_i \phi(P_i))$, 则 $D' \geq D$ 且存在 m 使得 $D' \sim D_1 + mE$, 故由上有

$$\deg(D) - l(D) \leq \deg(D') - l(D') = \deg(D_1 + mE) - l(D_1 + mE) \leq \deg(D_1) - n.$$

(3) 由 (2) 取 D_0, 且令 $N = \deg(D_0) - l(D_0)$, 则任意 $D' \geq D_0$, 又由于 $\deg(D') - l(D') \geq \deg(D_0) - l(D_0)$, 只能取等号，进而利用 (1) 有

$$\dim_k R(D') + K(C)/R(D) + K(C) = \dim_k R(D_0) + K(C)/R(D) + K(C).$$

则对 D' 取直极限，由命题 4.6(3) 可知

$$\lambda(D) = \dim_k R(D_0) + K(C)/R(D) + K(C) = N - \deg(D) + l(D) < \infty.$$

并我们定义亏格 $g = \lambda(0) = N + 1$, 只与曲线 C 本身有关. □

Theorem 4.10 (对偶定理)

存在非退化的双线性配对 $\theta : \Lambda(D) \times \Lambda(K_C - D) \to k$.

该定理和上面的定理 4.9 可以推出 Riemann-Roch 定理:

由对偶定理可知 $\lambda(D) = l(K_C - D)$，则又由定理 4.9(3) 的证明过程可知

$$l(K_C - D) = \lambda(D) = N - \deg(D) + l(D) = g(C) - 1 + l(D) - \deg(D).$$

故只要证明对偶定理.

首先需要定义如下留数的概念.

Definition 4.11

对 $\beta \in \Omega_{K(C)/k}, x_0 \in C$, 设 $m_{C,x_0} = (t), \beta = f dt, f \in K(C)$, 则考虑

$$\phi : \mathcal{O}_{C,x_0} \to k[[t]]$$

$$g \mapsto g(x_0) + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$$

其中 $a_1 \bar{t} = \overline{g - g(x_0)} \in m_{C,x_0}/m_{C,x_0}^2, a_2 \bar{t}^2 = \overline{g - g(x_0) - a_1 t} \in m_{C,x_0}^2/m_{C,x_0}^3$ 等等.

进一步可以扩展到

$$K(C) \longrightarrow k((t))$$

$$f = g t^{v_{x_0}(f)} \mapsto t^{v_{x_0}(f)} \phi(g).$$

则定义 β 在 x_0 处的**留数**为 $\mathrm{Res}_{x_0} \beta = a_{-1}$.

再定义迹.

Definition 4.12

对无穷维空间 L 以及线性映射 $\psi : L \to L$, 若存在 n 使得 $\mathrm{Im}(\psi^n(L))$ 有限维，则可以定义 $\mathrm{Tr}_L(\psi) = \mathrm{Tr}_{\psi^n(L)}(\psi)$.

再对线性空间 L 和可交换的线性映射 $\phi, \psi, \chi : L \to L$, 且 M 为 L 的子空间满足 $\chi(M) \preceq M$(即存在有限维子空间 $V_\chi \subseteq L$ 使得 $\chi(M) \subseteq M + V_\phi$), 则取关于直和分解 $L = M \oplus N$ 的投影 π 并定义 $\phi_1 = \pi \circ \phi, \psi_1 = \pi \circ \psi$, 可以验证 $\mathrm{Im}[\phi_1, \psi_1]^2$ 是有限维的，故可以定义 $\langle \phi, \psi \rangle_M^L = \mathrm{Tr}_L[\phi_1, \psi_1]$.

下面的命题均为初等的，但验证较为繁琐，故略去.

Proposition 4.8

(1) $\langle \phi, \psi \rangle_M$ 良定，不依赖于投影的选取.

(2) 若 $M \preceq M'$，则 $\langle \phi, \psi \rangle_M = \langle \phi, \psi \rangle_{M'}$.

