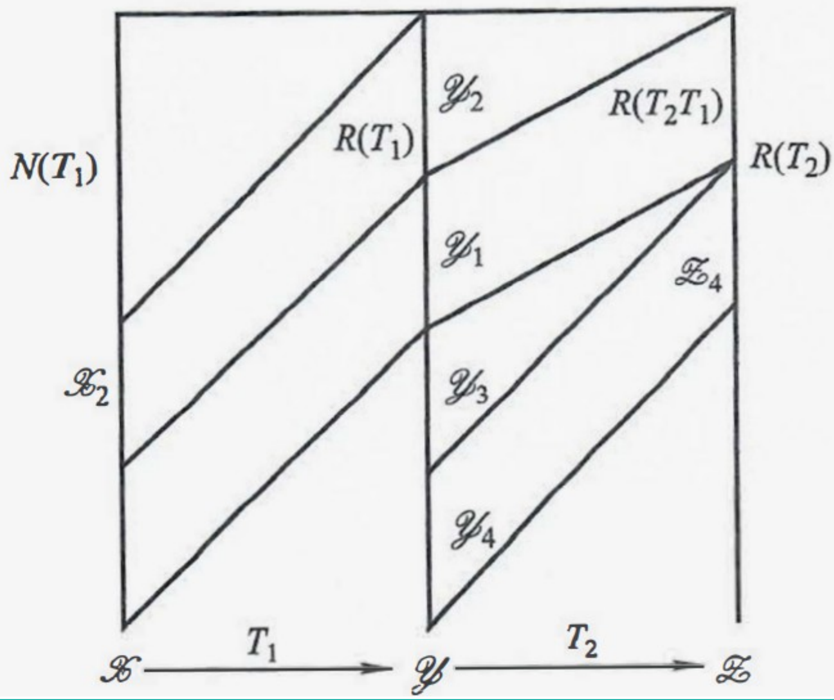

泛函分析 (H) 讲义

Author: 吕长乐

Institute: 中国科学技术大学

Date: 2025 年 7 月

本讲义由笔者在 *2024* 秋季听黄文老师的泛函分析 *(H)* 课程时的笔记整理而得

目录

Chapter 1 度量空间

1.1 压缩映射

先来研究映射的不动点，经典的找不动点的方法即为迭代序列法，即考虑点列 $x_{n+1} = f(x_n)$. 为了更好的讨论序列的收敛性，我们希望在完备空间中考虑问题，因为这样序列的收敛性可以用 Cauchy 列来刻画. 且为了让迭代序列收敛, 直观上希望 f 本身蕴含着某种收缩性质. 事实上有如下的定理.

Theorem 1.1 (Banach 不动点定理，压缩映射原理)

设 (X, ρ) 是完备度量空间.

若 $T : X \to X$ 是压缩映射，即满足 $\exists 0 < c < 1$, 使得 $\forall x, y \in X, \rho(Tx, Ty) \le c\rho(x, y)$. 则 T 有唯一的不动点.

♡

证明 存在性：任取 $x_0 \in X$, 则定义 $x_{n+1} = Tx_n (n \ge 0)$, 进而

$$\rho(x_{n+m}, x_n) = \rho(T^{n+m}x_0, T^n x_0) \le c^n \rho(T^m x_0, x_0) = c^n \rho(x_m, x_0).$$

则利用上式，有

$$\rho(x_{n+m}, x_n) \le \rho(x_{n+m}, x_{n+m-1} + \cdots + \rho(x_{n+1}, x_n) \le (c^{n+m-1} + \cdots + c^n)\rho(x_0, x_1) \le \frac{c^n}{1-c}\rho(x_0, x_1) \to 0.$$

进而 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列, 由完备性可知 $x_n \to x \in X$. 则 $Tx = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x$, 故 x 为不动点. 注意到第二个等号处我们利用了压缩映射的连续性.

唯一性：若 $Tx = x, Tx' = x'$，则 $\rho(x, x') = \rho(Tx, Tx') \le c\rho(x, x')$, 只能 $x = x'$. □

Example 1.1 考虑如下的 Cauchy 初值问题:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(0) = \xi \end{cases}$$

, 其中 $f : [-h, h] \times [\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon] \to \mathbb{R}$ 为二元连续函数，且关于第二个变元满足 Lipschitz 条件，即 $\exists L > 0, \text{s.t.} \forall s \in [-h, h], x, y \in [\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon], |f(s, x) - f(s, y)| \le L|x - y|$.

则取 $M = \sup |f|, h_1 < \min\{\frac{1}{L}, \frac{\varepsilon}{M}\}$, 我们利用压缩映射原理来说明 x 在 $[-h_1, h_1]$ 上有唯一解.

令 $X = \{y \in C[-h_1, h_1] : y(0) = \xi, |y(s) - \xi| < \varepsilon(\forall s \in [-h_1, h_1])\}$, 并赋予 $\|\cdot\|_\infty$ 诱导的度量，并定义

$$T : X \to X, y \mapsto \{Ty : t \mapsto \int_0^t f(s, y(s))ds + \xi\}.$$

由于 $\forall t \in [-h_1, h_1], |Ty(t) - \xi| \le h_1 M < \varepsilon$，故 T 良定. 同时有

$$|Ty_1(t) - Ty_2(t)| \le \int_0^t |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))|ds \le L\int_0^t (y_1(s) - y_2(s))dx \le Lh_1\|y_1 - y_2\|_\infty.$$

则 T 为压缩映射，又压缩映射原理有 T 有唯一的不动点，即原方程有唯一解.

1.2 完备化

Definition 1.1

$\phi:(X,\rho_X)\to(Y,\rho_Y)$ 称为 (X,ρ_X) 的**完备化**, 若 ϕ 等距，且 $\phi(X)$ 在 Y 中稠密，其中 (Y,ρ_Y) 为完备度量空间.

Example 1.2 考虑 $X=C[0,1]$, ρ_X 由 $\|\cdot\|_\infty$ 诱导, 则 (X,ρ_X) 完备：考虑 Cauchy 列 $\{f_n\}$, 则 $\{f_n(t)\}$ 也为 Cauchy 列，故 $f_n(t)\to f(t)(\forall 0\le t\le 1)$ 且为一致收敛，故 $f(t)$ 也是连续函数，

Example 1.3 仍然对 $X=C[0,1]$，赋予度量 $\rho_1(f,g)=\int_0^1|f(t)-g(t)|dt$,

定义 $f_n(t)=\begin{cases}1, & t\le\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\\ \frac{1}{2}-n(t-\frac{1}{2}), & \frac{1}{2}-\frac{1}{2n}<t\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\\ 0, & t>\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\end{cases}$. 可以验证 $\rho(f_n,f_m)\le\max\{\frac{1}{n},\frac{1}{m}\}\to 0$, 则 $\{f_n\}$ 为 Cauchy 列. 不难检验 $\{f_n\}$ 没有收敛子列，故 (X,ρ_1) 不完备!

可以证明 X 的完备化为 $(L^1[0,1],\rho_1)$.

Theorem 1.2

完备化存在，且在等距意义下唯一.

证明 唯一性：设有两个完备化 $\phi_i:(X,\rho_X)\to(Y_i,\rho_i)(i=1,2)$, 则定义 $\phi:\phi_1(X)\to\phi_2(X),\phi_1(x)\mapsto\phi_2(x)$. 则显然 ϕ 是等距的.

进一步 $\forall y_1\in Y_1$, 取 $\phi_1(x_n)\in\phi_1(X)$ 使得 $\phi_1(x_n)\to y_1$, 则此时

$$\rho_2(\phi_2(x_n),\phi_2(x_m))=\rho_1(\phi_1(x_n),\phi_1(x_m))\to 0.$$

由 (Y_2,ρ_2) 完备，则 $\phi_2(x_n)\to y_2\in Y_2$. 则扩充定义 $\phi(y_1)=y_2$.

(这是良定的：再取 $\phi_1(x_n')\to y_1$, 则令 $\{z_n\}=\{x_1,x_1',x_2,x_2'\cdots\}$, 仍然有 $\phi_1(z_n)\to y_1$, 由 ϕ_1 为等距有 $\{z_n\}$ 为 Cauchy 列，进而由 ϕ_2 等距有 $\phi_2(z_n)$ 为 Cauchy 列. 由 (Y_2,ρ_2) 完备有 $\lim\limits_{n\to\infty}\phi_2(z_n)$ 存在，进而只能 $\lim\limits_{n\to\infty}\phi_2(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\phi_2(x_n')$.)

则定义了 $\phi:Y_1\to Y_2$, 不难验证为等距，则为单射. 进一步任取 $w\in Y_2$, 取 $x_n\in X$ 使得 $\phi_2(x_n)\to w$. 由 ϕ_2 等距有 x_n 也为 Cauchy 列，由 $\phi_1(x_n)$ 为 Cauchy 列，则设 $u=\lim\limits_{n\to\infty}\phi_1(x_n)$, 有 $\phi(u)=w$. 故 ϕ 为满射，即 $\phi:Y_1\to Y_2$ 为等距同构.

存在性：定义 $\mathcal{F}=\{\{x_n\}为X中的\text{ Cauchy }列\}$, 并定义 $\{x_n\}\sim\{y_n\}\iff\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)\to 0$. 则定义 $Y={}^{\mathcal{F}}/_{\sim}$ 以及 Y 上的度量 $\rho_Y([\{x_n\}],[\{y_n\}])=\lim\limits_{n\to\infty}\rho_X(x_n,y_n)$（可以验证这是良定的度量）.

取映射 $\phi:X\to Y,x\mapsto[\{x,x,x,\cdots\}]$，我们断言这是 (X,ρ_X) 的完备化.

首先对任意 $\tilde{y}=[\{y_n\}]\in Y$，则 $\forall\varepsilon>0$, 由 $\{y_n\}$ 是 Cauchy 列，存在 $N>0$ 使得 $\forall i,j>$

$N, \rho_X(y_i, y_j) < \varepsilon$. 则任意 $n > N, \rho_X(y_N, y_n) < \varepsilon$.

由此定义 $\tilde{y}^{(n)} = \phi(y_N) \in Y$, 则 $\rho_Y(\tilde{y}^{(n)}, \tilde{y}) = \lim\limits_{k\to\infty} \rho_X(y_k, y_N) \le \varepsilon$. 故 $\phi(X)$ 在 Y 中稠密.

其次对 $\{\tilde{y}^{(k)}\}$ 为 Y 中的 Cauchy 列，其中 $\tilde{y}^{(k)} = [\{y_n^{(k)}\}]$, 则同上，存在 n_k 使得对 $\tilde{z}_k = \phi(y_{n_k}^{(k)})$, 有 $\rho_Y(\tilde{z}_k, \tilde{y}^{(k)}) < \frac{1}{2^k}$.

又 $\rho_Y(\tilde{y}^{(k)}, \tilde{y}^{(l)}) \to 0$, 则可以验证 $\rho_Y(\tilde{z}_k, \tilde{z}_y) \to 0$，进而 $\{y_{n_k}^{(k)}\}$ 为 Cauchy 列. 令 $\tilde{y} = [\{y_{n_k}^{(k)}\}] \in Y$, 则

$$\rho_Y(\tilde{y}^{(k)}, \tilde{y}) \le \rho_Y(\tilde{y}^{(k)}, \tilde{z}_k) + \rho_Y(\tilde{z}_k, \tilde{y}) \le \frac{1}{2^k} + \lim_{l\to\infty} \rho_X(y_{n_k}^{(k)}, y_{n_l}^{(l)}) \to 0.$$

进而 $\tilde{y}^{(k)} \to \tilde{y} \in Y$，故 (Y, ρ_Y) 完备. $\square$

1.3 列紧性

Definition 1.2

$A \subseteq (X,\rho)$ 称为 **(自) 列紧**的，若任意 A 中点列 $\{x_n\}$, 存在收敛子列 $x_{n_k} \to x \in (A)X$. ♣

Example 1.4 有界闭不能推出列紧，即使加上 X 完备的条件也不行. 例如 $X = C[0,1]$, 度量 ρ 由 $\|\cdot\|_\infty$ 诱导（之后如果不特别说明，则连续函数空间上均赋予最大模范数诱导的度量!）, 令 $A = \{f \in X : \|f\|_\infty \le 1\}$, 则 A 有界闭，但不列紧!

事实上，Arzela-Ascoli 定理说明了 $A \in (X,\rho)$ 列紧当且仅当 A 一致有界且等度连续. 故 $A_L^{(1)} = \{f \in C^1[0,1] : \|f\|_\infty \le 1, \|f'\|_\infty \le 1\}$ 列紧.

Definition 1.3

设 $A \subseteq (X,\rho)$ 是**完全有界**的，若 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $x_1, \cdots, x_L \in A$ 使得 $A \subseteq \cup_{1\le i\le L} B(x_i, \varepsilon)$. 此时称 $\{x_1, \cdots, x_L\}$ 称为一个 ε-网. ♣

完全有界和列紧性之间有紧密的关系.

Proposition 1.1

设 $A \subseteq (X,\rho)$ 完全有界，则 A 中任意点列必有 *Cauchy* 子列. 特别地若还有 X 完备，则 A 列紧. ♠

证明 设 $\{x_n\}$ 为 A 中的点列，则由完全有界存在 $y_1, \cdots, y_L \in A$ 使得 $\{x_n\} \subseteq \cup_{1\le i\le L} B(y_i, 1)$, 则由抽屉原理不妨有 $B(y_1, 1)$ 包含了 $\{x_n\}$ 的无穷项，设为子列 $\{x_n^{(1)}\}$.

以此类推存在 $y_k \in A$ 和 $\{x_n^{(k-1)}\}$ 的子列 $\{x_n^{(k)}\}$ 包含在 $B(y_k, \frac{1}{k})$ 中. 则考虑对角线构成的子列 $\{x_k^{(k)}\}$, 有

$$\rho(x_{n+p}^{(n+p)}, x_n^{(n)}) \le \rho(x_{n+p}^{(n+p)}, y_n) + \rho(x_n^{(n)}, y_n) \le \frac{2}{n} \to 0.$$

故子列 $\{x_k^{(k)}\}$ 为 Cauchy 列. □

Theorem 1.3 (Hausdorff)

(自) 列紧 $\Rightarrow$ (闭) 完全有界. ♡

证明 设 A 列紧，则 $\forall \varepsilon > 0, x_1 \in A$, 令 $A_1 = A - B(x, \varepsilon)$, 若 $A_1 = \emptyset$, 则直接停止. 否则再取 $x_2 \in A_1, A_2 = A_1 - B(x_2, \varepsilon) \cdots$, 以此类推.

证 A 完全有界只需证上述过程在有限步之后停止，若不然，则有点列 $\{x_n\}$ 且满足 $\forall i \ne j, \rho(x_i, x_j) \ge \varepsilon$, 则 $\{x_n\}$ 没有收敛子列，矛盾! □

Definition 1.4

一个拓扑空间称为**紧**的，若任意开覆盖均存在有限子覆盖，称为**可分**的，若它存在可数稠密子集.

Example 1.5 (1) 完全有界度量空间均可分.

(2) 若 M 紧度量空间，则 $(C(M), \|\cdot\|_\infty)$ 为完备可分度量空间 (证明见本节最后).

(3) 定义 $C_b(X)$ 为 X 上有界连续函数的集合，则 $C_b(\mathbb{R})$ 不可分！更进一步地，若 (X, ρ) 完备，则 X 紧 $\Longleftrightarrow$ X 完全有界 $\Longleftrightarrow$ $(C_b(X), \|\cdot\|_\infty)$ 可分. 证明见下.

Theorem 1.4

(1) 对度量空间 (X, ρ) 和 $A \subseteq X$, 则 A 紧 $\Longleftrightarrow$ 自列紧. 进而对完备度量空间 X, 有 X 紧等价于 X 完全有界.

(2) 对完备度量空间 (X, ρ)，若 $(C_b(X), \|\cdot\|_\infty)$ 可分，则 X 完全有界.

证明 (1) $\Rightarrow$: 先证 A 为闭集, 即证 $X-A$ 为开集. 任取 $x_0 \in X-A$, 由 A 紧, 对开覆盖 $\{B(x, \frac{1}{2}\rho(x, x_0))\}_{x\in A}$, 有有限子覆盖 $\{B(x_k, \frac{1}{2}\rho(x_k, x_0))\}_{x_k \in A, 1\le k\le n}$.

则令 $\delta = \min\limits_{1\le k\le n} \frac{1}{2}\rho(x_k, x_0)$，显然有 $B(x_0, \delta) \subseteq X - A$, 故 $X - A$ 为开集.

再证 A 列紧. 若 $\{x_n\} \subseteq A$ 没有收敛子列，不妨 x_n 之间两两不同，则定义 $S_n = \{x_1, \cdots, \hat{x_n}, \cdots\}$, 它没有收敛子列, 进而为闭集. 故 $\{X - S_n\}_{n=1,2,\cdots}$ 为 A 的开覆盖, 则存在 N 使得 $\cup_{1\le n\le N}(X - S_n) \supseteq A$, 进而 $X - \{x_n\}_{n=N+1}^{\infty} \supseteq A$, 矛盾!

$\Leftarrow$: 若 A 不紧, 则设开覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$ 没有有限子覆盖. 又由 Hausdorff 定理, 存在 $N_n = \{x_1^{(n)}, \cdots, x_{k_n}^{(n)}\}$ 使得 $A \subseteq \cup_{y\in N_n} B(y, \frac{1}{n})$. 则存在 $y_n \in N_n$ 使得 $B(y_n, \frac{1}{n})$ 不能被有限覆盖.

又由 A 自列紧，设有子列 $y_{n_k} \to y_0 \in U_{i_0}$, 则由 U_{i_0} 为开集，存在 $B(y_0, \delta) \subseteq U_{i_0}$. 进一步取 k 充分大使得 $n_k > \frac{2}{\delta}$ 且 $\rho(y_{n_k}, y_0) < \frac{\delta}{2}$, 则

$$\rho(x, y_0) \le \rho(x, y_{n_k}) + \rho(y_{n_k}, y_0) \le \frac{1}{n_k} + \frac{\delta}{2} < \delta, \forall x \in B(y_{n_k}, \frac{1}{n_k}).$$

即 $B(y_k, \frac{1}{n_k}) \subseteq U_{i_0}$. 矛盾!

(2) 若 X 不完全有界，则存在无穷点列 $\{x_n\}$ 和 $\varepsilon > 0$ 使得 $\rho(x_i, x_j) \ge \varepsilon (\forall i \ne j)$.

定义 $f_i(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\rho(x, x_i)}{\varepsilon} & x \in B(x_i, \varepsilon) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$, 并对任意 $s \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, 定义 $f_s(x) = \sum_i s(i) f_i(x)$.

则 $\forall s_1 \ne s_2$，有 $\|f_{s_1} - f_{s_2}\|_\infty = 1$, 进而 $(C_b(X), \|\cdot\|_\infty)$ 不可分. 矛盾! □

最后给出 Arzela-Ascoli 定理的一个推广.

Theorem 1.5 (Arzela-Ascoli)

M 为紧度量空间，则 $\mathcal{F} \subseteq C(M)$ 列紧 $\iff \mathcal{F}$ 一致有界且等度连续.

证明 由于 $C(M)$ 完备，故列紧等价于完全有界.

$\Rightarrow$: $\mathcal{F}$ 完全有界, 则取 $f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{F}$ 为 $\mathcal{F}$ 的 1-网, 进而任意 $f \in \mathcal{F}$, 有 $\|f\|_\infty \le \max\limits_{1\le i\le n} \|f_i\| + 1$, 故一致有界.

再对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\phi_1, \cdots, \phi_n$ 为 $\frac{\varepsilon}{3}$-网. 由于 M 紧, 则 ϕ_i 一致连续, 取 $\delta_i > 0$ 使得任意 $\rho(x, x') < \delta$, 有 $|\phi_i(x) - \phi_i(x')| \le \frac{\varepsilon}{3}$.

取 $\delta = \min\limits_{1\le i\le n} \delta_i$，则 $\forall \phi \in \mathcal{F}$, 取 ϕ_i 使得 $\|\phi - \phi_i\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$. 故任意 $\rho(x, x') < \delta$, 有

$$|\phi(x) - \phi(x')| \le |\phi(x) - \phi_i(x)| + |\phi_i(x) - \phi_i(x')| + |\phi_i(x') - \phi(x')| < \varepsilon.$$

则 $\mathcal{F}$ 等度连续.

$\Leftarrow$: 设有一致的界 L. $\forall \varepsilon > 0$，要找 $\mathcal{F}$ 中的 ε-网.

由等度连续，存在 $\delta > 0$, 使得 $\forall \rho(x, x') < \delta, \phi \in \mathcal{F}$, 有 $|\phi(x) - \phi(x')| < \frac{\varepsilon}{3}$. 由于 M 紧，则完全有界，取 M 的 δ-网 $x_1, \cdots, x_n$.

定义 $T : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^n, \phi \mapsto (\phi(x_1), \cdots, \phi(x_n))$, 则 $T(F) \subseteq \mathbb{R}^n$ 有界，进而列紧，完全有界，故取 $T(F)$ 的 $\frac{\varepsilon}{3}$-网 $T\phi_1, \cdots, T\phi_m$.

我们断言 $\phi_1, \cdots, \phi_m$ 为 $\mathcal{F}$ 的 ε-网，这样有 $\mathcal{F}$ 完全有界，进而得证. 下面证明断言:

$\forall \phi \in F$, 取 ϕ_i 使得 $\rho(T\phi, T\phi_i) < \frac{\varepsilon}{3}$, 再对任意 $x \in M$, 取 x_j 使得 $\rho(x, x_j)$, 则有

$$|\phi(x) - \phi_i(x)| \le |\phi(x) - \phi(x_j)| + |\phi(x_j) - \phi_i(x_j)| + |\phi_i(x_j) + \phi_i(x)| < \varepsilon.$$

则 $\|\phi - \phi_i\|_\infty < \varepsilon$, 得证. $\square$

1.4 赋范线性空间

回忆范数满足正定、齐次和三角不等式三个条件，对于一个范数 $\|\cdot\|$，可以诱导一个度量 $\rho(x,y)=\|x-y\|$. 但一个度量不一定能诱导出一个范数：不难发现范数诱导的度量满足平移不变性和数乘连续性.

Definition 1.5

一个范数是**完备**的，若它诱导的度量完备. 称赋范线性空间为 B^* 空间，如果还完备，称为 ***Banach* 空间**，简写为 B 空间. ♣

Example 1.6 $(C[0,1],\|\cdot\|_\infty)$ 是 Banach 空间，$(C[0,1],\|\cdot\|_1)$ 不是 Banach 空间.

Definition 1.6

对同一个空间上的两个范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_1$，称 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ **强**，若 $\|x_n\|_2\to 0$ 可以推出 $\|x_n\|_1\to 0$. 若 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 互相比对方强，则称这两个范数**等价**. ♣

Remark $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强 $\iff$ 存在 $C>0$ 使得 $\|\cdot\|_1\le C\|\cdot\|_2$.

进而 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 等价当且仅当存在 $C_1,C_2>0$ 使得 $C_1\|\cdot\|_1\le\|\cdot\|_1\le C_2\|\cdot\|_2$

Theorem 1.6

有限维线性空间（底域为 $K=\mathbb{R}或\mathbb{C}$）上的范数都等价. ♡

证明 固定 X 上的一个范数 $\|\cdot\|$，设 X 的一组基为 $(x_1,\cdots,x_d)$，则定义

$$T:X\to K^d, x=\sum_{i=1}^d x_i\lambda_i\mapsto(\lambda_1,\cdots,\lambda_d).$$

定义 $\|x\|_T=\|Tx\|_2=\sqrt{\lambda_1^2+\cdots+\lambda_d^2}$. 只需证存在 $C_1,C_2>0$，使得 $\forall x\in X, C_2\|x\|_T\le\|x\|\le C_1\|x\|_T$.

取 $C_1=\sup\limits_{x\neq 0}\frac{\|x\|}{\|x\|_T}, C_2=\inf\limits_{x\neq 0}\frac{\|x\|}{\|x\|_T}$，只需证 $0<C_2\le C_1<\infty$. 则设 $x=\sum\limits_{i=1}^d\lambda_i x_i$，有

$$\frac{\|x\|}{\|x\|_T}=\|\sum_{i=1}^d\eta_i x_i\|, \eta_i=\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_1^2+\cdots+\lambda_d^2}}.$$

注意到 $\eta^1+\cdots+\eta^d=1$，则定义 $\phi(\eta)=\|\sum\limits_{i=1}^d\eta_i x_i\|$. 则 $C_1=\sup\limits_{\|\eta\|=1}\phi(\eta), C_2=\inf\limits_{\|\eta\|=1}\phi(\eta)$.

又由 Cauchy 不等式，$|\phi(\eta)-\phi(\eta')|\le\sum\limits_{i=1}^d|\eta_i-\eta_i'|\|x_i\|\le\|\eta-\eta'\|\sqrt{\sum\limits_{i=1}^d\|x_i\|^2}$，则 $\phi(\eta)$ 为连续函数，故由 $\{\eta\in K^d:\|\eta\|_2=1\}$ 为紧集得证. □

Remark 后面将会证明闭图像定理，它说明若两个完备范数有强弱关系，则它们等价.

Definition 1.7

线性空间 X 上的**准范数** $\|\cdot\|$ 满足如下条件:

(1) 正定: $\|x\| \geq 0$, 且 $\|x\| \geq 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

(2) 对称: $\|x\| = \|-x\|$.

(3) 三角不等式: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

准范数同样可以诱导度量 $\rho(x,y) = \|x-y\|$, 称准范数完备若该度量完备. 称赋予了准范数线性空间为 F^* 空间, 若还完备, 则称为 ***Frechet*** 空间, 简记为 F 空间.

Example 1.7 X 为所有实数列构成的空间 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, 则对 $x = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, 定义 $\|x\| = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i|}{2^i(1+|x_i|)}$, 可以验证 $(X, \|\cdot\|)$ 为 Frechet 空间.

定义 $l_\infty = \{x : \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} |x_i| < \infty\}$, 则 $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ 中的单位球 $I = [-1,1]^{\mathbb{N}}$ 关于准范数 $\|\cdot\|$ 自列紧, 但关于 $\|\cdot\|_\infty$ 不列紧!

上面例子中的 I 也被称为 Hilbert 方体, 下面的命题说明它在准范数下是紧度量空间的“万有”模型空间.

Proposition 1.2

任意紧度量空间 (X, ρ_X) 可以嵌入到 $(I, \|\cdot\|)$ 中, 即同胚于 $(I, \|\cdot\|)$ 的子空间.

证明 X 紧, 则可分, 进而取可数稠密子集 $y_1, y_2, \cdots$. 定义

$$\phi : X \to I, x \mapsto (\frac{\rho_X(x,y_i)}{1+\rho_X(x,y_i)})_{i=1}^{\infty}.$$

可以验证它是一个连续单射, 且由于 X 自列紧, 有 $\phi(X)$ 也自列紧, 进而为 I 的闭子空间. □

则我们可以通过将任意紧度量空间拉到 I 中来处理, 下面是一个例子.

Proposition 1.3

(1) $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$ 为可分空间。

(2) 任意紧度量空间 X, $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ 可分.

证明 (1) 利用截断转化为有限维上的问题.

(2) 设 X 同胚于 $\phi(X)$ 为 I 的闭子空间, 则只需证 $(C(\phi(X)), \|\cdot\|_\infty)$ 可分. 由于 $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$ 可分, 取其可数稠密子集 $\{f_n\}_{n\geq 1}$.

令 $g_n = f_n|_{\phi(X)}$, 则任意 $g \in C(\phi(X))$, 由 Tietze 延拓定理, 存在 $\tilde{g} \in C(I)$ 使得 $\tilde{g}|_{\phi(X)} = g$. 任意 $\varepsilon > 0$, 则存在 n 使得 $\|\tilde{g} - f_n\| < \varepsilon$, 进而 $\|g - g_n\| < \varepsilon$. 则 $g_1, \cdots, g_n$ 为 $C(\phi(X))$ 的可数稠密子集. □

Remark 还有一种“万有”紧度量空间, 即 Cantor 三分集 $C_{\frac{1}{3}}$, 可以证明任意紧度量空间 X, 存在连续满射 $\phi : C_{\frac{1}{3}} \to X$, 即 X 为 Cantor 集的连续像.

下面我们来利用范数刻画有限维空间.

Theorem 1.7

若 X 为 B^* 空间，则下列等价

(1) $\dim X < \infty$.

(2) $S(X) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ 自列紧.

(3) X 中任意有界集均列紧.

(4) X 中任何有界点列都有收敛子列.

证明 (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (2) 是显然的，则只需证 (1) $\Rightarrow$ (3), (2) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (3) : 设 $d = \dim_X$, 则存在线性空间同构 $T : X \to \mathbb{R}^d$, 定义 $\|x\|_T = \|Tx\|_2$, 类似定理 1.6 的证明可以验证 $\|x\|_T$ 和 $\|x\|$ 等价.

进而 $U \subseteq (X, \|\cdot\|)$ 有界 $\Longleftrightarrow$ $T(U) \subseteq (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$ 有界 $\Longleftrightarrow$ $T(U) \subseteq (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$ 列紧 $\Longleftrightarrow$ $U \subseteq (X, \|\cdot\|_T)$ 列紧 $\Longleftrightarrow$ $U \subseteq (X, \|\cdot\|)$ 列紧.

(2) $\Rightarrow$ (1) : 若 $\dim_X = \infty$, 则任取 $x_1 \in S(X)$, 令 $E_1 = \mathrm{span}(x_1) \subsetneq X$, 取 $y_2 \in X - E_1$, 记 $d_2 = \|y_2 - E_1\| = \inf\limits_{x \in E_1} \|y_2 - x\|$.

由下面将要证明的命题 1.4，存在 $z \in E_1$ 使得 $\|y_2 - z_2\| = d_2$. 则令 $x_2 = \frac{y_2 - z_2}{\|y_2 - z_2\|} \notin E_1$, 且 $x_2 \in S(X)$. 同时有

$$\|x_2 - x_1\| = \|\frac{y_2 - z_2}{d_1} - x_1\| = \frac{1}{d_1}\|y_2 - (z_2 + d_2 x_1)\| \geq 1.$$

最后一步使用了 $z_2 + d_2 x_1 \in E_1$, 故由 $\dim X = \infty$, 可以一直进行下去得到无穷集 $\{x_1, x_2, \cdots\} \subseteq S(X)$, 且满足 $\forall i \neq j, \|x_i - x_j\| \geq 1$, 则与 $S(X)$ 自列紧矛盾! □

则只需要补充说明上面所用到的所谓“最佳逼近元”的存在性.

Proposition 1.4 (最佳逼近元)

设 X 为 B^* 空间，且 $X_0 \subseteq X$ 为有限维子空间，则 $\forall y \in X$, 存在 $x \in X_0$ 使得

$$\|y - x\| = \inf_{z \in X_0} \|y - z\| = \|y - X_0\|$$

.

证明 $\forall y \in X$, 定义 $\phi(x) = \|y - x\|$ 为连续函数，且 $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} \phi(x) = +\infty$, 进而存在 $R > 0$ 使得 $\inf\limits_{x \in X_0} \phi(x) = \inf\limits_{x \in \overline{B(x_0, R)}} \phi(x)$.

由 $\overline{B(x_0, R)}$ 为紧集，存在 $x_0 \in \overline{B(x_0, R)}$ 使得 $\phi(x_0) = \inf\limits_{x \in \overline{B(x_0, R)}} \phi(x) = \inf\limits_{x \in X_0} \phi(x)$. □

在此基础上我们会问上面的最佳逼近元是否唯一? 一般情形下是没有的!

Example 1.8 考虑 $X = \mathbb{R}^2$, 赋予范数 $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2\}$. 记 $a = (0, 1), e_1 = (1, 0)$, 则令 $X_0 = \mathbb{R}e_1$, 可以验证 $te_1 \in X_0(\forall -1 \leq t \leq 1)$ 均为 a 在 X_0 上的最佳逼近元!

则唯一性需要我们对空间加上额外的条件.

Definition 1.8

B^* 空间 X 是**严格凸**的，若 $\forall x \neq y \in X, t \in (0,1)$, 且有 $\|x\| = \|y\| = 1$, 则有 $\|tx + (1-t)y\| < 1$.

Example 1.9 (1) $C[0,1], L^1[0,1]$ 均不是严格凸的，其中均赋予对应空间上典范范数.

(2) $L^p[0,1](1 < p < \infty)$ 是严格凸的.

Proposition 1.5

若 X 为严格凸空间，$X_0 \subseteq X$ 为有限维子空间，则 $\forall y \in X$, X_0 上的关于 y 的最佳逼近元唯一.

证明 若 $x_0, x_0' \in X_0$ 为最佳逼近元，则记 $d = \|y - x_0\| = \|y - x_0'\|$. 若 $d = 0$ 则 $x_0 = x_0' = y$. 进而不妨设 $d \neq 0$.

此时若 $x_0 \neq x_0'$, 有 $\|\frac{y-x_0}{d}\| = \|\frac{y-x_0'}{d}\| = 1$, 则由严格凸，有

$$\|t\frac{y-x_0}{d} + (1-t)\frac{y-x_0'}{d}\| = \|\frac{y-(tx_0+(1-t)x_0')}{d}\| < 1.$$

与 $tx_0 + (1-t)x_0' \in X_0$ 以及 d 的定义矛盾! □

对于无穷维子空间，未必有最佳逼近元，但有如下的有用的 Riesz 引理.

Lemma 1.1 (Riesz 引理)

X 为 B^* 空间，X_0 为真闭子空间，则 $\forall 0 < \varepsilon < 1, \exists y \in X$, 使得 $\|y\| = 1, \|y - x\| \geq 1 - \varepsilon (\forall x \in X_0)$.

证明 $\forall \varepsilon > 0, y_0 \in X - X_0$, 设 $d = \inf_{x \in X_0} \|y_0 - x\| > 0$（这里用到了 X_0 的闭性）. 则 $\forall \eta > 0, \exists x_0 \in X_0$ 使得 $d \leq \|y_0 - x_0\| < d + \eta$.

令 $y = \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|}$, 有 $\|y\| = 1$, 且

$$\|y - x\| = \frac{\|y_0 - (x_0 + x\|x_0 - y_0\|)\|}{\|y_0 - x_0\|} > \frac{d}{d+\eta}, \forall x \in X_0.$$

则取 $\eta = \frac{d\varepsilon}{1-\varepsilon}$ 即可. □

1.5 凸集与不动点

我们用两个问题来引入本节.

先来看一个实分析中的问题. 设 $\{\mu_i\}_{i\in I}$ 为 X 上的一族概率测度，则定义

$$T:C(X)\to\mathbb{R}, f\mapsto \sup_{i\in I}|\int fd\mu_i|.$$

则 T 满足正齐次性、次可加性和非负性. 是否存在概率测度 μ 使得 $T=\int\cdot d\mu$?

Riesz 表示定理指出：若 $C(X)$ 上的算子 T 满足齐次性、可加性和非负性，则存在 Borel 代数 $(X,\mathcal{B}_X)$ 上的概率测度使得 $T=\int\cdot d\mu$.

这个问题启发我们进行如下定义.

Definition 1.9

对 Banach 空间 X, 一个泛函 $p:X\to\mathbb{R}$, 若 p 满足

(1) 正齐次性: $\forall\lambda>0, x\in X$, 有 $p(\lambda x)=\lambda p(x)$.

(2) 次可加性: $\forall x,y\in X$, 有 $p(x+y)\le p(x)+p(y)$.

*则称 p 为**次线性泛函**. 若 p 此外还满足非负性: $p(x)\ge 0(\forall x\in X)$, 且将正齐次性改为齐次性: $\forall\alpha\in K, x\in X$，有 $p(\alpha x)=|\alpha|p(x)$, 则称 p 为**半模**.*

♣

再来考虑这样的一个问题：一个集合能否成为某个范数的单位球？首先注意到单位球应当为有界闭的凸集，且包含 0 作为内点. 但反之满足上面这些条件的集合不一定能成为某个范数的单位球!

判断单位球的问题是复杂的, 我们可以来考虑弱化的问题: 对 $\mathbb{R}^d$ 中的集合 U, 是否存在 $p_U:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 使得 $U=p_U^{-1}(1)$?

则我们应当要求

(1) p_U 为半模.

(2) $\exists C_1,C_2$ 使得 $C_1\|x\|_2\le p_U(x)\le C_2\|x\|_2$(可以验证在有限维的时候这等价于正定性！)

事实上可以证明：若 X 为有限维 Banach 空间，则存在 p 满足 (1)(2). 我们来引入 Minkowski 泛函来解决这个问题.

Definition 1.10

对 X 为线性空间，$C\subseteq X$ 凸集，且 $0\in C$, 则定义

$$p_C(x)=\inf\{\lambda>0:\frac{x}{\lambda}\in C\}\in[0,\infty]$$

*为 C 的 **Minkowski** 泛函.*

♣

则有以下的基本性质.

Proposition 1.6

(1) 若 $\frac{x}{\lambda}\in C$, 则 $\forall\lambda'>\lambda$, 有 $\frac{x}{\lambda'}\in C$.

(2) 若 C 闭且 $0<p_C(x)<\infty$, 则 $\frac{x}{p_C(x)}\in C$.

(3) 若 $0\in\mathrm{Int}(C)$, 则 $p_C(x)<\infty,\forall x\in X$.

(4) 次可加性：$p_C(x+y)\le p_C(x)+p_C(y),\forall x,y\in X$.

(5) 正齐次性：$\forall\lambda>0,x\in X$, 有 $p_C(\lambda x)=\lambda p_C(x)$.

(6) 正定性：若 C 有界，则 $\forall x\neq 0$, 有 $p_C(x)>0$.

(7) 若 C 闭凸集，则 $C=\{x\in X:p_C(x)\le 1\}$.

(8) 若 C 闭凸集，则 $p_C(x)$ 下半连续.

证明 (1) 取 $t=1-\frac{\lambda}{\lambda'}$, 则由凸性 $(1-t)\frac{x}{\lambda}+t\cdot 0\in C$, 即 $\frac{x}{\lambda'}\in C$.

(2) 取 $\lambda_n>p_C(x)$ 且 $\lambda_n\to p_C(x)$, 则由 (1), $\frac{x}{\lambda_n}\in C$, 进而有子列 $\frac{x}{\lambda_{n_k}}\to\frac{x}{p_C(x)}$, 由闭集 $\frac{x}{p_C(x)}\in C$.

(3) 设 $B(0,r)\subseteq C$, 则 $\forall x\neq 0\in X$, $\frac{r}{2}\cdot\frac{x}{\|x\|}\in B(0,r)\subseteq C$, 故 $p_C(x)\le\frac{2\|x\|}{r}<\infty$.

(4) 不妨设 $p(x),p(y)$ 均不为无穷，则 $\forall\varepsilon>0$，令 $\lambda_1=p_C(x)+\frac{\varepsilon}{2},\lambda_2=p_C(y)+\frac{\varepsilon}{2}$, 有 $\frac{x}{\lambda_1},\frac{y}{\lambda_2}\in C$.

由凸性 $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\frac{x}{\lambda_1}+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\frac{y}{\lambda_2}=\frac{x+y}{\lambda_1+\lambda_2}\in C$, 进而 $p_C(x+y)\le\lambda_1+\lambda_2=p_C(x)+p_C(y)+\varepsilon$, 令 $\varepsilon\to 0$ 即得.

(5) 显然.

(6) 设 $C\subseteq B(0,R)$, 则 $\forall x\neq 0$, 有 $\frac{x}{\|x\|}\cdot 2R\notin C$, 故 $p_C(x)>\frac{\|x\|}{2R}>0$.

(7) 若 $x\in C$, 则 $\frac{x}{1}\in C$, 即 $p_C(x)\le 1$. 反之若 $p_C(x)\le 1$，如果 $p_C(x)=0$, 则存在 $\lambda<1$ 使得 $\frac{x}{\lambda}\in C$, 由 (1) 有 $x\in C$. 如果 $p_C(x)\neq 0$, 则由 (2)$\frac{x}{p_C(x)}\in C$, 仍然由 (1) 有 $x\in C$.

(8) 等价于 $\forall a>0,\{x\in X:p_C(x)\le a\}=a\{x\in X:p_C(x)\le 1\}$ 为闭集，由 (7) 即等价于 aC 为闭集，这显然成立. □

进而在 C 是有界闭凸集时，我们得到了一个正定的次线性泛函 p_C，且满足 $C=p_C^{-1}([0,1])$. 则根据之前作出的观察，存在 $c_1,c_2>0$ 使得 $c_1\|x\|\le p_C(x)\le c_2\|x\|(\forall x\in X)$. 这可以帮助我们证明如下的引理.

Lemma 1.2

若 $C\subseteq\mathbb{R}^n$ 为紧凸子集，则存在 $m\le n$ 使得 C 同胚于 $\mathbb{R}^m$ 中的单位球 B^m.

证明 不妨设 C 不为单点集且 $0\in C$, 并设 $E=\mathrm{span}(C)$ 为线性子流形, 其维数为 $m\le n$, 则取 $e_1,\cdots,e_m\in C$ 线性无关，并令 $e_0=\frac{1}{m+1}(0+e_1+\cdots+e_m)$, 则 $E-e_0$ 为线性子空间，且其上可以自然定义范数

$$\|y-e_0\|=\sqrt{\sum_{i=1}^m\mu_i^2},y=e_0+\sum_{i=1}^m\mu_i(e_i-e_0).$$

进一步地由于

$$\begin{aligned}y &= \sum_{i=1}^{m}\mu_i e_i + (1-\sum_{i=1}^{m}\mu_i)e_0\\ &= \sum_{i=1}^{m}[\mu_i + \frac{1}{m+1}(1-\sum_{j=1}^{m}\mu_j)]e_i + \frac{1}{m+1}\sum_{j=1}^{m}\mu_j\cdot 0\end{aligned}$$

进而当 μ_i 足够小时，y 为 $0, e_1, \cdots, e_m$ 的凸线性组合，则由 C 为凸集有 $y \in C$. 进而当 $\|y-e_0\|$ 足够小时，$y \in C$, 即 $e_0 \in \mathrm{Int}(C)$.

则通过平移 e_0 不妨设 $C \subseteq E \subseteq \mathbb{R}^m$ 且 $0 \in \mathrm{Int}(C)$. 则令 $P(x) = p_C(x)$ 为 Minkowski 泛函，存在常数 c_1, c_2 使得 $c_1\|x\| \le P(x) \le c_2\|x\|(\forall x \in E)$. 则对 B^m 为 E 中的单位球，定义 $\phi(z): B^m \to C$, 其中

$$\phi(z) = \begin{cases} 0 & z = 0 \\ \frac{\|z\|z}{P(z)} & z \neq 0 \end{cases}$$

此时 $\phi(z)$ 为想要的同胚. □

这个引理的直接应用是如下的 Schauder 不动点定理.

Theorem 1.8 (Schauder 不动点)

设 X 为 B 空间，C 为闭凸子集，若 $T: C \to C$ 连续，且 $T(C)$ 列紧，则 T 有不动点. ♡

证明 由 Hausdorff 定理, $T(C)$ 完全有界, 则取 $\frac{1}{n}$-网 $C_n' = \{x_1^n, \cdots, x_{k_n}^n\}$, 并定义 $E_n = \mathrm{span}(C_n'), C_n = \mathrm{co}(C_n')$ 为 C_n' 的凸包. 考虑如下的图表

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "T"] \arrow[d, "T_n = I_n \circ T"'] & T(C_n) \arrow[r, hook, "\mathrm{inc}"] & T(C) \arrow[dll, dashed, "I_n"] \\ C_n & & \end{tikzcd}$$

其中 I_n 连续且满足 $\|I_n(y) - y\| < \frac{1}{n}(\forall y \in T(C))$.

又由于 C_n 为 E_n 中的紧凸子集，则由引理 1.2，存在到从 C_n 到 B^m 的同胚，进而由 Brouwer 不动点定理和不动点性质的同胚不变性，存在 $x_n \in C_n$ 使得 $T_n x_n = x_n$.

利用 $T(C)$ 列紧，存在 $\{Tx_n\}$ 的子列 $Tx_{n_k} \to x$, 又

$$\|x_{n_k} - x\| = \|T_{n_k}x_{n_k} - x\| \le \|I_{n_k}(Tx_{n_k}) - Tx_{n_k}\| + \|Tx_{n_k} - x\| \le \frac{1}{n_k} + \|Tx_{n_k} - x\| \to 0.$$

有 $x_{n_k} \to x$, 则 $Tx = \lim\limits_{k\to\infty} Tx_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$, 则找到了想要的不动点.

最后只需要找到满足条件的 I_n. 对任意 $1 \le i \le k_n, x \in T(C)$, 定义

$$f_i(x) = \begin{cases} 1 - n\|x_i^n - x\| & x \in B(x_i^n, \frac{1}{n}) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

再令 $\lambda_i(x) = \frac{f_i(x)}{\sum\limits_{i=1}^{k_n} f_i(x)}, I_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{k_n}\lambda_i(x)x_i^n$.

首先由所有的 $\frac{1}{n}$-球覆盖了 $T(C)$ 可知中间出现的分母非零，且

$$\|I_n x - x\| \le \sum_{i=1}^{k_n} \lambda_i(x)\|x_i^n - x\| \le \sum_{i=1}^{k_n} \lambda_i(x) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}.$$

注意到我们使用了 $\sum\limits_{i=1}^{k_n} \lambda_i(x) = 1$. 则 I_n 为所求. □

最后仍然用解方程的例子来给出不动点定理的应用.

Example 1.10 仍然考虑 Cauchy 初值问题

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(0) = \xi \end{cases}$$

, 其中 $f : [-h, h] \times [\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon] \to \mathbb{R}$ 为二元连续函数（不再有 Lipschitz 条件!）.

则取 $M = \sup |f|$, 并令 $h_1 < \frac{\varepsilon}{M}$.

定义 $X = C[-h_1, h_1]$, 记 $C = \{x \in X : |x(t) - \xi| \le \varepsilon, \forall t \in [-h_1, h_1]\}$ 为闭凸子集. 则对 $T : X \to X, x \mapsto Tx(t) = \int_0^t f(s, x(s))ds + \xi$, 则由 h_1 的选取有 $T(C) \subseteq C$, 且 T 连续.