(3) 若 M_1, M_2 满足 $\psi(M) \preceq M_i, \phi(M) \preceq M_i (i = 1, 2)$, 则 $M_1 + M_2, M_1 \cap M_2$ 也满足，且有

$$\langle \phi, \psi \rangle_{M_1} + \langle \phi, \psi \rangle_{M_2} = \langle \phi, \psi \rangle_{M_1 + M_2} + \langle \phi, \psi \rangle_{M_1 \cap M_2}.$$

Example 4.9 设 $L=k((t)), M=k[[t]]$, 设 $\pi: L\to M, t^i\mapsto \begin{cases} t^i & i\geq 0 \\ 0 & i<0 \end{cases}$.

将 t^m, t^n 通过乘法视为 L 上的线性变换，且设 $m=-n$, 则

$$(\pi t^m\circ \pi t^n, \pi t^n\circ \pi t^m)t^i = \begin{cases} 0 & i\geq n \\ t^i & 0\leq i<n \end{cases}.$$

$$\langle t^m, t^n\rangle_M = n = \mathrm{Res}_o(t^m dt^n).$$

进而有任意 $f,g\in L$, 有 $\langle f,g\rangle_M = n = \mathrm{Res}_0(fdg)$.

对 $x_0\in C, m_{C,x_0}=(\bar{t})$, 则考虑 $\overline{M}=\mathcal{O}_{C,x_0}\hookrightarrow M, \overline{L}=K(C)\hookrightarrow L=K((t))$, 有对任意 $f,g\in K(C)$, 有

$$\langle f,g\rangle_{\frac{\overline{L}}{M}} = \mathrm{Res}_{x_0}(fdg).$$

Example 4.10 对 $L=R, M_1=R(0), M_2=K(C)$, 则有

$$\begin{tikzcd} R(0) \arrow[r, "\simeq"] & \prod_{x\in C}\mathcal{O}_{C,x} \arrow[d, "\pi_x"] \\ R \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, hook] & \prod_{x\in C} K(C) \end{tikzcd}$$

对于 $f\in K(C)$, 有 $f\cdot M_1\preceq, f\cdot M_2\preceq M_2$, 并可以定义投影 $(\pi f)(r_x)=(\pi_x)(f\cdot r_x)$, 进而可以定义

$$\langle f,g\rangle_{R(0)} = \sum_{x\in C}\mathrm{Tr}[\pi_x f, \pi_x g] = \sum_{x\in C}\mathrm{Res}_x(fdg).$$

Proposition 4.9 (留数定理)

设 $\omega\in\Omega_{K(C)/k}$, 则 $\sum_{x\in C}\mathrm{Res}_x(\omega)=0$.

证明 设 $\omega = fdg$, 则

$$\langle f,g\rangle_{R(0)} = \langle f,g\rangle_{R(0)+K(C)} + \langle f,g\rangle_{R(0)\cap K(C)} - \langle f,g\rangle_{K(C)}.$$

显然 $\langle f,g\rangle_{K(C)}=0$.

且 R 和 $R(0)+K(C)$ 之间差有限维（定理 4.9），故 $\langle f,g\rangle_{R(0)+K(C)} = \langle f,g\rangle_R = 0$.

最后由于 $R(0)\cap K(C)$ 有限维，故 $\langle f,g\rangle_{R(0)\cap K(C)}=0$.

则 $\langle f,g\rangle_{R(0)} = \sum_{x\in C}\mathrm{Res}_x(fdg) = \sum_{x\in C}\mathrm{Res}_x(\omega)=0$. □

下面回到对偶定理的证明.

注意到 $\mathcal{L}(K_C - D) = \Gamma(\Omega_{C/k} \otimes \mathcal{O}(-D))$, 则定义

$$\theta : R \times \mathcal{L}(K_C - D) = R \times \Gamma(\Omega_{C/k} \otimes \mathcal{O}(-D)) \to k$$
$$(r = (r_x)_{x\in C}, \alpha) \mapsto \sum_{x\in C} \mathrm{Res}(r_x \alpha).$$

首先若 $r \in R(D)$, 则 $(\mathrm{div}(r_x) + D)_x \geq 0$, 设 $fdt \in \mathcal{L}(K_C - D)$, 有 $\mathrm{div}(f) - D \geq 0$, 进而 $r_x f \in \Omega_{X/k,x}$, 则 $\mathrm{Res}(r_x f) = 0$, 即 $\theta(R(D) \times \mathcal{L}(K_C - D)) = 0$.