显然 $T(C)$ 一致有界 $\xi h_1 + M$, 且由于

$$|Tu(t) - Tu(t')| \le \int_t^{t'} |f(s, u(s))|ds \le M|t - t'|.$$

由 $T(C)$ 等度连续，则由 Arzela-Ascoli 定理，有 $T(C)$ 列紧，则由 Schauder 不动点定理，T 有不动点，即问题有解.

注意到 Schauder 不动点定理的设定下不动点不一定具有唯一性，故上面方程的解也不一定唯一.

1.6 Hilbert 空间

首先回忆内积是满足对称性和正定性的共轭双线性函数. 对内积 $(\cdot,\cdot)$, 可以诱导范数 $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$. 但范数不一定诱导内积. 事实上，B^* 空间能够成为内积空间当且仅当其上的范数满足所谓的平行四边形法则. 此外不难验证内积空间诱导的范数是严格凸的. 我们称完备的内积空间为 Hilbert 空间, 简记为 H 空间.

与欧氏空间一样地，可以在内积空间中定义正交集、正交规范集（即元素互相正交且模长为 1 的集合)、以及完备正交集 (即满足 $S^{\perp}=\{0\}$ 的集合). 利用集合论中的 Zorn 引理也可以证明非空内积空间必然有完备正交集.

Theorem 1.9 (Bessel 不等式)

设 $(X,(\cdot,\cdot))$ 为内积空间，$S=\{e_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 为正交规范集，则

$$\sum_{\alpha\in\Lambda}|(x,e_\alpha)|^2\le\|x\|^2$$

.

证明 固定 $x\in X$. 首先任取 Λ 的有限子集，不妨记为 $\{1,\cdots,m\}$, 则

$$0\le\|x-\sum_{k=1}^{m}(x,e_k)e_k\|^2=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{m}(x,e_k)^2.$$

进而 $\forall n$, 满足 $|(x,e_\alpha)|>\frac{1}{n}$ 的 $\alpha\in\Lambda$ 至多有限，则 $(x,e_\alpha)\neq0$ 的 α 至多可数，则原式左边的求和为可数求和, 不妨 $\Lambda=\mathbb{N}$. 再用上面的 $\|x\|^2\le\sum\limits_{k=1}^{m}(x,e_k)^2$, 令 $m\to\infty$ 即可. □

Corollary 1.1

X 为 *Hilbert* 空间, $S=\{e_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 为正交规范集, 则 $\forall x\in X$, 有 $\sum\limits_{\alpha\in\Lambda}(x,e_\alpha)e_\alpha\in X$, 进而有

$$\|x-\sum_{\alpha\in\Lambda}(x,e_\alpha)e_\alpha\|^2=\|x\|^2-\sum_{\alpha\in\Lambda}|(x,e_\alpha)|^2$$

.

证明 由上面定理的证明不妨 $\sum\limits_{\alpha\in\Lambda}(x,e_\alpha)e_\alpha=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2$ 收敛.

则 $\sum\limits_{n=m}^{m+p}|(x,e_n)|^2\to0$, 进而 $\{x_m=\sum\limits_{n=1}^{m}(x,e_n)e_n\}$ 为 Cauchy 列，由完备性它收敛到 $x'\in X$, 即 $\sum\limits_{\alpha\in\Lambda}(x,e_\alpha)e_\alpha\in X$. □

Definition 1.11

X 为 *Hilbert* 空间, $S=\{e_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 为正交规范集, 若 $\forall x\in X$, 有 $x=\sum\limits_{\alpha\in\Lambda}(x,e_\alpha)e_\alpha$，则称 S 为 **正交规范基**.

下面给出 Hilbert 空间中规范正交基的等价刻画.

Theorem 1.10

X 为 Hilbert 空间，$S=\{e_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 为正交规范集, 则下列命题等价:

(1) S 为规范正交基.

(2) S 为完备集.

(3) 有 Parseval 恒等式：$\forall x\in X$, 有 $\|x\|^2=\sum\limits_{\alpha\in\Lambda}|(x,e_\alpha)|^2$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) : 若 S 不完备，则设 $x\in X-\{0\}$ 使得 $(x,e_\alpha)=0(\forall\alpha\in\Lambda$, 则 $x=\sum\limits_{\alpha\in\Lambda}(x,e_\alpha)e_\alpha=0$, 矛盾!

(2) $\Rightarrow$ (3) : 若 x 不满足 Parseval 恒等式, 则由上面推论，有

$$\|x-\sum_{\alpha\in\Lambda}(x,e_\alpha)e_\alpha\|^2=\|x\|^2-\sum_{\alpha\in\Lambda}|(x,e_\alpha)|^2>0.$$

令 $y=x-\sum\limits_{\alpha\in\Lambda}(x,e_\alpha)e_\alpha$, 则 $y\in S^\perp$ 且 y 非零，矛盾!

(3) $\Rightarrow$ (1) : 显然. □

Example 1.11 $S=\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}:n\in\mathbb{Z}\}$ 为 $L^2[0,1]$ 的规范正交基.

Example 1.12 $S=\{e_n:n\geq 1\}$ 为 $l^2=\{(x_1,\cdots,x_n):\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_i^2<\infty\}$ 的规范正交基，其中 e_n 为第 n 位是 1，其余位为 0 的元素.

Example 1.13 $S=\{\sqrt{\frac{n}{\pi}}z^{n-1}:n\geq 1\}$ 为 $H^2(D)=\{u\in H(D):\iint_D|u(z)|^2dxdy<\infty\}$ 的规范正交基.

利用基我们可以研究可分 Hilbert 空间的结构.

Theorem 1.11

可分 Hilbert 空间同构于 l^2 或 K^n（底域 $K=\mathbb{R}$或$\mathbb{C}$）.

证明 我们证明更强的断言，即可分等价于存在至多可数的规范正交基. 这样设有至多可数的规范正交基 $e_1,e_2,\cdots,e_N(N\leq\infty)$, 则

$$T:X\to l^2\text{或}K^n, x=\sum_{k=1}^{N}(x,e_k)e_k\mapsto((x,e_1),\cdots,(x,e_N))$$

为所求的同构.

则只需证明断言. $\Rightarrow$: 取 $M=\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$ 为可数稠密子集，则取 M 的极大无关子集 $M'=\{y_n:n=1,\cdots,N\}$, 其中 $N\leq\infty$. 对 M' 做 Schimidt 正交化可以得到正交规范集 $S=\{e_n\}$, 且 $\overline{\text{span}S}=\overline{\text{span}M}=X$. 再证 S 是规范正交基.

$\forall x\in X$, 则存在 $x_m=\sum\limits_{k=1}^{N}a_{m_k}e_k$ 使得 $x_m\to x$. 固定 k, 则由于

$$|a_{m_k}-a_{m'_k}|=\|a_{m_k}e_k-a_{m'_k}e_k\|\leq\|x_m-x_{m'}\|$$

可知 a_{m_k} 为 Cauchy 列，进而令 $c_k=\lim\limits_{m\to\infty}a_{m_k}$, 此时有 $x=\sum\limits_{k=1}^{N}c_ke_k$，故 S 为基.

$\Leftarrow$: 设 $S=\{e_n:n\leq N\}(N\leq\infty)$ 为至多可数的规范正交基，则 $\forall x\in X$, 设 $x=\sum\limits_{k=1}^{N}c_ke_k, c_k=$

$(x, e_k) \in K$. 若底域为 $\mathbb{R}$，则取 $M = \{\sum_{n=1}^{N} a_n e_n : a_n \in \mathbb{Q}\}$, 若为 $\mathbb{C}$ 则取 $M = \{\sum_{n=1}^{N} a_n e_n : \mathrm{Im} a_n, \mathrm{Re} a_n \in \mathbb{Q}\}$, 则 M 为可数稠密子集. □

本节最后来讨论 Hilbert 空间中的最佳逼近问题.

Theorem 1.12

(1) 若 X 为 Hilbert 空间，C 为闭凸子集，则 $\forall x \in X$, 存在唯一 $y \in C$ 使得 $\|x - y\| = \inf_{z \in C} \|x - z\|$.

(2) 此外，有 y 为 x 在 C 上的最佳逼近 $\iff \mathrm{Re}(x - y, y - z) \geq 0 (\forall z \in C)$.

(3) 特别地，若 $C = X_0$ 为子空间, 则 y 为 x 在 C 上的最佳逼近 $\iff x - y \perp X_0 - y = X_0$. ♡

证明 (1) 存在性：对 $x \notin C$, 有 $d = \inf_{y \in C} \|x - y\| > 0$, 则存在 $z_n \in C$, 使得 $d \leq \|x - z_n < d + \frac{1}{n}$, 则

$$\|z_n - z_m\|^2 = 2(\|z_n\|^2 + \|z_m\|^2) - 4\|\frac{z_m + z_n}{2}\|^2 \leq 2[(d + \frac{1}{n})^2 + (d + \frac{1}{m})^2] - 4d^2 \to 0.$$

进而 $\{z_n\}$ 为 Cauchy 列，$z_n \to z_0$, 且 $\|x - z_0\| = d$, 则 z_0 为最佳逼近元.

唯一性：若 y_1, y_2 都是最佳逼近，则

$$\|y_1 - y_2\|^2 = 2(\|y_1 - x\|^2 + \|y_2 - x\|^2) - 4\|\frac{y_1 + y_2}{2} - x\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 = 0$$

故只能 $y_1 = y_2$.

(2) 对任意 $z \in C$, 令 $z_t = (1-t)y + tz, \phi_z(t) = \|x - z_t\|^2 = \|x - y\|^2 + 2t\mathrm{Re}(x - y, y - z) + t^2\|y - z\|^2$.

则 y 为最佳逼近 $\iff, \forall z \in C, t \in [0, 1]$, 有 $\phi_z(t) \geq \phi_z(0) \iff \phi_z'(0) \geq 0$, 则得证.

(3) 由 (2), 最佳逼近 $\iff \mathrm{Re}(x - y, y - z) \geq 0 (\forall z \in X_0)$. 令 $w = y - z \in X_0$, 则等价于 $\mathrm{Re}(x - y, w) \geq 0 (\forall w \in C)$. 再用 $-w$ 代入，则等价于 $\mathrm{Re}(x - y, w) = 0 (\forall w \in C)$.

再将 iw 代入，则 $\mathrm{Im}(x - y, w) = 0 (\forall w \in C)$. 则最佳逼近等价于 $(x - y, w) = 0 (\forall w \in C)$, 即 $x - y \perp X_0$. □

由此可以对 Hilbert 空间做直和分解.

Theorem 1.13

X 为 Hilbert 空间，$X_0 \subseteq X$ 为闭子空间，则 $\forall x \in X$, 存在唯一 $y \in X_0, z \in X_0^{\perp}$，使得 $x = y + z$, 即 $X = X_0 \oplus X_0^{\perp}$. ♡

证明 存在性：取 y 为 x 在 X_0 中的最佳逼近，则由上面的定理 $z = y - x \in X_0^{\perp}$, 则得到了想要的分解.

唯一性：若 $x = y_i + z_i, y_i \in X_0, z_i \in X_0^{\perp} (i = 1, 2)$, 则 $y_1 - y_2 = z_1 - z_2$. 左边属于 X_0, 右边属于 $X_0^{\perp}$, 则只能 $y_1 = y_2, z_1 = z_2$. □

Chapter 2 线性算子与线性泛函

2.1 线性算子

Definition 2.1

对线性空间 X, Y 以及 $D \subseteq X$ 为子空间，$T: D \to Y$ 为映射. $D = D(T)$ 称为**定义域**，$R(T) = \{Tx : x \in D\}$ 为**值域**，若 $\forall x, y \in D, \alpha, \beta \in K$, 则称 T 为**线性算子**.

特别地，若 $D = X, Y = K$, 则称为**线性泛函**.

对线性算子 $T: X \to Y$, 称之为**有界的**，若存在 $M > 0$ 使得 $\forall x \in X$, 有 $\|Tx\| \leq M\|x\|$. ♣

Proposition 2.1

X, Y 为 B^* 空间，$T: X \to Y$ 为线性算子，则如下等价：

(1) T 连续.

(2) T 在 0 处连续.

(3) T 有界. ♠

证明 (1) $\Longleftrightarrow$ (2) : 由线性性显然.

(2) $\Rightarrow$ (3) : 若不有界，则存在 $x_n \in X$ 使得 $\|Tx_n\| > n\|x_n\|$. 令 $y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$, 则 $y_n \to 0$ 但 $\|Ty_n\| > 1$, 矛盾!

(3) $\Rightarrow$ (1) : 对 $x_n \to x$, 有 $\|Tx_n - Tx\| \leq M\|x_n - x\| \to 0$，则连续. □

对 B^* 空间 $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$, 定义 $\mathcal{L}(X, Y) = \{T : X \to Y$为有界线性算子$\}$, 并定义 $\|T\| = \sup\limits_{x \in X - \{0\}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Tx\|_Y$. 当 $X = Y$ 时记 $\mathcal{L}(X, Y) = \mathcal{L}(X)$.

Proposition 2.2

(1) $\mathcal{L}(X, Y)$ 为线性空间，且 $\|\cdot\|$ 为范数.

(2) 若 Y 为 B 空间，则 $\mathcal{L}(X, Y)$ 为 B 空间. ♠

证明 (1) 显然为线性空间. 再验证范数：$\|T\| \geq 0$, 且 $\|T\| = 0 \Longleftrightarrow Tx = 0 (\forall x \in X) \Longleftrightarrow T = 0$. 故有正定性. 齐次性也显然.

再证三角不等式：

$$\|T_1 + T_2\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_1 x + T_2\|_Y \leq \sup_{\|x\|=1} \|T_1 x\|_Y + \sup_{\|x\|=1} \|T_2 x\|_Y = \|T_1\| + \|T_2\|.$$

(2) 设 $\{T_n\}$ 为 Cauchy 列，则 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 N 使得 $\|T_{n+p} - T_n\| \leq \varepsilon$, 则 $\forall x \in X$ 有 $\|T_{n+p}x - T_n x\|_Y \leq$

$\varepsilon\|x\|_X$. 则由 Y 的完备性有 $T_n x \to y$, 定义 $Tx = y$.

首先不难验证 T 为线性算子. 进一步对任意 $x \in X, \|x\|_X = 1$, 存在 n 使得 $\|Tx\|_Y = \|y\|_Y \leq \|T_n x\| + 1 \leq (\|T_n\| + 1)\|x\|_X$. 故 $\|T\| \leq \|T_n\| + 1$, 故 $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. □

最后看投影算子的例子. 对 X 为 Hilbert 空间, $M \subseteq X$ 为闭子空间, 则考虑正交分解 $x = x_M + x_{M^\perp}$, 其中 $x_M \in M, x_{M^\perp} \in M^\perp$. 则定义 $P_M : X \to X, x \mapsto x_M$ 为到 M 上的投影算子, 有 $D(P_M) = X, R(P_M) = M$.

显然 P_M 满足: (1) $\|P_M\| \leq 1$ (2) $P_M^2 = P_M$ (3) $(P_M x, y) = (x, P_M y)$.

进一步有如下命题.

Proposition 2.3

X 为 Hilbert 空间, $P \in \mathcal{L}(X)$, 则 P 为投影算子 $\Longleftrightarrow$ P 满足如上的 (2)(3). ♠

证明 只需证 $\Leftarrow$: 定义 $M = R(P)$, 则只需验证 M 为闭空间且 $P = P_M$.

M 闭: 设 $x_n \to x$, 其中 $x_n \in M$, 则存在 $y_n \in X, x_n = P(y_n)$. 由 (2) 有 $x_n = P(P(y_n)) = P(x_n) \to P(x)$, 由极限的唯一性 $P(x) = x, x \in M$.

$P = P_M$: 任意 $x \in X$, 做正交分解 $x = x_M + x_{M^\perp}$, 则 $Px = Px_M + Px_{M^\perp} = x_M + Px_{M^\perp}, P_M(x) = x_M$, 则只需证 $P(x_{M^\perp} = 0$. 对任意 $y \in X$, 利用 (2) 有 $(Px_{M^\perp}, y) = (x_{M^\perp}, Py) = 0$, 则得证. □

Remark 事实上将上面命题中 (2)(3) 改为 (1)(2), 结果仍然成立. 留作练习.

2.2 Riesz 表示定理

对 H 空间 X, 定义 $X^* = \mathcal{L}(X, K)$, 则定义 $\phi : X \to X^*, y \mapsto \{f_y : x \mapsto (x, \overline{y})\}$. 可以验证 ϕ 是共轭线性的：即 $\phi(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \overline{\lambda_1}\phi(y_1) + \overline{\lambda_2}\phi(y_2)$, 且 ϕ 是等距的.

显然 ϕ 是单射，若 ϕ 是满射? 则对 $f, g \in X^*$, 可以通过拉回来定义 X^* 上的内积 $(f, g) = \overline{(x_f, x_g)}$, 其中 $x_f = \phi^{-1}(f), x_g = \phi^{-1}(g)$. 进而可以再对 X^* 操作，得到：

$$(X, (\cdot, \cdot)) \xrightarrow{\phi_X} (X^*, (\cdot, \cdot)) \xrightarrow{\phi_{X^*}} (X^{**}, (\cdot, \cdot))$$

且两个共轭线性映射的复合 $\phi_{X^*} \circ \phi_X$ 为线性映射，进而有线性同构：$X \to X^{**}, x \mapsto \{Tx : f \mapsto f(x)\}$.

则何时 ϕ_X 为满射? 下面的 Riesz 表示定理给出了普遍性的结果.

Theorem 2.1 (Riesz 表示定理)

X 为 H 空间，则 $\forall f \in X^*, \exists! x_f \in X$, 使得 $f(x) = (x, x_f)$. ♡

证明 唯一性显然，只需证存在性.

考虑 $N(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$ 为闭子空间，若 $N(f) = X$, 则取 $x_f = 0$ 即可，故设 $N(f) \neq X$. 则取 $x_0 \in N(f)^{\perp}$, 对任意 $x \in X$, 有 $x - \frac{f(x)}{f(x_0}x_0 \in N(f)$. 进而

$$(x, x_0) = (x - \frac{f(x)}{f(x_0}x_0 + \frac{f(x)}{f(x_0}x_0, x_0) = \|x_0\|^2 \frac{f(x)}{f(x_0)}.$$

故 $f(x) = f(\frac{f(x)}{f(x_0}x_0) = (x, \frac{f(x_0)x_0}{\|x_0\|^2})$, 取 $x_f = \frac{f(x_0)x_0}{\|x_0\|^2}$ 即可. □

再来看一个双线性型确定线性泛函的例子, 主要工具就是 Riesz 表示定理.

Theorem 2.2

X 为 H 空间，$a : X \times X \to K$ 为共轭双线性算子，且存在 $M > 0$ 使得 $|a(x, y)| \leq M\|x\|\|y\|$, 则存在唯一 $A \in \mathcal{L}(X)$ 使得 $a(x, y) = (x, Ay)$. ♡

证明 固定 y，则由 Riesz 表示定理，存在唯一 $A(y) \in X$ 使得 $a(x, y) = (x, A(y))$, 则考虑

$$X \to X^* \to X, y \mapsto a(\cdot, y) \mapsto A(y)$$

为共轭线性映射的复合，则 A 线性，且有

$$\|Ay\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(Ay, x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{|a(x, y)|}{\|x\|} \leq M\|y\|.$$

故 $A \in \mathcal{L}(X)$ 为所求. □

下面对 $T \in \mathcal{L}(X)$, 则考虑交换图表

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\phi"] & X \arrow[d, "\phi"] \\ X^* & X^* \arrow[l, dashed, "T^*"] \end{tikzcd}$$

其中 $T^* = \phi \circ T \circ \phi^{-1}$ 为线性的，由 Riesz 表示可以将 T^* 视为 $\mathcal{L}(X)$，它满足 $(Tx, y) = (x, T^* y)$, 称为 T 的**伴随算子**. 若 $T = T^*$ 则称 T 是**自伴算子**或**对称算子**.

Example 2.1 设 $X = \mathbb{R}^d$, 则 $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, x \mapsto Ax$, 则 T 自伴等价于 A 对称.

Example 2.2 设 $X = \mathbb{C}^d$, 则 $T : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d, x \mapsto Ax$, 则 T 自伴等价于 A 为酉方阵.

2.3 纲与开映射定理

Definition 2.2

在拓扑空间 X 中，子集 B 称为**第一纲集**，若存在可数个疏集 A_i 使得 $B \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} A_i$. 否则称为**第二纲集**.

若存在可数个稠密开集 U_i 使得 $\cap_{i=1}^{\infty} U_i \subseteq C$, 则称 C 为**剩余集**. ♣

Example 2.3 在 $\mathbb{R}$ 中，$\mathbb{Q}$ 为第一纲集，$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ 为第二纲集.

下面的 Baire 纲定理是重要的.

Theorem 2.3 (Baire 纲定理)

在完备度量空间 (X, ρ) 中，可数个稠密开集的交是稠密第二纲集. ♡

证明 记 $G = \cap_{i=1}^{\infty} U_i$, 其中 U_i 为稠密开集.

若 G 为第一纲集，则设 $G \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$, 其中 A_i 为疏集. 又 $X - G = \cup_{i=1}^{\infty} B_i$, 其中 $B_i = X - U_i$ 无内点闭集. 则令 $C_i = \overline{A_i} \cup B_i$ 为疏集，有 $X = \cup_{i=1}^{\infty} C_i$.

C_1 疏集，则取 $B(x_1, r_1) \cap C_i = \emptyset$, 令 $D_1 = \overline{B(x_1, \frac{r_1}{2})}$, 则 $D_1 \cap C_1 = \emptyset$.

再利用 C_2 疏集，取 $B(x_2, r_2) \subseteq B(x_1, \frac{r_1}{2})$, 使得 $B(x_2, r_2) \cap C_2 = \emptyset$, 进而令 $D_2 = \overline{B(x_2, \frac{r_2}{2})}$, 有 $D_2 \cap C_2 = \emptyset$.

以此类推有 Cauchy 列 $\{x_n\}$, 且 $x_n \to x_0 \in \cap_{i=1}^{\infty} D_i$, 但 $x_i \in X = \cup_{i=1}^{\infty} C_i$, 矛盾！故为第二纲集. 熟知可数个稠密开集的交是稠密的. □

下面给出了一个看起来很”小”，但实际上很“大”的集合的例子.

Proposition 2.4

$\mathcal{F} = \{f \in C[0,1] : f 处处不可微\}$ 在 $C[0,1]$ 中是剩余集. ♠

证明 任取 $g \in C[0,1] - \mathcal{F}$, 则存在 s 使得 g 在 s 中可微，则存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得对 $|h| \leq \frac{1}{n}, 0 \leq s + h \leq 1$, 有 $|\frac{g(s+h)-g(s)}{h}| \leq n$.

定义 $A_n = \{f \in C[0,1] : \exists s \in [0,1], \text{s.t.} \forall |h| \leq \frac{1}{n}, 0 \leq s + h \leq 1, 有 |\frac{g(s+h)-g(s)}{h}| \leq n\}$, 进而 $C[0,1] - \mathcal{F} \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. 则只需证 A_n 闭且无内点.

A_n 闭：若 $g_m \in A_n, g_m \to g$, 其中 g_m 对应 s_m，则取子列（不妨还是 g_m）使得 $s_m \to s$. 由 $|g_m(s_m + h) - g_m(s_m)| \leq n|h|$, 有 $|g(s_m + h) - g(s_m)| \leq n|h| + 2\|g_m - g\|$. 令 $m \to \infty$ 则有 $g \in A_n$.

A_n 无内点：$\forall \varepsilon > 0, g \in A_n$, 则只需找 $f \in C[0,1] - A_n$ 且 $\|f - g\| < \varepsilon$. 任取 $\varepsilon > \varepsilon_0 > 0$, 首先令 p_L

为 $h(x)=\begin{cases} Lx & x<\frac{\varepsilon_0}{L} \\ 2\varepsilon_0-Lx & \frac{\varepsilon_0}{L}\le x\le \frac{2\varepsilon_0}{L}\end{cases}$ 平移拼接成的函数.

再取多项式 q 使得 $\|g-q\|<\varepsilon-\varepsilon_0$, 并设 $m=\max\limits_{0\le t\le 1}|q'(t)|$, 则取 $L>m+n, f=q+p_L$, 有任意 s, 对 h 充分小, 有 $|f(s+h)-f(s)|\ge (L-m)|h|>n|h|$, 进而 $f\notin A_n$, 则 f 满足我们的要求. □

下面说明剩余集在连续满射下的保持性质.

Proposition 2.5

设 X,Y 为 B 空间, $T\in\mathcal{L}(X,Y)$ 为满射.

(1) $R\subseteq X$ 剩余集, 则 $T(R)\subseteq Y$ 为剩余集.

(2) $W\subseteq Y$ 剩余集, 则 $T^{-1}(W)\subseteq X$ 为剩余集.

证明 下面将会证明开映射定理, 它说明 T 是开映射, 下面将默认这一结论.

(1) 设 $R\supseteq\cap_{i=1}^\infty U_i$, 其中 U_i 为稠密开集, 则

$$T(R)\supseteq Y-T(X-R)\supseteq Y-\cup_{i=1}^\infty T(X-U_i)=\cup_{i=1}^\infty Y-T(X-U_i).$$

则 $T(X-U_i)$ 为闭集, $Y-T(X-U_i)$ 为开集, 若它不稠密, 则存在 G 开集使得 $G\cap(Y-T(X-U_i))=\emptyset$. 则 $T^{-1}(G)\cap T^{-1}(Y-T(X-U_i))=T^{-1}(G)\cap U_i=\emptyset$, 与 U_i 稠密矛盾!

(2) 设 $W\supseteq\cap_{i=1}^\infty V_i$, 其中 V_i 为稠密开集, 则 $T^{-1}(V_i)$ 为开集.

若 $T^{-1}(V_i)$ 不稠密, 则存在开集 U 使得 $U\cap T^{-1}(V_i)=\emptyset$, 故 $T(U)$ 为开集, 但由 V_i 稠密有 $T(U)\cap V_i=\emptyset$, 矛盾! 故 $T^{-1}(W)\supseteq\cap_{i=1}^\infty T^{-1}(V_i)$, 其中 $T^{-1}(V_i)$ 为稠密开集, 则为剩余集. □

下面我们开始讨论开映射定理.

Theorem 2.4 (开映射定理)

对 X,Y 为 B 空间, $T\in\mathcal{L}(X,Y)$ 为满射, 则为开映射.

证明 任意 $U\subseteq X$ 为开集, 存在 $\delta>0$ 使得 $B(x,\delta)=x+B(0,\delta)\subseteq U$, 故 $Tx+TB(0,\delta)\subseteq T(U)$.

欲证 $T(U)$ 为开集, 只需证 $\forall y=Tx\in T(U),\exists\varepsilon>0$ 使得 $B_Y(y,\varepsilon)=Tx+B_Y(0,\varepsilon)\subseteq Tx+TB_X(0,\delta)\subseteq T(U)$. 故只需证 $B_Y(0,\varepsilon)\subseteq TB_X(0,\delta)=\delta TB_X(0,1)$, 即证存在 η 使得 $B_Y(0,\eta)\subseteq TB_X(0,1)$.

首先由于 $R(T)=\cup_{n\in\mathbb{N}}TB_X(0,\eta)=Y$ 为第二纲集, 则存在 n 使得 $\overline{TB_X(0,n)}$ 有内点 y_0, 进而 $\overline{TB_X(0,n)}\supseteq y_0+B_Y(0,\varepsilon)$, 由对称性也有 $\overline{TB_X(0,n)}\supseteq -y_0+B_Y(0,\varepsilon)$, 则有

$$\overline{TB_X(0,1)}\supseteq\frac{1}{2}(B_Y(y_0,\frac{\varepsilon}{n})+B_Y(-y_0,\frac{\varepsilon}{n}))=B_Y(0,\frac{\varepsilon}{n})$$

.

取 $\eta=\frac{\varepsilon}{3n}$, 则 $\overline{TB_X(0,\frac{1}{3})}\supseteq B_Y(0,\eta)$. 任意 $y\in B_Y(0,\eta)$, 存在 $x_0\in B_X(0,\frac{1}{3})$ 使得 $\|Tx_0-y\|<\frac{\eta}{3}$. 令 $y_1=y-Tx_0$, 有 $\|y_1\|<\frac{\eta}{3},\|x_0\|<\frac{1}{3}$. 再取 $y_2=y_1-Tx_1,\cdots,y_n=y_n-Tx_n=y-T(x_0+$

$\cdots + x_{n-1}) = y - Tz_n, \cdots$, 其中 $\|y_n\| < \frac{\eta}{3^n}$, 且

$$\|z_m - z_n\| < \frac{1}{3^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{3^n} < \frac{1}{3^m}$$

.

则 $\{z_n\}$ 为 Cauchy 列，有 $z_n \to x$, 且 $\|x\| \leq \frac{2}{3} < 1$. 则 $Tx = \lim\limits_{n\to\infty} Tz_n = \lim\limits_{n\to\infty} y - y_n = y$, 故 $y \in TB_X(0,1)$, 即 $B_Y(0,\eta) \subseteq TB_X(0,1)$. □

Remark 更一般地有 X, Y 为 B 空间，$T : x \to Y$ 为闭映射，且 $R(T)$ 为第二纲集，则 T 为开映射，且 $R(T) = Y$.

下面是开映射定理的应用. 不做特别说明均默认 X, Y 为 B 空间.

Theorem 2.5 (Banach 逆映射定理)

$T \in \mathcal{L}(X,Y)$ 为双射，则 $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$. ♡

证明 只需证 $\|T^{-1}\| < \infty \iff \exists \eta > 0, \text{s.t.} T^{-1}(B_Y(0,1)) \subseteq B_X(0,\eta) \iff TB_X(0,1) \supseteq B_Y(0,\frac{1}{\eta})$. 由开映射定理立得. □

Corollary 2.1 (范数等价定理)

若 X 关于 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 均为 B 空间，且 $\|\cdot\|_1$ 强于 $\|\cdot\|_2$, 则它们等价. ♡

证明 考虑 $\mathrm{Id} : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$, 则由条件 T 有界，又显然为双射，由逆映射定理有 T^{-1} 有界，进而 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强. □

Definition 2.3

$T : X \to Y$ 为线性映射称为**闭算子**，若对任意 $x_n \to x, x_n \in D(T), Tx_n \to y$, 有 $x \in D(T), Tx = y$. ♣

Example 2.4 闭算子不一定有界！例如 $X = Y = C[0,1]$, T 为求导算子, $D(T) = C^1[0,1]$, 则 T 闭但不有界.

Theorem 2.6 (闭图像定理)

$T : X \to Y$ 为闭算子.

(1) 若 $D(T)$ 为 X 的闭子空间，则 $T|_{D(T)} \in \mathcal{L}(D(T), Y)$.

(2) 若 T 有界，则 T 可以延拓到 $\overline{D(T)}$ 上. ♡

证明 (1) 不妨 $X = D(T)$, 则考虑其图像 $G(T) = \{(x, Tx) : x \in X\} \subseteq X \times Y$, 显然有 T 闭等价于 $G(T)$ 闭.

定义 X 上范数 $\|x\|_T = \|x\|_X + \|Tx\|_Y$ 强于 $\|\cdot\|_X$. 这是一个完备范数：取 $\{x_n\}$ 为该范数下的 Cauchy 列，则 $\{x_n\}$ 为 $\|\cdot\|_X$ 下的 Cauchy 列，$\{Tx_n\}$ 为 $\|\cdot\|_Y$ 下的 Cauchy 列. 由 X,Y 完备，可知在原始范数下 $x_n \to x, Tx_n \to y$, 进而由闭算子有 $Tx = y$, 故有 $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_T} x$, 则完备.

则由范数等价定理，存在 $L > 0$ 使得 $\|x\|_T \le L\|x\|_X$, 故 T 有界.

(2) 任取 $x \in \overline{D(T)}$, $x_n \to x, x_n \in D(T)$, 则 x_n 为 Cauchy 列，进而由 T 有界得 Tx_n 为 Cauchy 列，则设 $Tx_n \to T_x$(良定性验证与完备化的良定性验证方法一致), 有

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|Tx_n\| \le \|T\|_{D(T)} \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|T\|_{D(T)}\|x\|,$$

故 T 延拓之后仍有界，且 $\|T\|_{\overline{D(T)}} = \|T\|_{D(T)}$. □

Example 2.5 设 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ 为 Borel 可测函数，并对 $\forall g \in L^2[0,1]$, 有 $fg \in L^1[0,1]$, 我们来证明 $f \in L^2[0,1]$.

定义 $T : L^2[0,1] \to L^1[0,1], g \mapsto fg$ 为线性算子，且 $D(T) = L^2[0,1]$. 先证 T 为闭算子.

设 $g_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} g, Tg_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} h$, 则存在子列 $g_{n_k} \xrightarrow{a.e.} g, fg_{n_k} = Tg_{n_k} \xrightarrow{a.e.} h$, 进而 $fg \overset{a.e.}{=} h$. 故为闭算子，

由定理 2.6(1)，有 T 有界，则取 $g_n = \bar{f}\chi_{|f|\le n} \in L^2[0,1]$, 则

$$\|f\chi_{|f|\le n}\|_2^2 = \|fg_n\|_1 \le \|T\|\|g_n\|_2.$$

故 $\|f\chi_{|f|\le n}\|_2 \le \|T\| < \infty$, 进而 $\|f\|_2 < \infty$.

Proposition 2.6 (Toeplitz-Hellinger)

$T : X \to Y$ 线性算子，且 $D(T) = X$, $S : Y^* \to X^*$ 线性，且 $D(S) = Y^*$.

如果 $\forall x \in X, f \in Y^*$, 有 $f(Tx) = (Sf)(x)$, 则 $T \in \mathcal{L}(X,Y), S \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$.

证明 由定理 2.6(1), 只需证 T 闭，对 S 同理. 现在设 $x_n \to x, Tx_n \to y$, 只需证 $Tx = y$.

$\forall f \in Y^*$, 有

$$f(y) = \lim_{n\to\infty} f(Tx_n) = \lim_{n\to\infty} (Sf)(x_n) = (Sf)(x) = f(Tx)$$

由后面将要学习的 Hahn-Banach 定理，Y^* 中的元素分离 Y 中的元素，则 $y = Tx$. □

Corollary 2.2

X 为 H 空间, $A : X \to X$ 线性算子, $D(A) = X$. 则若 $\forall x, y \in X, (Ax, y) = (x, Ay)$, 则 $A \in \mathcal{L}(X)$.

最后来考虑如下的共鸣定理.

Theorem 2.7 (共鸣定理)

设 $W \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$, 若 $R=\{x\in X: \sup\limits_{T\in W}\|Tx\|<\infty\}$ 为第二纲集，则 $\sup\limits_{T\in W}\|T\|<\infty$. ♡

证明 定义 $p(x)=\sup\limits_{T\in W}\|Tx\|\in[0,\infty]$. 对 $M>0$, 取 $E_M=\{x\in X: p(x)\le M\}$, 则 $R\subseteq\cup_{M=1}^{\infty}E_M$.

由 R 为第二纲集，则存在 E_M 有内点，故 E_1 有内点. 同样由对称性设 $B(0,\varepsilon)\subseteq E_1$. 故

$$\varepsilon\sup_{T\in W}\|T\|=\sup_{T\in W}\sup_{x\in B(0,\varepsilon)}\|Tx\|=\sup_{x\in B(0,\varepsilon)}\sup_{T\in W}\|Tx\|\le 1$$

则 $\sup\limits_{T\in W}\|T\|<\frac{1}{\varepsilon}$. □

Example 2.6 我们来说明 $L^2[0,1]\subseteq L^1[0,1]$ 是第一纲的.

考虑 $g_n=n\chi_{[0,\frac{1}{n^2}]}$, 定义 $T_n: L^1[0,1]\to K, f\mapsto\int_0^1 fg_n dt$, 则 $\|T_n\|=n$, 则 $T_n\in L^1[0,1]^*$ 且 $\sup\limits_n\|T_n\|=\infty$.

由共鸣定理，$R=\{f\in L^1[0,1]: \sup\limits_{n\ge1}\|T_nf\|<\infty\}$ 为第一纲.

又 $\forall f\in L^2[0,1]$, 有

$$\sup_{n\ge1}\|T_nf\|=\sup_{n\ge1}|\int_0^1 fg_n dt|\le\sup_{n\ge1}\|f\|_2<\infty$$

注意其中倒数第二步使用了 Hölder 不等式. 则 $L^2[0,1]\subseteq R$ 为第一纲的.

类似地可以证明对任意 $p>q\ge1$，有 $L^p[0,1]\subseteq L^q[0,1]$ 为第一纲集.

Theorem 2.8 (Banach-Steinhaus)

设 $T_n\in\mathcal{L}(X,Y)$，满足

(1) $\sup\limits_{n\ge1}\|T_n\|<\infty$.

(2) 存在稠密子集 $D\subseteq X$ 使得 $\forall x\in D, T_nx\to Tx$.

则 T 可以延拓为 X 上有界线性算子，且 $\|T\|\le\liminf\limits_{n\to\infty}\|T_n\|$. ♡

证明 对任意 $x\in X$, 令 $x_n\in x, x\in D$, 则定义 $Tx=\lim\limits_{n\to\infty}Tx_n$.

良定性：首先证明上面的极限确实存在. 这是因为 $\|Tx_n-Tx_m\|\le\sup\limits_{n\ge1}\|T_n\|\|x_n-x_m\|$. 再若有 $x_n\to x, x_n'\to x, x_n, x_n'\in X$, 仍然考虑 $\{y_n\}=\{x_1,x_1,x_2,x_2',\cdots,\}$ 为 Cauchy 列，由上 $\lim\limits_{n\to\infty}Ty_n$ 存在，进而 $\lim\limits_{n\to\infty}Tx_n=\lim\limits_{n\to\infty}Tx_n'$.

不难验证 T 线性，且此时显然有 $\|T\|\le\liminf\limits_{n\to\infty}\|T_n\|$. □

Remark 此时不一定有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|T-T_n\|=0$.

Example 2.7 令 $X=C[0,1], \mathcal{M}_{[0,1]}$ 为 [0,1] 上 Borel 概率测度的集合，则它的元素对应 X^* 中的元素：$\mu\mapsto\{J_\mu: f\mapsto\int_0^1 fd\mu\}$. 不难发现 $J_\mu\in S(X^*)$.

由于 $X = C[0,1]$ 可分，取可数稠密子集 $\{f_m\}_{m\geq 1}$. 任取 $\mu_n \in \mathcal{M}_{[0,1]}$, 记 $T_n = J_{\mu_n}$，则由 $\|T_n\| = 1$，存在子列 n_k^1 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} T_{n_k^1}(f_1)$ 存在, 再同理取 n_k^1 的子列 n_k^2 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} T_{n_k^2}(f_2)$ 存在，以此类推，利用对角线论证，存在子列 n_l 使得 $\forall m \geq 1, \lim\limits_{l\to\infty} T_{n_l}(f_m)$ 存在.

则利用 Banach-Steinhaus 定理，可以定义 X 上的有界泛函 T, 则由 Riesz 表示，存在 $\mathcal{M}_{[0,1]}$ 中的元素 μ 使得 $T = J_\mu$. 进而在 * 弱收敛（后面会定义）意义下 $\mu_{n_l} \to \mu$. 故 $\mathcal{M}_{[0,1]}$ 在 * 弱拓扑下是列紧的.

事实上 $\mathcal{M}_{[0,1]}$ 在 * 弱拓扑下是度量空间: $\mu_n \to \mu \Longleftrightarrow \forall m, \lim\limits_{n\to\infty} \int f_m d\mu_n = \int f_m d\mu \Longleftrightarrow \rho(\mu_n, \mu) \to 0$. 其中 $\rho(\mu, \nu) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\int f_m d\mu - \int f_m d\nu|}{2^m(1+\|f_m\|_\infty)}$.

可以验证 ρ 是一个度量，则它诱导的拓扑与 * 弱拓扑一致. 则有度量空间中列紧性等价于紧性，有 $\mathcal{M}_{[0,1]}$ 在 * 弱拓扑下是紧的!

2.4 Hahn-Banach 定理

先来考虑如下的问题: X 为 B 空间, 是否有 X^* 中的元素分离点? 即, $\forall x \neq y$, 存在 $f \in X^*, f(x) \neq f(y)$?

则令 $x_0 = x - y \neq 0$, 只用找 $f \in X^*$ 使得 $f(x_0) \neq 0$. 考虑 $X_0 = \{\lambda x_0 : \lambda \in K\}$, 定义 $f_0 \in X_0^*, \lambda x_0 \mapsto \lambda$. 故只要存在 $f \in X^*$ 为 f_0 的延拓则问题解决.

再来考虑 $M \subseteq X$ 闭子空间, $x_0 \notin M$, 希望找 f 使得 $f(M) = 0, f(x_0) = d(x_0, M) = d_0$, 且 $\|f\| = 1$.

我们考虑 $X_0 = \{\lambda x_0 + x : \lambda \in K, x \in M\}$, 并定义 $f_0 : X_0 \to K, \lambda x_0 + x \mapsto \lambda d_0$, 则有 $f_0(x_0) = d_0$, 且

$$\|f_0\| = \sup_{\lambda \in K, x \in M} \frac{|\lambda d_0|}{\|\lambda x_0 + x\|} = \sup_{z \in M} \frac{d_0}{\|x_0 + z\|} = 1.$$

同样地, 如果存在 $f \in X^*$ 为 f_0 的延拓, 则问题得以解决. 进而我们希望解决延拓问题.

Theorem 2.9 (Hahn-Banach 定理)

X 为 B 空间, $X_0 \subseteq X$ 为子空间, 且 $f_0 \in X_0^*$, 则存在 $f \in X^*$, 使得 $f|_{X_0} = f_0, \|f\| = \|f_0\|$. ♡

证明 我们转而证明命题 (*): 对 X 为实线性空间, X_0 为线性子空间, $f_0 : X_0 \to \mathbb{R}$ 为线性泛函, $p : X \to \mathbb{R}$ 为次线性泛函, 满足 $\forall x \in X_0, f_0(x) \leq p(x)$. 则存在 $f : X \to \mathbb{R}$ 为线性泛函, 使得 $f|_{X_0} = f_0$, 且 $\forall x \in X, f(x) \leq p(x)$.

首先说明命题 (*) 可以推出实情形的 Hahn-Banach 定理: 对 $f_0 \in X_0^*$, 定义 $p(x) = \|f_0\|\|x\|$ 为 X_0 上的次线性泛函, 则由命题 (*), 存在 f 为 X 上的实线性泛函, 使得 $f|_{X_0} = f_0, f(x) \leq p(x)$. 则 f 为想要的延拓.

对于复情形有类似的命题 (*), 但需要将次线性泛函换成半模. 事实上命题 (*) 可以推出复情形下的结果: 设 $f : X_0 \to \mathbb{C}$ 为被半模 p 控制的线性泛函, 则 $\mathrm{Re} f_0 : X_0 \to \mathbb{R}$ 为被 p 控制的线性泛函, 则由命题 (*) 存在 $g : X \to \mathbb{R}$ 为线性泛函, 使得 $g|_{X_0} = f_0, g(x) \leq p(x) (\forall x \in X)$.

可以验证 $f(z) = g(z) - ig(iz)$ 为复线性泛函, 满足 $f|_{X_0} = f_0, |f(z)| \leq p(z) (\forall z \in X)$, 故复情形的命题得证. 同理可以验证它可以推出复情形的 Hahn-Banach 定理.

故现在只需证明命题 (*).

考虑 $\mathcal{F} = \{(Y, f_Y) : X_0 \subseteq Y \subseteq X$线性子空间, f_Y实线性泛函, 且$f_Y(x) \leq p(x) (\forall x \in Y), f_Y|_{X_0} = f_0\}$. 并设 $(Y_1, f_{Y_1}) \leq (Y_2, f_{Y_2}) \Longleftrightarrow Y_1 \subseteq Y_2$ 且 $(f_{Y_2})|_{Y_1} = f_{Y_1}$, 则 $\mathcal{F}$ 关于 $\leq$ 成为一个偏序集.

任取一个全序子集 $\{(Y_i, f_{Y_i}) : i \in I\}$, 取 $Y = \cup_{i \in I} Y_i$ 且 $f(y) = f_{Y_i}(y) (\forall y \in Y_i)$. 则 $f(y) \leq p(y) (\forall y \in Y)$, 可知 (Y, f_Y) 为该全序子集的上界. 则由 Zorn 引理, $\mathcal{F}$ 有极大元 (W, f_W).

若 $W \neq X$, 对 $x_1 \in X - W, X_1 = \{\lambda x_1 + x_0 : \lambda \in \mathbb{R}, x_0 \in W\}$, 则由归纳假设, 若能找到 $x_1 \in X - W$

使得存在 $f_1 : X_1 \to \mathbb{R}$ 为线性泛函，使得

(1): $f_1|W = f_W$.

(2): $f_1(z) \le p(z), \forall z \in X_1$.

则 $(X_1, f_1) \in \mathcal{F}$ 且 $(W, f_W) \le (X_1, f_1)$, 与 (W, f_W) 为极大元矛盾！则 $W = X$, 进而得证.

故只需要找符合上述的 $x_1 \in X - W$. 注意到条件 (1) 等价于 $f_1(\lambda x_1 + x_0) = \lambda f_1(x_1) + f_W(x_0)$, 在此基础上条件 (2) 等价于 $\lambda f_1(x_1) + f_W(x_0) \le p(\lambda x_1 + x_0)$.

则 $\lambda > 0$ 时，等价于 $f_1(x_1) + f_W(\frac{x_0}{\lambda} \le p(x_1 + \frac{x_0}{\lambda})$, 即等价于

$$f_1(x_1) \le \inf_{z_0^+ \in W} (p(x_1 + z_0^+) - f_W(z_0^+).$$

类似地，$\lambda < 0$ 时等价于

$$f_1(x_1) \ge \sup_{z_0^- \in W} f_W(z_0^-) - p(-x_1 + z_0^-).$$

则 x_1 的存在性等价于

$$\sup_{z_0^- \in W} f_W(z_0^-) - p(-x_1 + z_0^-) \le \inf_{z_0^+ \in W} (p(x_1 + z_0^+) - f_W(z_0^+).$$

由于对任意 $z_0^-, z_0^+ \in W$

$$f_W(z_0^- + z_0^+) \le p(z_0^- + z_0^+) \le p(x_1 + z_0^+) + p(-x_1 + z_0^-).$$

故上式显然成立. 则得证. □

进而本节引入的两个问题得以解决.