其次由留数定理有 $\theta(K(C) \times \mathcal{L}(K_C - D)) = 0$, 故 θ 可以自然诱导 $\theta : \Lambda(D) \times \Lambda(K_C - D) \to k$. 故只需要证明这是非退化的, 即验证 $\eta : \mathcal{L}(K_C - D) \to \Lambda(D)^*$ 为双射.

首先是单射，若 $0 \neq \omega \in \Gamma(\Omega_{C/k} \otimes \mathcal{O}(-D))$, 取 $x_0 \in C, m_{C,x_0} = (\bar{t})$, 则 $\omega|_{x_0} = ut^m dt, u(x_0) \neq 0$. 再令 $r = (r_{x_0} = \frac{1}{t^{m+1}}, 0)$, 有 $\sum\limits_{x\in C} \mathrm{Res}_x(r_x\omega) = \mathrm{Res}_{x_0}(\frac{u}{t}dt) = u(x_0) \neq 0$. 故得证.

再验证满射，将 $\mathrm{Hom}_k(R/K(C), k)$ 视为 $K(C)$-模，并令

$$\Omega = \{\phi : \exists \text{除子} D_\phi, \text{使得} \phi[{}^{R(D_\phi) + K(C)}/_{K(C)}] = 0\}$$

为 $\mathrm{Hom}_k(R/K(C), k)$ 的子模，则有 $\Omega_{K(C)/k} \subseteq \Omega$: 将 $\omega \in \Omega_{K(C)/k}$ 对应 $\phi_\omega : R/K(C) \to k, \bar{r} \mapsto \sum\limits_{x\in C} \mathrm{Res}_x(r_x\omega)$, 显然有 $\phi_\omega(R(-\mathrm{div}(\omega))) = 0$, 即 $\omega \in \Omega$. 事实上我们有:

Lemma 4.1

$\Omega = \Omega_{K(C)/k}$.

证明 只需证 $\dim_{K(C)} \Omega = 1$, 若不然取 $\phi, \psi \in \Omega$ 为 $K(C)$-无关的，则存在除子 D'，使得 $\psi(R(D')) = \phi(R(D')) = 0$.

固定 $P \in C$, 取 $\mathcal{L}(nP)$ 的基 $f_1, \cdots, f_{l_n}$, 则 $\frac{l_n}{n} \to 1 (n \to \infty)$, 且 $f_1\phi, \cdots, f_{l_n}\phi, f_1\psi, \cdots, f_{l_n}\psi \in \mathrm{Hom}_k({}^R/_{R(D' - np) + K(C)}, k)$，且它们无关，进而回顾定理 4.9 的证明过程，有

$$2l_n \leq N - \deg(D' - np) + l(D' - np).$$

令 $n \to \infty$, 则有矛盾! □

则任取 $\phi \in \Lambda(D)^* \subseteq \Omega$, 则由引理 $\omega \in \Omega_{K(C)/k}$ 使得 $\phi(\bar{r}) = \sum\limits_{x\in C} \mathrm{Res}_x(r_x\omega)$. 当 $r \in R(D)$ 时有 $\sum\limits_{x\in C} \mathrm{Res}_x(r_x\omega) = 0$.

只需证明 $\omega \in \Gamma(\Omega_{C/k} \otimes \mathcal{O}(-D))$. 若不然，则存在 x_0 使得 $(\mathrm{div}(\omega) - D)_{x_0} < 0$. 设 $m_{C,x_0} = (t), D = nx_0 + \cdots$, 则 $\omega|_{x_0} = ut^m dt, u(x_0) \neq 0, m < n$.

取 $r = (r_{x_0} = \frac{1}{t^{m+1}}, 0) \in R(D)$, 但 $\mathrm{Res}_{x_0}(r_{x_0}\omega) = u(x_0) \neq 0$, 矛盾! 故满射得证, 进而 Riemann-Roch 定理得证.