Corollary 2.3

(1) X 为 B 空间，有 X^* 中的元素分离点. 即，$\forall x \ne y$, 存在 $f \in X^*, f(x) \ne f(y)$.

(2) X 为 B 空间, $M \subseteq X$ 闭子空间, $x_0 \notin M$, 则存在 $f : X \to \mathbb{R}$ 使得 $f(M) = 0, f(x_0) = d(x_0, M)$, 且 $\|f\| = 1$. 特别地，对 $x_0 \ne 0$, 存在 $f \in X^*$ 使得 $\|f\| = 1, f(x_0) = \|x_0\|$.

♡

下面考虑 Hahn-Banach 定理的几何形式.

Definition 2.4

对线性空间 X, 子空间 $M \subseteq X$ 称为**极大线性子空间**，若对任意真包含 M 的 X 的线性子空间 M_1，都有 $M_1 = X$. 极大线性子空间的平移 $L = x_0 + M$ 称为**超平面**.

♣

Remark $M \subseteq X$ 为极大线性子空间 $\iff \forall x \in X - M$, 有 $X = \{\lambda x : \lambda \in K\} \oplus M$. 则由此不难验证对任意线性泛函 f, 有 $N(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$ 为极大线性子空间.

Proposition 2.7

L 为 (闭) 线性，则 L 为 (闭) 超平面 $\Longleftrightarrow$ 存在 f 为线性泛函 ($f \in X^*$) 使得 $L = H_f^r = \{x \in X : f(x) = r\}$.

证明 $\Leftarrow$: $M = H_f^0$ 为 (闭) 线性子空间，则 $L = M + x_0$ 为 (闭) 超平面，其中 $f(x_0) = r$.

$\Rightarrow$: 设 $L = x_0+M$, 其中 M 为极大线性子空间, 则定义 $f : X \to \mathbb{R}, \lambda x_0+y \mapsto \lambda$, 其中 $\lambda \in \mathbb{R}, y \in M$. 则 f 为所求. □

现在对于 B 空间中的不交 (闭) 凸集，是否可以用 (闭) 超平面分离?

Lemma 2.1

设 $A \subseteq X$ 为 B 空间中凸集，且有内点，则任取 $y_0 \notin A$, 存在非零泛函 $f \in X^*$ 使得 $L = H_f^c$ 分离 A 和 y_0. 此外，若 $\rho(y_0, A) > 0$, 则可以除去 A 无内点的条件，且此时为严格分离.

证明 不妨 $0 \in \mathrm{Int}(A)$, 则 $p_A(x)$ 为次线性泛函，且 $p_A(y_0) \geq 1$, 在 $\rho(y_0, A) > 0$ 时取严格不等号.

对 $X_0 = \{\lambda y_0 : \lambda \in \mathbb{R}\}$, 定义 $f(\lambda y_0) = \lambda c$, 其中 $c = \frac{p_A(y_0)+1}{2}$, 则 $f \leq p_A$, 进而由 Hahn-Banach 定理, 存在 f 为 X 上实线性泛函，使得 $f|_{X_0} = f_0$ 且 $f \leq p_A$.

又由于 0 为内点，故 p_A 有界，则 f 有界，且满足 $f(y_0) = c, f(x) \leq p_A(x) \leq 1 (x \in A)$. 则 f 为所求. □

Example 2.8 对 $X = l^2$, $A = \{x \neq 0 : \text{只有有限个}x_i\text{非零}\}$ 为凸线性子空间，且无内点. 再令 $B = \{0\}$, 则 A, B 不能用闭超平面分离!

否则设 $f \in X^* - \{0\}$, 满足 $f(A) \geq 0$, 由于 $\bar{A} = l^2$, 则有 $f(l^2) \geq 0$, 只能 $f = 0$, 矛盾!

则可以证明如下的凸集分离定理.

Theorem 2.10 (凸集分离)

A, B 为 B 空间 X 中的不交凸子集，则

(1) 若 A 或 B 有内点，则存在 $f \in X^* - \{0\}$ 分离 A, B.

(2) 若 $\rho(A, B) > 0$, 则存在 $f \in X^* - \{0\}$ 严格分离 A, B.

证明 (1) 令 $E = A - B$ 为凸集，则 E 有内点，且 $y_0 = 0 \notin E$, 则由上面的引理，可以用 $f \in X^* - \{0\}$ 分离 E 和 y_0, 则此时

$$0 = f(y_0) \leq \inf x \in E f(x) = \inf_{x_1 \in A, x_2 \in B} f(x_1) - f(x_2).$$

故 f 分离 A 和 B.

(2) 与 (1) 类似，在此省略. □

最后来看几个具体的应用.

Definition 2.5

对 B 空间 X, Y, 映射 $f: X \to Y$ 称为在 $x_0 \in X$ **可微**，是指存在 $L \in X^*$, 使得

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - L\Delta x\|}{\|\Delta\|} \to 0.$$

此时称 $f'(x_0) = L$.

Theorem 2.11 (拟微分中值定理)

设 $f: (0,1) \to X$ 连续可微, $0 < b < a < 1$, 则存在 $\theta \in [0,1]$ 使得 $\|\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\| \le \|f'(\theta a + (1-\theta)b)\|$.

证明 设 $z = f(a) - f(b)$, 则由 Hahn-Banach 定理的推论，存在 $g \in X^*$ 使得 $\|g\| = 1, g(z) = \|z\|$.

则由常规的微分中值定理，存在 $\theta \in [0,1]$ 使得

$$\|\frac{f(a) - f(b)}{a - b}\| = \frac{g(f(a)) - g(f(b))}{a - b} = (g \circ f)'(\theta a + (1-\theta)b) \le \|g\|\|f'(\theta a + (1-\theta)b)\|.$$

故得证. □

Definition 2.6

设 X 为 B 空间，对 $f: X \to \mathbb{R}$ 为凸函数，$\forall x_0 \in X$, 定义 f 在 x_0 处的**次微分**为

$$\partial f(x_0) = \{g \in X^* : g(x) - g(x_0) \le f(x) - f(x_0), \forall x \in X$$

.

Remark $f: X \to \mathbb{R}$ 凸等价于它的**上方集** $\mathrm{epi}(f) = \{(x, \delta) \in X \times \mathbb{R} : \delta \ge f(x)\}$ 是凸集.

Example 2.9 若 f 在 x_0 可微, 则 $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)(\Delta x) + O(\Delta x)$, 进而若 $g \in \partial f(x_0), g(\Delta x) \le f'(x_0)(\Delta x) + O(\Delta x)$.

此时只能 $g = f'(x_0)$, 故此时次微分唯一，即 $f'(x_0)$. 但反之不成立：若 $\partial f(x_0)$ 为独点集，$f'(x_0)$ 也可能不存在.

Theorem 2.12

若 X 为 B 空间，$f: X \to \mathbb{R}$ 为凸函数, f 在 x_0 处连续，则 $\partial f(x_0) \ne \emptyset$.

证明 首先注意若 Y, Z 为 B 空间，则 $Y \times Z$ 为 B 空间，且 $(Y \times Z)^* = Y^* \times Z^*$(自行验证！).

取 f 的上方集 $A = \mathrm{epi}(f) \subseteq X \times \mathbb{R}$, 则由于 x_0 处连续，有 $z_0 = (x_0, f(x_0)) \notin \mathrm{Int}(A)$. 则由凸集分离，存在 $H \in (X \times \mathbb{R})^*$ 非零, 使得 $H(x_0, f(x_0)) \le H(x, \delta), \forall (x, \delta) \in A$.

则设 $H(x, s) = h(x) + \xi s, h \in X^*, \xi \in \mathbb{R}$, 进而取 $x = x_0, \delta = f(x) + t, t > 0$, 有

$$h(x_0) + \xi f(x_0) \le h(x_0) + \xi(f(x_0) + t).$$

故 $\xi \ge 0$.

若 $\xi=0$, 则 $\forall x\in X, h(x_0)\le h(x)$, 则只能 $h(x)=0$, 矛盾！则只能 $\xi>0$，此时有

$$-\frac{h(x)}{\xi}+\frac{h(x_0)}{\xi}\le f(x)-f(x_0)+t.$$

令 $g(x)=-\frac{h(x)}{\xi}\in X^*$，则在上式中令 $t\to 0$ 有 $g\in\partial f(x_0)$. $\square$

2.5 共轭空间与弱收敛

定义 $\phi : X \to X^{**}, x \mapsto \{\phi(x) : f \mapsto f(x)\}$, 则有 ϕ 为线性映射, $D(\phi) = x$, 且有

$$\|\phi(x)\| = \sup_{f \in X^* - \{0\}} \frac{f(x)}{\|f\|} = \sup_{\|f\|=1} |f(x)| = \|x\|.$$

其中最后一步用到了 Hahn-Banach 定理的推论.

故 ϕ 为等距嵌入.

Definition 2.7

对 B 空间 X, 若 ϕ 是满射, 则称 X 是**自反的**. ♣

Example 2.10 $X = L^p[0,1](1 \le p < \infty)$, 则对 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 任意 $g \in L^q[0,1]$ 对应 $T_g : f \mapsto \int_0^1 fgdt$. 故 $L^q[0,1] \subseteq (L^p[0,1])^*$.

另一方面, 任意 $T \in (L^p[0,1])^*$, 对任意 E 为 Borel 可测集, 定义 $\nu(E) = T(\chi_E)$. 则可以验证 ν 是一个 Borel 测度, 且 $\nu \ll m$. 则由 Radon-Nikodym 定理, 存在 $g \in L^1[0,1]$, 使得 $T(1_E) = \nu(E) = \int_0^1 1_E gdt$.

进而对任何 step function f, 有 $T(f) = \int_0^1 fgdt$. 再利用逼近, 有任意 $f \in L^p[0,1], T(f) = \int_0^1 fgdt$. 则只需证 $g \in L^q[0,1]$.

若 $1 < p < \infty$, 则令 $B_N = \{x : |g(x)| \le N\}, f_N = g\chi_{B_N}|g|^{q-2}$, 则

$$|f_N|^p = \chi_{B_N}|g|^{(q-1)p} \le N^q \Rightarrow f_N \in L^p[0,1].$$

进而 $T(f_N) = \int_{B_N} |g|^q dt$. 另一方面

$$T(f_N) \le \|T\|\|f_N\|_p = \|T\|(\int_{B_N} |g|^q)^{\frac{1}{p}}.$$

则 $(\int_{B_N} |g|^q dt)^{\frac{1}{q}} \le \|T\|$. 令 $N \to \infty$ 有 $g \in L^q[0,1]$.

$p = 1$ 的情形类似, 在此省略, 进而我们证明了对 $1 \le p < \infty$, 有 $(L^p[0,1])^* = L^q[0,1]$.

但 $(L^\infty[0,1])^* \ne L^1[0,1]$: 因为 $L^\infty[0,1]$ 不可分, $L^1[0,1]$ 可分, 由 Banach 定理 (后面将证明), 若 X^* 可分, 则 X 可分.

故可知 $L^p[0,1](1 < p < \infty)$ 自反, 但 $L^1[0,1]$ 不自反.

Example 2.11 对 $X = C[0,1]$, 有

$$(C[0,1])^* = X^* = V_0[0,1] = \{g : [0,1] \to \mathbb{R} : g(0) = 0, g\text{右连续, 且} \bigvee_0^1 g < \infty\}.$$

其中 g 对应 $T_g : f \mapsto \int_0^1 fdg$.

对 $[0,1]$ 可以推广的紧度量空间 M, 进而推广到紧 Hausdorff 空间 M: 对紧 Hausdorff 空间 M, 可知 $C(M)^* = \{\mu : \mu\text{为}M\text{上复测度}\}$, 其中 μ 对应 $T : f \mapsto \int fd\mu$.

对 Hilbert 空间 X, 由 Riesz 表示定理可知 X 是自反的. 考虑 $\Phi : X^* \to X, f \mapsto y_f$, 其中 y_f 满足

$f(x)=(x,y_f)$. 则 Φ 是共轭线性映射.

再回忆 $T\in\mathcal{L}(X)$，我们定义了 $T^*\in L(x)$, 满足 $(Tx,y)=(x,T*y),\forall x,y\in X$. 注意到此时 T^* 也可以视为 $X^*\to X^*$ 的映射，满足如下的交换图表.

$$\begin{tikzcd} X^* \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "T^*"] & X \arrow[d, "T^*"] \\ X^* & X \arrow[l, "\Phi^{-1}"] \end{tikzcd}$$

再对一般的 B 空间 X,Y, 设 $T\in\mathcal{L}(X,Y)$, 则可以定义 $T^*:Y^*\to X^*, g\mapsto\{T*g:x\mapsto g(Tx)\}$. 则首先 $\|T*g\|\le\|T\|\|g\|$, 有 $\|T^*\|\le\|T\|$.

另一方面，任取 $x\in X$, 利用 Hahn-Banach 定理，存在 $g\in Y^*,\|g\|=1$, 且 $g(Tx)=\|Txx\|$. 则

$$\|Tx\|=\|g(Tx)\|=\|(T^*g)x\|\le\|T^*\|\|g\|\|x\|=\|T^*\|\|x\|.$$

进而 $\|T\|\le\|T^*\|$. 故 $\|T\|=\|T^*\|$.

故有等距嵌入 $*:\mathcal{L}(X,Y)\to\mathcal{L}(Y^*,X^*)$.

当 X,Y 自反时，记 $U:X\to X^{**},V:Y\to Y^{**}$ 为典范嵌入，则考虑

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[dd, bend right, "U"'] & Y \arrow[dd, bend left, "V"] \\ X^* & Y^* \arrow[l, "T^*"] \\ X^{*}{*} \arrow[r, "T^{**}"] & Y^{*}{*} \end{tikzcd}$$

这是一个交换图表：$\forall x\in X, g\in Y^*$, 有

$$(V\circ T(x))(g)=g(Tx)=(T^*g)(x)=(U(x))(T^*g)=(T^{**}\circ U(x))(g).$$

进而有

$$\mathcal{L}(X,Y)\overset{h_1}{\hookrightarrow}\mathcal{L}(Y^*,X^*)\overset{h_2}{\hookrightarrow}\mathcal{L}(X^{**},Y^{**}).$$

则由上面的讨论，h_1,h_2 为单射，$h_2\circ h_1$ 为满射，则 h_1 为满射.

Example 2.12 对 $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 为矩阵乘法，则 $A^*=A^T$. 复情形时 $A^*=A^H$.

Example 2.13 $X=L^2[0,1]$, 一组基为 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, 有 $X^*=X$, $\{e_n\}$ 也视为 X^* 的基. 设 $T\in\mathcal{L}(X), T(e_n)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}C_{n,m}e_m$.

则设 $T^*(e_n)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}C^*_{n,m}e_m$, 有

$$C^*_{n,m}=(T^*e_n,e_m)=(e_n,Te_m)=\overline{C_{m,n}}.$$

则可以确定 T^*.

Example 2.14 对 $K \in L^2([0,1]^2)$, 定义 $T_K : L^2[0,1] \to L^2[0,1], f \mapsto \{T_k(f) : x \mapsto \int_0^1 K(x,y)f(y)dy$. 则

$$(f, T_k^* g) = (T_k f, g) = \int_0^1 T_k(f)(x)g(x)dx = \int_0^1\int_0^1 K(x,y)f(y)g(x)dxdy = \int_0^1 f(y)\int_0^1 K(x,y)g(x)dxdy.$$

则 $T_k^*(g)(y) = \int_0^1 K(x,y)g(x)dx$.

下面讨论弱收敛与弱 * 收敛的概念.

Definition 2.8

X 为 B 空间, 称 x_n **弱收敛**到 x, 记为 $x_n \rightharpoonup x$, 若 $\forall f \in X^*, f(x_n) \to f(x)$. ♣

Example 2.15 $X = L^2[0,1]$, 令 $e_n = e^{2\pi i t} \in X$, 它没有收敛子列, 但任意 $g \in L^2[0,1] = X^*$, $\|g\|_2^2 = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |(e_n, g)|^2 < \infty$, 则 $(e_n, g) \to 0$, 即 $e_n \rightharpoonup 0$.

Theorem 2.13 (Banach)

对 X 为 B 空间, 若 X^* 可分, 则 X 可分. ♡

证明 定义单位球面 $\partial S(X^*) = \{g \in X^* : \|g\| = 1\}$, 则对 X^* 的可数稠密子集 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 有 $\{g_n = \frac{f_n}{\|f_n\|}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 $\partial S(X^*)$ 的可数稠密子集, 进而它也可数.

取 $x_m \in X$, 使得 $\|x_m\| = 1, g_m(x_m) > \frac{1}{2}$. 并令 $X_0 = \overline{\text{span}\{x_m\}}$, 我们只需证 $X_0 = X$.

否则若存在 $x_0 \notin X_0$, 则由 Hahn-Banach 定理的推论, 存在 $g \in \partial S(X^*)$, 使得 $g(x_0) = d(x_0, X_0) > 0, g(X_0) = 0$. 又由于 $\{g_m\}$ 稠密, 取 $\|g_m - g\| < \frac{1}{4}$.

但另一方面 $\|g_m - g\| \geq \|g_m(x_m) - g(x_m)\| > \frac{1}{2}$, 矛盾! □

Theorem 2.14 (Pettis)

自反空间的闭子空间自反. ♡

证明 设 X_0 为自反空间 X 的闭子空间, 则定义 $T : X^* \to X_0^*, f \mapsto f|_{X_0}$ 为限制映射, 则有 $T^* : X_0^{**} \to X^{**}, F_0 \mapsto \{T^*F_0 : f \mapsto F_0(Tf)\}$.

则由 X 自反, 存在 $x_0 \in X$, 使得 $\forall f \in X^*, (T^*F_0)(f) = f(x_0)$. 若 $x_0 \notin X_0$, 则由 Hahn-Banach 定理的推论, 存在 $\tilde{f} \in X^*, \|\tilde{f}\| = 1$, 且 $\tilde{f}(x_0) = d > 0, \tilde{f}(X_0) = 0$, 进而 $T\tilde{f} = 0$. 则

$$\tilde{f}(x_0) = (T^*F_0)(\tilde{f}) = F_0(T\tilde{f}) = 0.$$

与 $\tilde{f} > 0$ 矛盾!

故 $x_0 \in X_0$, 则任意 $g \in X_0^*$, 仍然由 Hahn-Banach 定理, 存在 $\tilde{g} \in X^*$ 使得 $T\tilde{g} = g$. 则

$$g(x_0) = \tilde{g}(x_0) = (T^*F_0)(\tilde{g}) = F_0(T\tilde{g}) = F_0(g).$$

即 $\forall g \in X_0^*, F_0(g) = g(x_0)$, 则 X_0 自反. □

由此我们来证明下面的紧性定理.

Theorem 2.15 (Eberlein-Smulian)

自反空间 X 的单位(闭)球是弱(自)列紧的. ♡

证明 任取 $\{x_n\} \in S(X)$, 取 $X_0 = \overline{\text{span}\{x_n\}}$ 为 X 的闭子空间，则由 Pettis 定理，X_0 自反. 且显然它可分，则 X_0^{**} 可分，故由 Banach 定理，X_0^* 可分. 设其可数稠密子集为 $\{g_m\}_{m=1}^{\infty}$.

则首先取 x_n 的子列 $x_{n_k}^1$ 使得 $g_1(x_{n_k}^1)$ 收敛，再取 $x_{n_k}^1$ 的子列 $x_{n_k}^2$ 使得 $g_2(x_{n_k}^2)$ 收敛，以此类推，通过对角线论证，存在子列 x_{n_k} 使得 $g_m(x_{n_k})$ 对任意 $m \geq 1$ 收敛.

利用 X_0 自反，存在 $h_{n_k} \in X_0^{**}$ 使得 $g(x_{n_k}) = h_{n_k}(g), \forall g \in X_0^*$, 进而对任意 $m \geq 1$, $\lim\limits_{k\to\infty} h_{n_k}(g_m)$ 存在，记为 $h(g_m)$. 则由 Banach-Steinhaus 定理，存在 $h \in X_0^{**}$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} h_{n_k}(g) = h(g), \forall g \in X_0^*$.

再次由 X_0 自反，存在 $x_0 \in X_0$ 对应 $h \in X_0^{**}$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty} g(x_{n_k}) = g(x_0), \forall g \in X_0^*$.

故总而言之，存在子列 $x_{n_k} \rightharpoonup x_0$ in X_0. 则任意 $f \in X^*$, 令 $g = f|_{X_0} \in X_0^*$, 则

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} g(x_{n_k}) = g(x_0) = f(x_0).$$

则 $x_{n_k} \rightharpoonup x$ in X. □

Definition 2.9

对 B 空间 X, 设 $f_n \in X^{**}$ **弱收敛**于 $f \in X^*$, 记为 $\omega - \lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, 是指 $\forall x \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. ♣

Remark 可以利用基 $B(g; x_1, \cdots, x_n; \varepsilon) = \{f \in X^* : \max\limits_{1\leq i\leq m} |f(x_i) - g(x_i)| < \varepsilon\}$ 来刻画 * 弱拓扑，并可以用任意网都有收敛子网来刻画 * 弱紧性.

则显然 X^* 中的弱收敛可以推出 * 弱收敛，若 X 自反，则反过来也成立.

Example 2.16 设 $X = C[0,1]$, 取其稠密子集 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, 则由 Banach-Steinhaus 定理，

$$\omega - \lim_{n\to\infty} J_n = J \in X^* \iff \forall m \geq 1, J_n(f_m) \to J(f_m).$$

则再次定义 X^* 上的度量 $\rho(J, J') = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{|J(f_m) - J'(f_m)|}{2^m(1+\|f_m\|_\infty)}$, 有 $\omega - \lim\limits_{n\to\infty} J_n = J \iff J_n \xrightarrow{\rho} J$.

在单位闭球 $S(X^*)$ 中，由对角线原理，$S(X^*)$ 列紧，进而由为度量空间，有 $(S(X^*), \rho)$ 紧.

此外由上可知若 X 可分，则 $S(X^*)$ 是 * 弱自列紧的.

Example 2.17 设 $S : M = [0,1] \to M$ 的连续满射，$\|S\| = 1$, 则它诱导了 $C(M)$ 上的线性算子 $T : X \to X, f \mapsto f \circ S$. 我们知道

$$\partial_+ S(X^*) = \{J \in X^* : \|J\| = 1, J \geq 0, J(1) = 1\} = \mathcal{M}(M).$$

其中 $\mathcal{M}$ 为 M 上的 Borel 概率测度. $\partial_+ S(X^*)$ 为 $S(X^*)$ 为关于 ρ 的闭凸子集，故也在 * 弱收敛下是紧

的。

可以定义 $T^*: \partial_+ S(X^*) \to \partial_+ S(X^*), J \mapsto \{T^*J: f \mapsto J(Tf) = J(f\circ S)\}$. 断言：存在 $J \in \partial_+ S(X^*)$ 使得 $T^*J = J$! (比较 Scahuder 定理)

任取 $J_0 \in \partial_+ S(X^*)$, 定义 $J_{n+1} = T^*J_n$, 定义 $\tilde{J}_N = \frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} J_n$, 则由 $(\partial_+ S(X^*), \rho)$ 紧，存在收敛子列 $\tilde{J}_{N_i} \xrightarrow{\rho} J \in \partial_+ S(X^*)$. 则

$$(T^*J)(f) = J(f\circ S) = \lim_{i\to\infty} \tilde{J}_{N_i}(f\circ S).$$

注意到

$$\tilde{J}_{N_i}(f) = \frac{1}{N_i}\sum_{n=1}^{N_i}(T^*)^n J_0(f) = \frac{1}{N_i}\sum_{n=1}^{N_i} J_0(f\circ S^n).$$

进而

$$\tilde{J}_{N_i}(f) - \tilde{J}_{N_i}(f\circ S) = \frac{1}{N_i}(J_0(f\circ S^{n+1}) - J_0(f)) \to 0.$$

其中中间的求和项被消掉了. 则 $(T^*J)(f) = Jf$, 即 $T^*J = J$.

事实上，对一般的 M 为紧 Hausdorff 空间也有类似的结果.

最后定义算子的收敛.

Definition 2.10

对 B^* 空间 X, Y, 以及 $T_n, T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

*(1) 若 $\|T_n - T\| \to 0$, 则称 T_n **一致收敛**到 T, 记为 $T_n \rightrightarrows T$.*

*(2) 若 $\forall x \in X, \|T_n x - Tx\| \to 0$, 则称 T_n **强收敛**到 T, 记为 $T_n \to T$.*

*(3) 若 $\forall x \in X, y \in Y^*, \lim\limits_{n\to\infty} f(T_n x) = f(Tx)$, 则称 T_n **弱收敛**到 T, 记为 $T_n \rightharpoonup T$.*

♣

Example 2.18 显然一致收敛 ⇒ 强收敛 ⇒ 弱收敛. 但反之不成立!

(1) $X = Y = l^2, T: X \to X, (x_1, x_2, \cdots) \mapsto (x_2, x_3, \cdots)$, 定义 $T_n = T^n$, 则 $\|T_n e_{n+1}\| = \|e_1\|$, 进而 $\|T_n\| \geq 1$，故不一致收敛到 0.

但 $\forall x \in l^2, \|T_n x\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_{n+i}|^2} \to 0$, 故 T_n 强收敛到 0.

(2) $X = Y = l^2, S: X \to X, (x_1, x_2, \cdots) \mapsto (0, x_1, x_2, \cdots)$, 定义 $S_n = S^n$, 则 $\|S_n x\| = \|x\|$, 进而不强收敛到 0.

但任意 $f = (y_1, y_2, \cdots) \in (l^2)^* = l^2$, 有

$$|\langle f, S_n x\rangle| = |\sum_{i=1}^{\infty} y_{i+n}x_i| \leq \|x\|\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} y_{n+i}^2} \to 0.$$

则 S_n 弱收敛到 0.

2.6 线性算子的谱

Definition 2.11

对 B 空间 X 上的闭算子 $T : X \to X$, 则对 $\lambda \in \mathbb{C}$,

(1) λ 称为**正则值**，若 $(\lambda I - T)$ 为单射，且 $R(\lambda I - T) = X$，$(\lambda I - T)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. 正则值的集合记作 $\rho(T)$.

(2) λ 称为属于**点谱**$\sigma_p(T)$，若 $\lambda I - T$ 不为单射，即 λ 为 T 的特征增值.

(3) λ 称为属于**连续谱**$\sigma_c(T)$, 若 $\lambda I - T$ 是单射，但 $R(\lambda I - T) \subsetneq X$, 且 $\overline{R(\lambda I - T)} = X$.

(4) λ 称为属于**剩余谱**$\sigma_r(T)$, 若 $\lambda I - T$ 是单射，且 $\overline{R(\lambda I - T)} \neq X$.

后面三种情况统称为谱，谱集为 $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T)$.

Example 2.19 当 X 有限维时，有 $\mathbb{C} = \rho(T) \cup \sigma_p(T)$.

Example 2.20 对 $X = l^2$, 任意 $A \subseteq \mathbb{C}$ 为非空有界闭集，则 A 有可数稠密子集 $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$.

定义 $T : X \to X, (x_i) \mapsto (\lambda_i x_i)$, 则 $\|T\| \le \sup\limits_{i\ge1} |\lambda_i|$, 进而 $T \in L(l^2)$.

若 $\lambda \notin A$, 则 $d = d(\lambda, A) > 0$，此时显然 $(\lambda I - T)$ 是单射. 任取 $y = (y_i) \in l^2$, 则取 $x = (\frac{y_i}{\lambda-\lambda_i})$, 有

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(\frac{y_i}{\lambda-\lambda_i})^2} \le [\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty}(\frac{1}{\lambda-\lambda_i})^2]^{\frac12} \le \|y\|\frac{1}{d}.$$

进而 $x \in l^2$, 且 $(\lambda I - T)^{-1} \in L(X)$, 进而 $\lambda \in \rho(T)$.

若 $\lambda = \lambda_i$, 则 $(\lambda I - T)e_i = 0$, 故 $\lambda \in \sigma_p(T)$.

后面将会证明 $\sigma(T)$ 为闭集，则只能 $\sigma(T) = A$.

Example 2.21 设 $X = C[0,1]$ 或 $L^2[0,1]$. 定义 $T : X \to X, f \mapsto \{T : t \mapsto tf(t)\}$. 则显然 $\lambda I - T$ 为单射, $\sigma_p(T) = \emptyset$.

若 $\lambda \notin [0,1]$，则任意 $g \in X$, 定义 $f(t) = \frac{g(t)}{\lambda-t} \in X$, 且 $(\lambda I - T)f = g$, 进而 $R(\lambda I - T) = X$, 故 $\lambda \in \rho(T)$.

若 $\lambda \in [0,1]$，(1) 若 $X = C[0,1]$, 若对 $g \in X$, $f(t) = \frac{g(t)}{\lambda-t} \in X$, 则只能 $g(\lambda) = 0$, 故 $R(\lambda I - T) \subseteq \{g \in C[0,1] : g(\lambda) = 0\}$, 后者是闭集，故

$$\overline{R(\lambda I - T)} \subseteq \{g \in C[0,1] : g(\lambda) = 0\} \subsetneq X.$$

故 $\lambda \in \sigma_r(T)$. 则 $\rho(T) = \mathbb{C} - [0,1], \sigma_r(T) = [0,1]$.

(2) 若 $X = L^2[0,1]$, 首先 $1 \notin R(\lambda I - T)$, 故 $\lambda \notin \rho(T)$. 且对任意 $g \in X$，定义

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{g(t)}{\lambda-t} & |\lambda - t| \ge \frac1n \\ 0 & |\lambda - t| < \frac1n \end{cases}$$

则

$$(\lambda I - T) f_n = g_n = \begin{cases} g(t) & |\lambda - t| \geq \frac{1}{n} \\ 0 & |\lambda - t| < \frac{1}{n} \end{cases}$$

进而 $g_n \in R(\lambda I - T)$, 且 $g_n \xrightarrow{L^2} g$, 故 $\overline{R(\lambda I - T)} = X, \lambda \in \sigma_c(T)$. 则有 $\rho(T) = \mathbb{C} - [0,1], \sigma_c(T) = [0,1]$.

Example 2.22 $X = L^2[0,1]$, 则定义

$$T : x \to X, f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi int} \mapsto Tf = \sum_{n \in \mathbb{Z}} -(2\pi n)^2 c_n e^{2\pi int}.$$

则 $D(f) = \{\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi int} : \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 < \infty, \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^4 |c_n|^2 < \infty\}$. 可以验证 T 是闭算子.

若 $\lambda = (2\pi n)^2$, 则 $T \sin(2\pi nt) = -(2\pi n)^2 \sin(2\pi nt)$, 故 $\lambda \in \sigma_p(T)$.

若 $\lambda \notin A = \{(2\pi n)^2 : n \in \mathbb{Z}\}$, 则令 $d = d(\lambda, A) > 0$, 此时容易验证 $(\lambda I - T)$ 为单射，且对 $g = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n e^{2\pi int}$, 若 $(\lambda I - T) f = g$, 则

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{d_n}{\lambda - (2\pi n)^2} e^{2\pi int}.$$

只需验证 $f \in D(T)$. 这是因为

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|d_n^2|}{(\lambda - (2\pi n)^2)^2} \leq \frac{1}{d^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |d_n|^2 < \infty.$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^4 \frac{|d_n^2|}{(\lambda - (2\pi n)^2)^2} \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} |d_n|^2 < \infty.$$

故 $(\lambda I - T)$ 为满射，故 $\rho(T) = \mathbb{C} - A, \sigma(T) = \sigma_p(T) = A$.

下面来研究一般的谱集的结构.

Theorem 2.16

对 B 空间 $X, T \in \mathcal{L}(X)$, 则

(1) $\sigma(T) \subseteq \mathbb{C}$ 为非空有界闭集.

(2)(Gelfand 公式) $r_\sigma(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| = \inf_{n \geq 1} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} < \infty$.

证明 (1) 首先证明 $\sigma(T)$ 有界. 对 $|\lambda| > \|T\|$, 考虑 $\lambda I - T = \lambda(I - S)$, 其中 $S = \frac{1}{\lambda} T, \|S\| < 1$. 故考虑 $\{S_n = \sum_{k=0}^{n} S^k\}$, 它是 Cauchy 列;

$$\|S_{n+p} - S_n\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|S^k\| \to 0.$$

则可以定义极限为 $\sum_{n=0}^{\infty} S^n = \lim_{n \to \infty} S_n$, 不难有它为 $(I - S)$ 的逆. 故 $I - S$ 可逆，有 $\sigma \in \rho(T)$. (注意到我们证明了如下命题：若 $\|S\| < 1$，则 $(I + S)$ 可逆.)

再证明 $\rho(T)$ 是开集. 若 $\lambda_0 \in \rho(T)$, 则记 $R_{\lambda_0}(T) = (\lambda_0 I - T)^{-1}$. 当 $|\lambda - \lambda_0|$ 充分小时，对 $S =$

$(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}(T)$, 有 $\|S\|<1$. 注意到

$$\lambda I-T=\lambda_0 I-T+(\lambda-\lambda_0)I=(\lambda_0 I-T)(I+S).(*)$$

由于 $(\lambda_0 I-T)$ 和 $I+S$ 都可逆，有 $\lambda I-T$ 可逆，进而 $\lambda\in\rho(T)$.

再证明 $\sigma(T)$ 非空. 考虑 $R:\rho(T)\to\mathcal{L}(X),\lambda\mapsto R_\lambda(T)=(\lambda I-T)^{-1}$，是解析映射 (处处可微称为解析，可微在之前定义过): 当 $\lambda_0\in\rho(T)$ 且 $|\lambda-\lambda_0|$ 充分小时，由 (*) 有

$$R_\lambda(T)=(I+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\lambda-\lambda_0)^n R_{\lambda_0}(T))R_{\lambda_0}(T).$$

则此时

$$\frac{R_\lambda(T)-R_{\lambda_0}(T)}{\lambda-\lambda_0}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\lambda-\lambda_0)^n R_{\lambda_0}(T).$$

极限存在，故解析. 注意到当 $|\lambda|>\|T\|$ 时，有

$$R_\lambda(T)=\lambda^{-1}(I-\frac{T}{\lambda})^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n}{\lambda^{n+1}}.$$

进而

$$\|R_\lambda(T)\|\leq\frac{1}{|\lambda|}\frac{1}{1-\frac{\|T\|}{|\lambda|}}=\frac{1}{|\lambda|-\|T\|}\to 0,|\lambda|\to\infty.$$

若 $\sigma(T)=\emptyset$, 有 $\rho(T)=\mathbb{C}$，则 $R:\mathbb{C}\to\mathcal{L}(X)$ 有界.

我们说明如下的类似 Liouville 定理：对 B 空间 Y, 若 $\phi:\mathbb{C}\to Y$ 有界解析，则它为常值. 这是因为对任意 $f\in Y^*, f\circ\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 为解析有界函数，则由经典的 Liouville 定理可知它为常值，又由于 Hahn-Banach 定理的推论，Y^* 可以分离 Y 中的点，故 ϕ 为常值.

则有 $\forall\lambda\in\mathbb{C}$，有 $R_\lambda(T)$ 均相同，显然矛盾！故 $\sigma(T)\neq\emptyset$.

(2) 再证明 Gelfand 公式. 首先注意到 $a_n=\|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ 是次可加序列，则由数学分析中的练习可知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，且等于 $\inf\limits_{n\geq 1}a_n$.

再考虑 $|\lambda|>\|T\|$ 时，有 $\lambda\in\rho(T)$, 进而 $r_\sigma(T)\leq\|T\|$，则 $r_\sigma(T^n)\leq\|T^n\|$.

若 $\lambda^n\in\rho(T^n)$, 则 $\lambda^n I-T^n=(\lambda I-T)\circ P=P\circ(\lambda I-T)$ 可逆, 其中 $P=\lambda^{n-1}+\lambda^{n-2}T+\cdots+T^n$, 进而有 $\lambda I-T$ 可逆（为什么？）, $\lambda\in\rho(T)$. 则 $(r_\sigma(T))^n\leq r_\sigma(T^n)$, 即 $r_\sigma(T)\leq\|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

另一方面，仍然考虑 $R:\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|>r_\sigma(T)\}\to\mathcal{L}(X)$. 任取 $f\in(\mathcal{L}(X))^*$, 有 $f\circ R$ 解析，回忆 $R(T)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$，则有 $f\circ R(T)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f(T^n)}{\lambda^{n+1}}$.

进而对任意 $f\in(\mathcal{L}(X))^*,\varepsilon>0$, 有 $\{\frac{f(T^n)}{(r_\sigma(T)+\varepsilon)^{n+1}}\}_{n\geq 1}$ 有界. 则固定 $\varepsilon>0$, 定义 $T_n:(\mathcal{L}(X))^*\to\mathbb{R}, f\mapsto\frac{f(T^n)}{(r_\sigma(T)+\varepsilon)^{n+1}}$, 进而对任意 $f\in(\mathcal{L}(X))^*, T_n(f)(n\geq 1)$ 有界，则共鸣定理给出

$$\sup_{n\geq 0}\|T_n\|=\sup_{n\geq 0}\|\frac{T^n}{(r_\sigma(T)+\varepsilon)^{n+1}}\|.$$

进而 $\limsup\limits_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\leq r_\sigma(T)+\varepsilon$, 令 $\varepsilon\to 0$, 并结合一开始的观察有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\leq r_\sigma(T)$. 故得证. □

可以进一步分析自伴算子的谱集结构.

Proposition 2.8

X 为 H 空间, $T \in \mathcal{L}(X)$ 为自伴算子, 则 $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}, \sigma_r(T) = \emptyset$.

证明 先对任意 $\lambda = a + ib$, 其中 $|b| \neq 0$. 考虑

$$\begin{aligned}((\lambda I - T)x, (\lambda I - T)x) =&((aI - T)x + ibx, (aI - T)x + ibx)\\ &= \|(aI - T)x\|^2 + |b|^2\|x\|^2 + ((aI - T)x, ibx) + (ibx, (aI - T)x)\\ &\geq |b|^2\|x\|^2.\end{aligned}$$

即 $\|\lambda I - Tx\| \geq |b|\|x\|$. 由 $b \neq 0$, 有 $\lambda I - T$ 为单射.

再来证 $\lambda I - T$ 是满的, 一般的办法是分为如下两步:

(1) $R(\lambda I - T)$ 是闭的: 考虑 $y_n = (\lambda I - T)x_n \to y$, 则

$$\|(\lambda I - T)(x_n - x_m)\| \geq |b|\|x_n - x_m\|.$$

由 $\{y_n\}$ 为 Cauchy 列, 有 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列, 进而 $x_n \to x, y = (\lambda I - T)x \in R(\lambda I - T)$.

(2) $R(\lambda I - T)^{\perp} = \{0\}$: 若对 $y \in X$ 使得 $\forall x \in X, ((\lambda I - T)x, y) = 0$, 则 $(x, (\bar{\lambda} I - T^*)y) = 0$, 只能 $(\bar{\lambda} I - T)y = 0$. 则同前有 $\bar{\lambda} I - T$ 是单射, 有 $y = 0$.

再证关于剩余谱的命题. 任取 $\lambda \in \sigma(T) - \sigma_p(T)$, 则 $\lambda \in \mathbb{R}$, 同上由于

$$R(\lambda I - T)^{\perp} = \{y : (x, (\bar{\lambda} I - T)y) = 0, \forall x \in X\} = N(\bar{\lambda} I - T^*) = N(\lambda I - T) = \{0\}.$$

故 $\overline{R(\lambda I - T)} = X$, 即 $\lambda \in \sigma_c(T)$. □

Example 2.23 $X = l^2, T : (x_1, x_2, \cdots) \mapsto (0, x_1, \cdots)$ 为右移算子, 首先注意到 $\|T^n\| = 1$, 则 $r_\sigma(T) = 1$. 且显然 $(\lambda I - T)x = (\lambda x_1, \lambda x_2 - x_1, \lambda x_3 - x_2, \cdots) = 0 \iff x = 0$, 故为单射, 则 $\sigma_p(T) = 0$.

若 $|\lambda| < 1$, 则令 $w = (1, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}^2, \cdots) \in l^2$, 此时有任意 $x \in l^2, ((\lambda I - T)x, w) = 0$, 故 $\overline{R(\lambda I - T)} \neq l^2$, 即 $\lambda \in \sigma_r(T)$.

若 $|\lambda| = 1$. 则若 $y = (\lambda I - T)x \in l^2$, 有

$$\lambda^{n+1}x_{n+1} = y_1 + \lambda y_2 + \cdots + \lambda^n y_{n+1}.$$

即

$$x_N = \bar{\lambda}^N y_1 + \bar{\lambda}^{N-1} y_2 + \cdots + \bar{\lambda} y_N = x_N.$$

则若 $y \in R(\lambda I - T)$, 必须有

$$\sum_{N=1}^{\infty} |\bar{\lambda}^N y_1 + \bar{\lambda}^{N-1} y_2 + \cdots + \bar{\lambda} y_N|^2 < \infty.$$

故 $(1, 0, 0, \cdots) \notin R(\lambda I - T)$.

另一方面，若 $0 \neq y = (y_1, y_2, \cdots) \in R(\lambda I - T)^*$，则任意 $x \in l^2$, 有

$$\bar{y_1}\lambda x_1 + \bar{y_2}(\lambda x_2 - x_1) + \bar{y_3}(\lambda x_3 - x_2) + \cdots = 0.$$

即

$$x_1(\lambda\bar{y_1} - \bar{y_2}) + x_2(\lambda\bar{y_2} - \bar{y_3}) + \cdots = 0.$$

故 $y = y_1(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}^2, \cdots) \notin l^2$, 矛盾！故 $R(\lambda I - T)^{\perp} = \{0\}$, 进而 $\overline{R(\lambda I - T)} = l^2$, 则 $\lambda \in \sigma_c(T)$.

综上有 $\sigma_r(T) = \{\lambda : |\lambda| < 1\}, \sigma_c(T) = \{\lambda : |\lambda| = 1\}, \sigma_p(T) = \emptyset, \rho(T) = \{\lambda : |\lambda| > 1\}$.

根据上面的讨论，并计算左移算子的谱，思考 T 和 T^* 的谱集之间有什么关系？

最后来考虑所谓的谱映射问题. 对 B 空间 X 和 $T \in \mathcal{L}(X)$, 有 $\sigma(T) \subseteq \mathbb{C}$ 为谱集.

(1) 设 $p(T) = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n T^n \in \mathcal{L}(X)$ 为多项式函数，可以验证 $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T) = \{p(t) : t \in \sigma(T)\}$.

(2) 设 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ 为解析的, 其中 Ω 是包含 $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq r_\sigma(T)\}$ 的区域, 则有展开 $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, 满足存在 $R > r_\sigma(T)$ 使得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| R^n < \infty$.

考虑定义 $f(T) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n T^n = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} a_n T^n$. 定义是合理的：考虑 $M = \sup\limits_{n\geq 0} |a_n| R^n < \infty$, 且存在 $R' < R$ 使得 $\|T^n\| \leq (R')^n$. 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n T^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{R^n}(R')^n < \infty.$$

进而 $\{\sum\limits_{n=0}^{N} a_n T^n\}_{N\geq 0}$ 为 Cauchy 列，极限存在.

事实上仍然有 $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$. 考虑 $\lambda = f(u_0) \in f(\sigma(T)), u_0 \in \sigma(T)$, 则 $f(t) - f(u_0) = (t - u_0)g(t), g(t)$ 解析. 此时 $f(T) - \lambda I \overset{1}{=} (T - u_0 I) \circ g(T) \overset{2}{=} g(T) \circ (T - u_0 I)$.

注意到若 $T - u_0 I$ 不为单射，则由 2 有 $f(T) - \lambda I$ 不为单射；若 $T - u_0 I$ 不为满射，则由 1 有 $f(T) - \lambda I$ 不为满射. 故 $\lambda \in \sigma(f(T))$.

反之若 $\lambda \notin \sigma(f(T))$, 则 $\lambda - f(z) = 0$ 在 $\sigma(T)$ 上无解. 设 $\lambda - f(z)$ 在 $\{|z| \leq R\}$ 上有有限个零点 $t_1, \cdots, t_m \notin \sigma(T)$, 此时有

$$\lambda I - T = (t_1 I - T) \cdots (t_m I - T) g(T).$$

其中 g 无零点，且有与上面类似的交换性质，则 $\lambda I - T$ 可逆等价于 $g(T)$ 可逆. 又 $g(T) \circ \frac{1}{g}(T) = I$, 有 $g(T)$ 可逆，则 $\lambda \notin \sigma(f(T))$. 综上则证明了想要的结果 $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$.

(3) 思考：对一般仅连续的 $f : \sigma(T) \to \mathbb{C}$, 是否有类似的讨论？（考虑多项式逼近）

Chapter 3 紧算子与 Fredholm 算子

3.1 紧算子

Definition 3.1

对 B 空间 X, Y, 对 $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ 且 $D(X) = T$, 若 $\dim R(T) < \infty$, 则称 T **有限秩**. 有限秩映射全体构成的集合记为 $\mathcal{F}(X,Y)$.

考虑 $\forall y_0 \in Y, 0 \neq f_0 \in X^*$, 定义 $(y_0 \otimes f_0): X \to Y, x \mapsto f_0(x)y_0$, 则它为秩为 1 的映射.

反之若 $\dim R(T) = 1$, 设 $R(T) = \{\lambda y_0\}$, 则只能 $T(x) = c(x)y_0$, 其中 c 为线性映射. 由 Hahn-Banach 定理，存在 $f_0 \in X^*, f_0(y_0) = 1$, 则 $c(x) = f_0(T(x)) \in X^*$, 故 $T = y_0 \otimes c$.

更一般地，可以归纳证明 $\dim R(T) = n$ 当且仅当 T 形如 $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i \otimes f_i$, 其中 $0 \neq f_i \in X^*, y_i \in Y$ 且互不相关.

若 $\dim_Y = \infty$，取 $T = \sum\limits_{t=1}^{\infty} \frac{1}{2^t} y_t \otimes f_t$，其中 $f_t \in X^*, y_t \in Y, \|f_t\| = \|y_t\| = 1$，则 $T \in \overline{\mathcal{F}(X,Y)} - \mathcal{F}(X,Y)$.

Definition 3.2

对 B 空间 X, Y, 若线性映射 $f: X \to Y$ 把有界集映为列紧集，则称之为**紧算子**. X 到 Y 紧算子的全体记为 $\mathcal{C}(X,Y)$.

Example 3.1 $\mathrm{Id}_X \in \mathcal{C}(X,X) = \mathcal{C}(X) \iff \dim_X < \infty$.

Example 3.2 $K(x,y) \in C([0,1]^2)$, 则回忆 $T_K : X = C([0,1]) \to C([0,1]), f \mapsto \{T_K(f) : x \mapsto \int_0^1 K(x,y)f(y)dy.\}$, 由 Arzela-Ascoli 定理，若证 T_K 为紧算子，只需证 $T_K(B_X(0,1))$ 一致有界且等度连续.

一致有界：$\|T_k f\| \leq \max\limits_{x,y} |K(x,y)|$.

等度连续：$|T_K f(x) - T_K f(y)| \leq \max\limits_{z} |K(x,z) - K(y,z)|$. 由 K 一致连续，故任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $z \in [0,1], |x-y| < \delta$, 有 $|K(x,z) - K(y,z)| \leq \delta$, 故等度连续.

则 T_K 为紧算子.

紧算子有如下基本性质.

Proposition 3.1

(1) $\overline{\mathcal{F}(X,Y)} \subseteq \mathcal{C}(X,Y)$.

(2) $\mathcal{C}(X,Y)$ 为 $\mathcal{L}(X,Y)$ 的闭子空间.

(3) $T \in \mathcal{L}(X,Y), S \in \mathcal{L}(Y,Z)$，若 T 或者 S 紧，则 $S \circ T \in \mathcal{C}(X,Z)$.

(4) 若 $T \in \mathcal{C}(X,Y), X_0 \subseteq X$ 为闭子空间，则 $T|_{X_0} \in \mathcal{C}(X,Y)$.

(5) $T \in \mathcal{C}(X,Y)$, 则 $R(T)$ 可分.

证明

(1) 设 $T_n \in \mathcal{F}(X,Y), T_n \to T \in \mathcal{L}(X,Y)$. 则任意 $\varepsilon > 0$，取 $\|T - T_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$, 故任意 $x \in B_X(0,1), \|Tx - T_n x\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

显然 $T_n(B_X(0,1))$ 列紧，则取其有限 $\frac{\varepsilon}{2}$-网，故它也是 $T(B_X(0,1))$ 的 ε-网.

(2) 与 (1) 证明思路基本一致，在此省略.

(3)(4) 显然.

(5) 由于 $R(T) = \cup_{n=1}^{\infty} T(B_X(0,n)) = \cup_{n=1}^{\infty} nT(B_X(0,1))$, 由 $T(B_X(0,1))$ 列紧（故完全有界，进而可分），故 $R(T)$ 可分. □

Example 3.3 根据上面的命题, 如果一个算子能够被有限秩算子逼近, 则它是紧算子. 仍然考虑如上的例子: $K(x,y) \in L^2([0,1]^2)$, 定义 $T_K : X = L^2([0,1]) \to L^2([0,1]), f \mapsto \{T_K(f) : x \mapsto \int_0^1 K(x,y)f(y)dy.\}$.

则利用多项式 $p_n(x,y) \to K(x,y)$ 逼近，则

$$\|T_K - T_{p_n}\| \le \sup_{\|f\|=1} \|\int_0^1 (K(x,y) - p_n(x,y))f(y)dy\|_2 \le \|K - p_n\|_2.$$

故 $T_{p_n} \to T_K$, 且注意到 $R(T_{p_n}) \subseteq \mathrm{span}\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$, 故 T_{p_n} 有限秩，则 T_K 为紧算子.

Definition 3.3

称 $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ 是**全连续**的，是指若 $x_n \rightharpoonup x$, 则有 $Ax_n \to A_x$.

全连续算子与紧算子之间有如下的关系.

Proposition 3.2

若 $A \in \mathcal{L}(X,Y)$:

(1) A 为紧算子，则全连续.

(2) 若 X 自反，则反过来也成立，即全连续算子是紧的.

证明 (1) 设 $A \in \mathcal{C}(X,Y), x_n \rightharpoonup x$, 若 Ax_n 不收敛到 Ax, 则不妨设 $\forall n, \|Ax_n - Ax\| > \varepsilon$. 则任取 $g \in Y^*$,

由于 $x_n \rightharpoonup x$, 有

$$g(Ax_n) = (A^*g)(x_n) \to (A^*g)(x) = g(Ax).$$

又 x_n 有界，则 $\{Ax_n\}$ 列紧，进而设 $Ax_{n_k} \to z$, 有 $\|z - Ax\| \geq \varepsilon$. 故 $z \neq Ax$, 与 $g(Ax_{n_k}) \to g(Ax)$ 矛盾!

(2) 任取 $\{Ax_n\} \subseteq T(B_X(0,1))$, 由自反空间的单位闭球弱自列紧，存在 $x_{n_k} \rightharpoonup x$，由全连续有 $Ax_{n_k} \to Ax$, 故 $\{Ax_n\}$ 列紧，即 A 为紧算子. □

Example 3.4 再次考虑上面的例子，对 $X = L^2[0,1]$，和之前一样定义 T_K. 对 $f_n \rightharpoonup f$, 则 $\sup\limits_n \|f_n\| < \infty$, 且任意 $g \in L^2[0,1]$，有 $\int_0^1 g(y)(f_n(y) - f(y))dy \to 0$.

特别地，对 a.e. $x \in [0,1]$, 取 $g(y) = K(x,y)$, 有 $\int_0^1 K(x,y)(f_n(y) - f(y))dy \to 0$. 则由控制收敛定理，$T_k f_n \to T_k f$. 故 T_K 全连续，由于 $X = L^2[0,1]$ 为自反空间，有 T_K 为紧算子.

之前证明了 $\overline{\mathcal{F}(X,Y)} \subseteq \mathcal{C}(X,Y)$. 何时取等号?

考虑 Y 为 Hilbert 空间，给定 $T \in \mathcal{C}(X,Y), n \geq 1$, 则有 $TB_X(0,1) \subseteq \cup_{i=1}^k B_Y(y_i, \frac{1}{3n})$. 令 $M = \operatorname{span}\{y_1, \cdots, y_k\}$, 则 $T_n = P_M \circ T \in \mathcal{F}(X,Y)$, 其中 P_M 为投影.

则任意 $x \in B_X(0,1)$, 取 y_i 使得 $\|Tx - y_i\| < \frac{1}{3n}$，由 $\|P_M\| \leq 1$, 有 $\|P_M(Tx) - y_i\| \leq \frac{1}{3n}$. 进而

$$\|Tx - T_n x\| \leq \|Tx - y_i\| + \|y_i - P_M(Tx)\| < \frac{2}{3n} < \frac{1}{n}.$$

故 $\|T - T_n\| \leq \sup\limits_{x \in B_X(0,1)} \|Tx - T_n x\| < \frac{1}{n}$. 故 T 可以由有限秩算子 T_n 逼近. 则此时 $\overline{\mathcal{F}(X,Y)} = \mathcal{C}(X,Y)$.

对一般的 B 空间 Y, 若存在 $\dim M < \infty$, 则存在 $P: Y \to Y$，满足 $R(P) = M, P|_M = \mathrm{Id}$，且 $\|P\| \leq c$(c 与 M 无关), 则通过和上面一样的论证，此时有 $\overline{\mathcal{F}(X,Y)} = \mathcal{C}(X,Y)$. 自然地我们和在 Hilbert 空间中一样取所谓的投影映射，在此之前需要做关于一般空间中投影的如下讨论.

对于任意（不一定有限维）闭子空间 M, 若存在 $\phi \in \mathcal{L}(Y)$, 使得 $\phi|_M = \mathrm{Id}, R(\phi) = M$, 则取 $M_1 = \ker\phi$ 为闭空间，且 $Y = M \oplus M_1$. 反之，若有闭子空间的直和分解 $Y = M \oplus M_1$, 则有投影，故投影可以视为等价于闭子空间直和分解.

Proposition 3.3

对 B 空间 Y 和子空间 M，若 $\dim M < \infty$ 或 $\operatorname{codim} M < \infty$, 则存在如上的分解（投影）. ♠

证明 (1) 设 $M = \operatorname{span}\{y_1, \cdots, y_k\}$, 则存在 $f_i \in Y^*$ 使得 $f_i(y_j) = \delta_{ij}$, 则令 $\phi: Y \to Y, y \mapsto \sum\limits_{i=1}^k f_i(y) y_i$, 它是投影，故取 $Y = M \oplus \ker\phi$ 为想要的分解.

(2) 考虑商映射 $\pi_M: Y\to Y/M$, 设 $Y/M=\mathrm{span}\{e_1,\cdots,e_k\}$, 其中 $e_i=\pi_M(y_i)$ 线性无关，则 y_i 也线性无关.

设 $M_1=\mathrm{span}\{y_1,\cdots,y_k\}$, $M=\ker\pi_M$, 则我们断言 $Y=M\oplus M_1$:

若 $y\in M\cap M_1$, 设 $y=\sum\limits_{i=1}^k\lambda_i y_i\in M_1$, 另一方面 $0=\pi_M(y)=\sum\limits_{i=1}^k\lambda_i e_i$, 则只能 $\lambda_i=0$, 故 $y=0$.

对任意 $y\in Y$, 设 $\pi_M(y)=\sum\limits_{i=1}^k\lambda_i e_i$, 则令 $y_M=\sum\limits_{i=1}^k\lambda_i y_i$, 再令 $y_{M_1}=y-y_M$, 有

$$\pi_M(y_{M_1})=\pi_M(y)-\pi_M(y_M)=\sum_{i=1}^k\lambda_i e_i-\sum_{i=1}^k\lambda_i e_i=0.$$

则 $y_{M_1}\in M_1$, 进而确实有直和分解 $Y=M\oplus M_1$. □

则对于有限维子空间 M, 有直和分解 $Y=M\oplus M_1$ 和投影 p_M. 考虑 $Y=M\oplus M_1$ 上的范数 $\|y\|^*=\|y_M\|_Y+\|y_{M_1}\|_Y$, 不难验证它完备，且显然它比原始范数强, 则由范数等价定理，存在 C_M 使得 $\|\cdot\|^*\le C_M\|\cdot\|_Y$. 则此时有 $\|p_M\|\le C_M$. 若 $\sup\limits_M C_M<\infty$, 则由上面的讨论，有 $\overline{\mathcal{F}(X,Y)}=\mathcal{C}(X,Y)$.

沿着这种思路，可以作出如下定义.

Definition 3.4

称 B 空间 Y 有 ***Schauder 基***，*若 Y 可分，且存在 $\{e_n\}_{n=1}^\infty\in Y$, 使得对任意 $y\in Y$ 有唯一分解 $y=\sum\limits_{n=1}^\infty C_n(y)e_n$, 即 $S_N(y)=\sum\limits_{n=1}^N C_n(y)e_n$ 构成 Cauchy 列且极限为 y.* ♣

Theorem 3.1

若 B 空间 Y 有 Schauder 基，则 $\overline{\mathcal{F}(X,Y)}=\mathcal{C}(X,Y)$. ♡

证明 设 Schauder 基为 e_n, 我们首先证明定义中的 $C_n\in Y^*$: 定义 Y 上的新范数 $□y□=\sup\limits_{N\ge1}\|S_N(y)\|\ge\|y\|$. 可以验证这确实是一个范数，下面说明它完备:

对 $\{y_i\}$ 为新范数下的 Cauchy 列, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists M>0$, 使得 $\forall p,k>M, □y_p□-□y_k□=\sup\limits_{N\ge1}\|S_N(y_p-y_k)\|\le\varepsilon$. 则

$$\sup_{N\ge1}|C_N(y_p)-C_N(y_k)|\|e_N\|=\sup_{N\ge1}\|S_N(y_p)-S_N(y_k)-S_{N-1}(y_p)+S_{N-1}(y_k)\|\le2\varepsilon.$$

进而 $|C_N(y_p)-C_N(y_k)|\le\frac{2\varepsilon}{\|e_N\|}$. 则任意 N, 有 $C_N(y_i)$ 为 Cauchy 列, 则设 $C_N(y_i)\to C_N$. 故任意 $N\ge1$, 有

$$S_N(y_k)=\sum_{n=1}^N C_n(y_k)e_n\to\sum_{n=1}^N C_ne_n, k\to\infty.$$

则在 $\sup\limits_{N\ge1}\|S_N(y_p-y_k)\|\le\varepsilon$ 中令 $k\to\infty$, 有 $\sup\limits_{N\ge1}\|S_N(y_p)-\sum\limits_{n=1}^N C_ne_n\|\le\varepsilon$.

又由于 $\lim\limits_{N\to\infty} S_N(y_p) = y_p$, 进而由上有 $\{\sum\limits_{n=1}^{N} C_n e_n\}_N$ 为 Cauchy 列，则令 $y = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} C_n e_n$, 则有

$$|\square y_p \square - \square y_k \square\| = \sup_{N\geq 1} \|S_N(y_p) - S_N(y_k)\| \leq \varepsilon.$$

进而 $y_p \xrightarrow{\square\cdot\square} y$. 故该范数完备.

进而由范数等价定理，存在 $C > 0$ 使得 $\|S_N(y)\| \leq C\|y\|, \|S_{N-1}(y)\| \leq C\|y\|$, 进而 $\|C_n(y)e_n\| \leq 2C\|y\|$. 故 $\|C_n\| \leq \frac{2C}{\|e_n\|}$, 有 $C_n \in Y^*$.

则再令 $M_i = \mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_i\}$, 定义 $P_i : Y \to Y, y \mapsto \sum\limits_{n=1}^{i} C_n(y)e_n$, 则有 $P_i \in \mathcal{L}(Y), R(P_i) = M_i$, 且由 Schauder 基定义中分解的唯一性有 $P_i|_{M_i} = \mathrm{Id}$. 任意 $y \in Y$, 令 $y = \lim\limits_{i\to\infty} P_i(y)$, 则 $\sup\limits_{i\geq 1}\|P_i(y)\| < \infty$, 故由共鸣定理，$\sup\limits_{i\geq 1}\|P_i\| < \infty$. 则由之前的论证，可知结论成立. $\square$

3.2 Riesz-Fredholm 理论

本节的目的是建立形如 $I-A, A \in \mathcal{C}(X)$ 的算子的有关理论. 它也启发了我们定义 Fredholm 算子. 下面是主定理:

Theorem 3.2 (Riesz-Fredholm)

设 X 为 B 空间, $A \in \mathcal{C}(X)$, 令 $T=I-A$, 则

(1) $N(T)=\{0\} \Longleftrightarrow R(T)=X$.

(2) $\sigma(T)=\sigma(T^*)$.

(3) $\dim N(T)=\dim N(T^*)<\infty$.

(4) $R(T)=N(T^*)^{\perp}, R(T^*)={}^{\perp}N(T)$, 其中对 $N \subseteq X^*$, 定义 $N^{\perp}=\{x \in X: f(x)=0, \forall x \in N\}$;

对 $M \subseteq X$, 定义 ${}^{\perp}M=\{f \in X^*: f(x)=0, \forall x \in M\}$.

(5) $\operatorname{codim} R(T)=\dim N(T)=\operatorname{codim} R(T^*)=\dim N(T^*)$. ♡

下面来证明之. 首先证明如下的 Schauder 定理:

Theorem 3.3 (Schauder)

若 $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, 则 $T \in \mathcal{C}(X,Y) \Longleftrightarrow T^* \in \mathcal{C}(Y^*,X^*)$. ♡

证明 $\Rightarrow$: 即证 $T^*B_{Y^*}(0,1)$ 列紧, 故任取 $\|g_n\| \leq 1, g_n \in Y^*$. 又由于 $C=\overline{TB_X(0,1)}$ 紧, 考虑 $\phi_n: C \to K, y \mapsto g_n(y)$.

$\{\phi_n\}$ 一致有界:

$$|\phi_n(y)| \leq \|g_n\|\|y\|y \leq \|y\| \leq M<\infty$$

, 其中用到了 C 是紧的;

而且等度连续:

$$|\phi_n(y_1)-\phi_n(y_2)| \leq \|g_n\|\|y_1-y_2\| \leq \|y_1-y_2\|.$$

则由 Arzela-Ascoli 定理, 存在收敛子列 $\phi_{n_k} \to \phi_0$, 则 $\{\phi_{n_k}\}$ 为 Cauchy 列, 故

$$\|T^*g_{n_k}-T^*g_{n_l}\|=\sup_{\|x\|=1}\|T^*g_{n_k}(x)-T^*g_{n_l}(x)\| \leq \sup_{y \in C}\|g_{n_k}(y)-g_{n_l}(y)\|=\sup_{y \in C}\|\phi_{n_k}(y)-\phi_{n_l}(y)\| \to 0.$$

故 $\{T^*g_{n_k}\}$ 也为 Cauchy 列, 有 $T^*g_{n_k} \to g \in Y$, 故 $T^*B_{Y^*}(0,1)$ 列紧.

$\Leftarrow$: 由第一部分, T^{**} 也紧, 则 $T=T^{**}|_{U(X)}$ 紧, 其中 $U: X \to X^{**}$ 为典范嵌入. □

再来证明如下的引理.

Lemma 3.1

T 如上，则

(1) $botR(T) = N(T^*), R(T^*)^\perp = N(T)$.

(2) $\overline{R(T)} = N(T^*)^\perp, \overline{R(T^*)} =^\perp N(T)$.

证明 (1) 下面的等价关系均为直接的（注意到第二个等价关系链的最后一步实际用到了 Hahn-Banach 定理的推论）:

$$f \in^\perp R(T) \iff f(Tx) = 0, \forall x \in X \iff T^* f = 0 \Longleftarrow f \in N(T^*).$$

$$x \in R(T^*)^\perp \iff (T^* f)(x) = 0, \forall f \in X^* \iff f(Tx) = 0, \forall f \in X^* \iff x \in N(T).$$

(2) 第二个命题的证明与第一个类似，留作练习, 在此只证明第一个命题.

任取 $y = Tx \in R(T), f \in (T^*)$, 有 $f(y) = f(Tx) = (T^* f)(x) = 0$, 进而 $y \in N(T^*)^\perp$. 则 $R(T) \subseteq N(T^*)^\perp$, 进而 $\overline{R(T)} = N(T^*)^\perp$.

另一方面，由 (1) 有 $N(T^*)^\perp = (^\perp R(T))^\perp$, 故只需证 $(^\perp R(T))^\perp \subseteq \overline{R(T)}$.

任取 $x \in (^\perp R(T))^\perp$, 若 $x \notin \overline{R(T)}$, 则由 Hahn-Banach 定理的推论，存在 $f \in X^*$ 满足 $f(x_0) = d(x_0, \overline{R(T)}) > 0, f(\overline{R(T)}) = 0$, 进而 $f \in^\perp R(T)$. 但 $f(x) \neq 0$, 与 $x \in (^\perp R(T))^\perp$ 矛盾! □

则我们可以证明主定理的 (4): 若 $R(T)$ 是闭的, 则由 Schauder 定理, 对 T^* 利用同样的论证有 $R(T^*)$ 是闭的，则由上面的引理 (2) 得证. 故下面证明 $R(T)$ 是闭的, 工具是如下的简单引理.

Lemma 3.2

若 $S \in \mathcal{L}(Y, Z), D(S) = Y$, 且 S 为单射，$S^{-1} : R(S) \to Y$ 连续，则 $R(S)$ 闭.

证明 设 $M = \|S^{-1}\| < \infty$, 则任取 $z_n \to z, z_n = s(y_n)$, 则由 $\{z_n\}$ 为 Cauchy 列，有 $\|y_n - y_m\| \leq M\|z_n - z_m\| \to 0$, 则设 $y_n \to y$, 有 $z = Sy \in R(S)$. □

则为了使用上面的引理，我们需要构造单射，自然考虑 $\tilde{T} : X/N(T) \to X, [x] \mapsto Tx$ 为单射, 则 $D(\tilde{T}) = X/N(T)$，且 $\tilde{T}$ 有界:

$$\|\tilde{T}\| = \sup_{\|[x]\|=1} \|\tilde{T}[x]\| \leq \sup_{\|[x]\|=1} \|T\| \inf_{z \in [x]} \|z\| \leq \|T\| < \infty.$$

故由上面的引理, 只需证明 $\tilde{T}^{-1}$ 连续. 若不然, 则存在 $x_n \in R(T)$ 使得 $\|\tilde{T}^{-1}x_n\|n\|x_n\|$. 设 $\tilde{T}^{-1}x_n = [y_n]$, 则不妨 $\|[y_n]\| \leq 1, \|y_n\| \leq 2$, 则此时 $Ty_n = y_n - Ay_n = x_n \to 0$.

另一方面，由于 A 紧，则存在 $Ay_{n_k} \to z$, 利用 $y_n - Ay_n \to 0$ 有 $y_{n_k} \to z, Az = z$, 进而 $z \in N(T)$, 则 $\|[y_{n_k}]\| = \|[y_{n_k} - z]\| \leq \|y_{n_k} - z\| \to 0$, 与 $\|[y_{n_k}]\| = 1$ 矛盾！故得证. □

下面再来证明 (2). 只需证明对 $R \in \mathcal{L}(X)$, R 可逆等价于 R^* 可逆.

若 R 可逆，则 $(R^{-1})^* \circ R^* = R^* \circ (R^{-1})^* = \mathrm{Id}$, 进而 R^* 可逆，逆为 $(R^{-1})^*$.

反之设 R^* 可逆，则由前知 R^{**} 可逆，令 $U : X \to X^{**}$ 为典范嵌入，则 $(R^{**})^{-1}|_{U(X)} : U(X) \to U(X)$ 连续，则 $R^{-1} : R(X) \to X$ 连续，进而只需证 $R(X) = X$.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "R"] \arrow[d, "U"] & X \arrow[d, "U"] \\
X^{**} \arrow[r, "R^{**}"] & X^{**}
\end{tikzcd}
$$

注意到 R 为连续单射，则由引理 3.2，有 $R(X)$ 闭，则若存在 $x_0 \notin R(X)$, 由 Hahn-Banach 定理的推论, 存在 $f \in X^*, f(x_0) = d(x_0, R(X)) > 0, f(R(X)) = 0$, 则 $R^* f = 0$. 由 R^* 可逆有 $f = 0$, 矛盾！故得证. $\square$

再来证明 (1) 的 $\Rightarrow$ 部分: 注意到在 (2) 的证明过程中我们给出了 $R(T)$ 是闭的, 若 $X_1 = R(T) \neq X$, 则考虑限制 $T_1 : X_1 \to X_1$, 且注意到对 $y = Tx \in X_1$, 有 $A(y) = A(Tx) = T(Ax) \in X_1$, 故也有限制 $A_1 : X_1 \to X_1$.

则再次可以考虑限制 $T_1 : X_1 \to R(T_1) = X_2$，仍然同上 X_2 是闭的，且由 $T : X \to X_1$ 是单射，有 $X_2 \subsetneq X_1$, 以此类推可以得到闭子空间链 $X = X_0 \supsetneq X_1 \supsetneq X_2 \cdots$，其中 $X_{n+1} = TX_n$.

由 Riesz 引理，存在 $y_n \in X_n$ 使得 $\|y_n\| = 1$ 且 $d(y_n, X_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$. 则由 A 紧，$\{Ay_n\}$ 存在收敛子列 Ay_{n_k}.

另一方面注意到 $y_{n_{k+p}} - Ty_{n_{k+p}} + Ty_{n_k} \in X_{n_k+1}$，有

$$\|Ay_{n_{k+p}} - Ay_{n_k}\| = \|(y_{n_{k+p}} - Ty_{n_{k+p}} + Ty_{n_k}) - y_{n_k}\| \geq d(y_{n_k}, X_{n_k+1}) \geq \frac{1}{2}.$$

则得到矛盾！ $\square$

下面证明剩余的所有部分，首先证明 (3) 中出现的维数是有限的:

设 $x \in N(T)$, 则 $x = Ax$, 即 $\mathrm{Id}|_{N(T)} = A|_{N(T)}$. 又由于 $A|_{N(T)} \in \mathcal{C}(N(T))$，则 $\mathrm{Id}|_{N(T)}\mathcal{C}(N(T))$, 则只能 $\dim N(T) < \infty$, 同理 $\dim N(T^*) < \infty$.

然后我们证明如下的引理.

Lemma 3.3

(i) $M \subseteq X$ 为闭子空间，则 $\dim(X/M)^* = \dim^{\perp} M$.

(ii) T 如上，则 $\mathrm{codim} R(T) \leq \dim N(T) < \infty$.

证明 (i) 定义 $\Phi : {}^{\perp}M \to (X/M)^*, f \mapsto (\Phi f : [x] \mapsto f(x))$, 显然这是良定的. 且

$$\|\Phi f\| = \sup_{\|[x]\|=1} |\Phi f(x)| = \sup_{\|[x]\|\leq 1} \inf_{z\in[x]} |f(z)| \leq \|f\| \sup_{\|[x]\|\leq 1} \inf_{z\in[x]} \|z\| = \|f\|.$$

故 $\|\Phi\| \leq 1$.

另一方面，给定 $\tilde{f} \in (X/M)^*$, 设对 π_M 为商映射，定义 $f = \tilde{f}\circ\pi_M \in X^*$，则显然 $f \in^{\perp} M$, 且

$$\Phi f([x]) = f(x) = \tilde{f}(\pi_M x) = \tilde{f}([x]).$$

故 Φ 满射. 且此时有

$$\|\tilde{f}\| = \|\Phi f\| \leq \|f\| \leq \|\tilde{f}\|\|\pi_M\| \leq \|\tilde{f}\|.$$

则只能 $\|f\| = \|\tilde{f}\|$, 故 Φ 为等距同构，则显然命题成立.

(ii) 否则若 $\mathrm{codim} R(T) > \dim N(T) = k$，则取 $e_1, \cdots, e_k$ 在 $X/R(T)$ 中无关，则设 $\pi_{R(T)} x_i = e_i$, 有 e_i 在 X 中线性无关. 令 $M_1 = \mathrm{span}\{x_i\}$, 则若 $x \in M_1 \cap R(T)$, 设 $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$, 有 $0 = \pi_{R(T)} x = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i = 0$, 故只能 $\lambda_i = 0, x = 0$.

由于 $N(T)$ 和 M_1 均为 k 维线性空间，则存在同构 $V : N(T) \to M_1$. 并由 $\dim N(T) < \infty$, 存在 $\phi \in \mathcal{L}(X)$, 使得 $\phi|_{N(T)} = \mathrm{Id}, R(\phi) = N(T)$. 则定义 $\tilde{T} = T + V\circ\phi \in \mathcal{L}(X)$, 有 $R(\tilde{T}) \subseteq R(T) \oplus M_1 \subsetneq X$.

另一方面 $\tilde{T}x - x = -Ax + (V\circ\phi)(x) \in \mathcal{C}(X)$, 这里用到了 V 是有限秩的. 则可以写成 $\tilde{T} = I - \tilde{A}$, 其中 $\tilde{A} \in \mathcal{C}(X)$. 注意到

$$x \in N(\tilde{T}) \Longleftrightarrow Tx + V(\phi(x)) = 0 \Longleftrightarrow Tx = V(\phi(x)) = 0 \Longleftrightarrow x \in N(T)\cap N(\phi) \Longleftrightarrow x = 0.$$

其中第二步用到了 $R(T)$ 和 M_1 是直和，最后一步用到了 $\phi|_{N(T)} = \mathrm{Id}$.

则 $N(\tilde{T}) = 0$，进而由 (1) 的 $\Rightarrow$ 部分，有 $R(\tilde{T}) = X$, 矛盾! □

下面回到主定理，首先有

$$\mathrm{codim} R(T) = \dim X/R(T) = \dim(X/R(T))^* \overset{(i)}{=} \dim{}^{\perp} R(T) \overset{\text{引理3.1}}{=} \dim N(T^*).(*)$$

同理有

$$\mathrm{codim} R(T^*) = \dim N(T^{**}).(**)$$

注意到由 (*), 有 (3) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (1), 故只需证明 (3).

再次考虑 $U : X \to X^{**}$ 为典范嵌入.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "R"] \arrow[d, "U"] & X \arrow[d, "U"] \\ X^{**} \arrow[r, "R^{**}"] & X^{**} \end{tikzcd}$$

则若 $x \in N(T)$, 有

$$(T^{**}U(x))(f) = (U(x))(T^* f) = (T^* f)(x) = f(Tx) = 0.$$

则 $U(x) \in N(T^{**})$, 进而 $\dim N(T^{**}) \geq \dim N(T)$. 则

$$\dim N(T^*) \overset{(*)}{=} \operatorname{codim} R(T) \overset{(ii)}{\leq} \dim N(T) \leq \dim N(T^{**}) \overset{(**)}{=} \operatorname{codim} R(T^*) \overset{(ii)}{\leq} \dim N(T^*).$$

且由于上面出现的维数均有限，则只能取等号，即 (3) 得证，进而主定理得证. □

进而我们可以作出下面定义.

Definition 3.5

设 X, Y 为 B 空间，则 $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ 为 ***Fredholm 算子***，*若*

(1) $R(T)$ *闭.*

(2) $\operatorname{codim} R(T) < \infty$.

(3) $\dim N(T) < \infty$.

此时记 $\operatorname{ind}(T) = \dim N(T) - \operatorname{codim} R(T)$. ♣

Example 3.5 由主定理，对 $A \in \mathcal{C}(X)$, 有 $T = I - A$ 为 Fredholm 算子，且 $\operatorname{ind}(T) = 0$.

3.3 紧算子的谱

我们的主定理是如下关于紧算子谱结构的断言.

Theorem 3.4

X 为 B 空间，$T \in \mathcal{C}(X)$, 则

(1) 若 $\dim X = \infty$, 则 $0 \in \sigma(T)$.

(2) 当 $\dim X < \infty$ 时，$\sigma(T)$ 为至多 $\dim X$ 个点组成的离散集.

(3) 当 $\dim X = \infty$ 时，$\sigma(T)$ 要么为包含 0 的离散集，要么为包含 0 的且以 0 为唯一聚点的集合 (则此时可数).

(4) $\sigma(T) - \{0\} = \sigma_p(T) - \{0\}$.

♡

证明 (1) 若 $\dim X = \infty, 0 \in \rho(T)$，则 T 可逆，有 T^{-1} 为紧算子，考虑 $\mathrm{Id} = T^{-1} \circ T{:}X \to X$ 为紧算子和有界算子的复合，进而为紧算子，与 $\dim X = \infty$ 矛盾!

(2) 线性代数.

(4) 只需证 $\sigma(T) - \{0\} \subseteq \sigma_p(T) - \{0\}$, 即证若 $\lambda \notin \sigma_p(T) \cup \{0\}$，则 $\sigma \in \rho(T)$.

任取 $\lambda \notin \sigma_p(T) \cup \{0\}$，则 $\lambda I - T = \lambda(I - \frac{T}{\lambda})$ 为单射. 又 $\frac{T}{\lambda} \in \mathcal{C}(X)$, 由 Riesz-Fredholm 定理有 $I - \frac{T}{\lambda}$ 为满射，则 $\lambda \in \rho(T)$.

(3) 只需证 $\sigma_p(T)$ 至多以 0 为聚点. 否则取互不相同的 $\lambda_i \in \sigma_p(T), \lambda_i \to \lambda \neq 0$.

取 $\|x_i\| = 1, Tx_i = \lambda x_i$, 令 $E_n = \mathrm{span}\{x_1, \cdots, x_n\}$, 则有 $T : E_n \to E_n, \dim E_n = n$. 由 Riesz 引理，存在 $y_{n+1} \in E_{n+1}, \|y_{n+1}\| = 1$, 使得 $d(y_{n+1}, E_n) \geq \frac{1}{2}$.

再令 $z_n = \frac{y_n}{\lambda_n}$, 则有 $\sup\limits_{n \geq 1} \|z_n\| < \infty$, 由 T 为紧算子，进而 $\{Tz_i\}$ 有收敛子列，不妨设就是它本身，此时有 $\|Tz_i - Tz_{i+1}\| \to 0$.

另一方面，设 $y_{i+1} = c_{i+1}x_{i+1} + z'$, 其中 $z' \in E_i$, 则有

$$\begin{aligned}\|Tz_i - Tz_{i+1}\| &= \|\frac{c_{i+1}x_{i+1} + z'}{\lambda_{i+1}} - Tz_i\| \\ &= \|c_{i+1}x_{i+1} + z' - z' + T\frac{z'}{\lambda_{i+1}} - Tz_i\| \\ &= \|y_{i+1} - (z' - T\frac{z'}{\lambda_{i+1}} + Tz_i)\|\end{aligned}$$

其中，则 $(z' - T\frac{z'}{\lambda_{i+1}} + Tz_i) \in E_i$，进而 $\|Tz_i - Tz_{i+1}\| \geq \frac{1}{2}$，矛盾! □

Example 3.6 设 $X = l^2, T \in \mathcal{L}(l^2)$.

(1) $T(x_1, x_2, \cdots) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \cdots, \lambda_m x_m, 0, 0, \cdots)$, 则有限秩，进而为紧算子，此时显然 $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{0, \lambda_1, \cdots, \lambda_m\}$.

(2) $T(x_1, x_2, \cdots) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \cdots)$, 则为紧算子当且仅当有限秩逼近，进而当且仅当 $\lambda_i \to 0$. 此时有 $\sigma(T) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \}$.

(3) $T(x_1,x_2,\cdots)=(0,\lambda_1 x_1,\lambda_2 x_2,\cdots)$，其中 $\lambda_i\to 0$, 则 T 为有界算子复合紧算子，进而也为紧算子, 此时不难验证 $\sigma_p(T)=\emptyset$, 则 $\sigma(T)=\{0\}$.

Definition 3.6

对 B 空间 X 和 $T\in\mathcal{L}(X)$, 若 M 为 X 的子空间且满足 $TM\subseteq M$, 则称 M 为 T 的**不变子空间**. 若 $TM=M$, 则称**严格不变子空间**. ♣

我们要考虑一个算子是否有非平凡的闭不变子空间，首先考虑对一个点 x, 它生成的最小不变子空间为 $L(x)=\{p(T)x:p(T)\text{为关于}T\text{的多项式}\}$. 生成的最小闭不变子空间为 $\overline{L(x)}$.

问题：是否有 $\forall x\neq 0$, 有 $\overline{L(x)}=X$? 对紧算子这个问题被很好地解决.

Theorem 3.5

X 为 B 空间且 $\dim X\geq 2$, $T\in\mathcal{C}(X)$, 则 T 有非平凡不变闭子空间，进而 $\exists 0\neq x\in X$, 使得 $\{0\}\subseteq\overline{L(x)}\subseteq X$. ♡

证明 若不然，则任意 $x\in X-\{0\},\overline{L(x)}=X$, 此时有 $\sigma_p(T)=\emptyset$(否则若 $\lambda\in\sigma_p(T),Tx=\lambda x$, 则 $\overline{L}(x)$ 为一维的，矛盾！). 进而只能 $\dim X=\infty$, 且 $\sigma(T)=\{0\}$, 即 $r_\sigma(T)=0$.

另一方面，不妨设 $\|T\|=1$，且 $\|Tx_0\|>1$. 则 $\|x_0\|>1$. 令 $C=\overline{TB_X(x_0,1)}$ 为紧集，且 $0\notin C$.

任取 $y_0\in C$, 由于 $\overline{L(y_0)}=X$, 可以取多项式 $p_{y_0}(T)$ 使得 $\|p_{y_0}(T)y_0-x_0\|<1$. 则由连续性，存在 δ_{y_0}, 使得 $p_{y_0}(T)(B(y_0,\delta_{y_0}))\subseteq B_X(x_0,1)$. 由紧性，取有限覆盖 $B_X(0,1)\subseteq\cup_{i=1}^n p_{y_i}(T)(B(y_i,\delta_i))$, 其中简记 $\delta_i=\delta_{y_i},p_{y_i}=p_i$.

则任意 $y\in C$, 取 i_1 使得 $\|p_{i_1}(T)(y)-x_0\|<1$, 进而 $T(p_{i_1}(T)(y))\in C$.

同理存在 i_2 使得 $\|p_{i_2}(T)(Tp_{i_1}(T)y)-x_0\|<1$, 即 $\|p_{i_2}p_{i_1}(T)(Ty)-x_0\|<1$.

以此类推可以得到 $\|\prod\limits_{j=1}^{k+1}p_{i_j}(T)(T^k y)-x_0\|<1$. 令 $\mu=\max\limits_{1\leq i\leq n}\|p_i(T)<\infty$, 则 $\|x_0\|-1<\mu^{k+1}\|T^k y\|$. 进而

$$\frac{1}{\mu}(\frac{\|x_0-1\|}{\mu\|y\|})^{\frac{1}{k}}\leq(\frac{\|T^k y\|}{\|y\|})^{\frac{1}{k}}\leq\|T^k\|^{\frac{1}{k}}\to 0.$$

但左边显然趋近于 $\frac{1}{\mu}$, 矛盾! □

线性代数中我们对有限维空间进行了不变子空间分解，现在对一般的 B 空间中也考虑这样的操作. 令 $\dim X=\infty,A\in\mathcal{C})(X)$. 则任取 $\lambda\in\sigma_p(A)-\{0\}$, 由 Riesz-Fredholm 定理，有 $N(\lambda I-A)=N(I-\frac{A}{\lambda})$ 为有限维. 且显然 $N(\lambda I-A)$ 是 A 的不变子空间，如果能有分解 $X=N(\lambda I-A)\oplus\square$, 其中 $N(\lambda I-A)$ 为闭子空间，则可以继续进行下去.

Definition 3.7

对 $T \in \mathcal{L}(X)$.

(1) 若存在 n 使得 $N(T^n) = N(T^{n+1}) = N$, 则有 $N(T^{n+i}) = N(T^n), \forall i \geq 1$，则称满足该条件的最小的 n 为**零链长**，记为 $p(T)$. 若这样的 n 不存在则记 $p(T) = \infty$.

(2) 若存在 n 使得 $R(T^n) = R(T^{n+1}) = N$, 则有 $R(T^{n+i}) = R(T^n), \forall i \geq 1$，则称满足该条件的最小的 n 为**像链长**，记为 $q(T)$. 若这样的 n 不存在则记 $q(T) = \infty$.

♣

Example 3.7 $T : l^2 \to l^2, (x_1, x_2, \cdots) \mapsto (\lambda_2 x_2, \lambda_3 x_3, \cdots)$，则此时有

$$N(T^0) = \{0\} \subseteq N(T^1) = \{(x_1, 0, 0, \cdots)\} \cdots \subseteq N(T^n) = \{(x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots)\} \subseteq \cdots.$$

故有 $p(T) = \infty$.

Example 3.8 对 $T_\lambda = \lambda I - A$, 其中 $\lambda \neq 0, A \in \mathcal{C}(X)$, 则 $N(T_\lambda^n) = N(T^n)$, 其中 $T = I - B, B = \frac{A}{\lambda} \in \mathcal{C}(X)$.

首先当 $\lambda \notin \sigma_p(T) \cup \{0\}$ 时，有 $N(T_\lambda^0) = N(T_\lambda) = \{0\}$, 进而 $p(T_\lambda) = 0$.

一般情形下，此时注意到 $T^n = I + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} B^i = I - A_n, A_n \in \mathcal{C}(X)$, 则由 Riesz-Fredholm 定理，有 $\dim N(T^n) = \operatorname{codim} R(T^n)$，且 $R(T^n)$ 闭.

与 Riesz-Fredholm 定理 (1) $\Rightarrow$ 部分中的证明一样地，可以证明 $q(T) < \infty$, 则 $p(T_\lambda) = p(T) = q(T) < \infty$.

将上面的讨论进一步深入，有如下的命题.

Proposition 3.4

若 $T = I - B, B \in \mathcal{C}(X)$, 则 $p(T) = q(T) < \infty$, 且有闭不变子空间分解 $X = R(T^{p(T)}) \oplus N(T^{p(T)})$. 且 $T|_{R(T^{p(T)})} : R(T^{p(T)}) \to R(T^{p(T)})$ 为有界双射.

♠

证明 关于链长的命题上面的讨论中已经证明，下面证明剩余部分.

先证明是直和: 若 $x \in N(T^{p(T)}) \cap R(T^{p(T)})$, 有 $x = T^{p(T)} y$, 进而 $T^{2p(T)} y = 0$, 此时 $y \in N(T^{2p(T)}) = N(T^{p(T)})$, 故 $x = 0$.

此外对任意 $x \in X$, 有 $T^{p(T)} x \in R(T^{p(T)}) = R(T^{2p(T)})$, 设 $T^{p(T)} x = T^{2p(T)} u$. 则

$$T^{p(T)}(x - T^{p(T)} u) = T^{2p(T)} u - T^{2p(T)} u = 0.$$

故有分解 $x = (x - T^{p(T)} u) + T^{p(T)} u$. 则为直和分解.

又任意 $x = T^{p(T)} y \in R(T^{p(T)}$, 若 $Tx = 0$, 则 $T^{p(T)+1} y = 0, y \in N(T^{p(T)+1}) = N(T^{p(T)})$, 进而 $x = 0$, 即 $T|_{R(T^{p(T)})}$ 为单射，则由 Riesz-Fredholm 定理为有界双射. □

进而回到对 A 为紧算子，$\lambda \in \sigma_p(T) - \{0\}$, 有 $p_\lambda = p(\lambda I - A) = q(\lambda I - A) < \infty$. 则有不变子空间分解

$$X = \oplus_{\lambda \in \sigma_p - \{0\}} N((\lambda I - A)^{p_\lambda}) \bigoplus \cap_{\lambda \in \sigma_p - \{0\}} R((\lambda I - A)^{p_\lambda}).$$

在前半部分中 X 的行为由线性代数的 Jordan 标准型完全刻画, 再对后半部分, 记 $X_0 = \cap_{\lambda \in \sigma - \{0\}} R((\lambda I - A)^{p_\lambda})$, 则令 $A_0 = A|_{X_0} : X_0 \to X_0$.

我们断言 $\sigma_p(A_0) = \emptyset$ 或 $\{0\}$: 否则存在 $\lambda \neq 0, x \in X_0, A_0 x = \lambda x$, 进而 $\lambda \in \sigma_p(A) - \{0\}, x \in N((\lambda I - A)^{p_\lambda})$, 与直和分解矛盾. 则可以进一步分析 (A_0, X_0) 的行为：例如若 $\dim X_0 < \infty$, 则 A_0 对应幂零阵，等等.

3.4 对称紧算子

本节我们讨论对称紧算子的结构，首先回忆 H 空间 X 上的对称算子 $T \in \mathcal{L}(X)$ 是指任意 x, y, 有 $(Tx, y) = (x, Ty)$. 对称紧算子有如下性质:

Proposition 3.5

若 $T \in \mathcal{C}(X)$ 为对称紧算子，则它满足:

(1) $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}, \sigma_r(T) = \emptyset$.

(2) 若 $X_1 \subseteq X$ 为不变子空间，则 $T|_{X_1}$ 也对称.

(3) $C = \sup\limits_{\|x\|\le 1, \|y\| \le 1} |(Tx, y_|$, 则 $\|T\| = C$.

(4) $\|T\| = \sup\limits_{\|x\| \le 1} |(Tx, x)|$.

(5) 存在 $x_0 \in X, \|x_0\| = 1$, 使得 $Tx_0 = \lambda_0 x_0$, 其中 $\lambda_0 = \|T\| \in \sigma_p(T)$.

(6) 对 $\lambda \neq \lambda' \in \sigma_p(T)$, 有 $N(\lambda I - T) \cap N(\lambda' I - T) = \{0\}$ 且它们正交.

证明 (1) 见命题 2.8，(2) 显然.

(3) 这是因为（注意这里实际上并未用到对称紧的条件）:

$$C = \sup_{\|x\|\le 1} \sup_{\|y\| \le 1} |(Tx, y)| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\| = \|T\|.$$

(4) 令 $C' = \sup\limits_{\|x\| \le 1} |(Tx, x)|$, 则由 (3) 显然 $C' \le C$.

另一方面，任意 $\|x\| = \|y\| = 1$, 有

$$\mathrm{Re}(Tx, y) = \frac{1}{4}[(T(x+y), x+y) - (T(x-y), x-y)] \le \frac{C'}{4}(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) \le C'.$$

则取 $\alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1$, 使得 $\alpha(Tx, y) = |(Tx, y)|$，则

$$|(Tx, y)| = (Tx, \overline{\alpha} y) = \mathrm{Re}(Tx, \overline{\alpha} y) \le C'.$$

故对左右两面取 sup 有 $C \le C'$, 故 $C' = C = \|T\|$.

(5) 由上面的性质 (4)，不妨设 $\lambda_0 = \|T\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} |(Tx, x)|$(因为 (Tx, x) 为实数，若符号不正确则用 $-T$ 代替). 则可以取 $x_n \in X, \|x_n\| \le 1$，使得 $(Tx_n, x_n) \to \lambda_0$. 又由于 X 自反，则存在弱收敛子列（不妨记为它本身）$x_n \rightharpoonup x_0$, 则又 T 紧，有 $Tx_n \to Tx_0$.

又由于任意 $y \in X$, 有 $|(x_0, y)| = \lim\limits_{n\to\infty} |(x_n, y)| \le \|y\|$. 故 $\|x_0\| \le 1$. 且由于

$$(Tx_n, x_n) - (Tx_0, x_0) = (Tx_n - Tx_0, x_n) + (Tx_0, x_n - x_0) \to 0.$$

有 $(Tx_0, x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} (Tx_n, x_n) = \lambda_0$. 则只能有 $\|x_0\| = 1$(否则用 $\frac{x_0}{\|x_0}$ 代入会更大，矛盾).

我们再证明 $Tx_0 = \lambda_0 x_0$. 考虑 $\forall y \in X, |t| \ll 1$, 定义 $z_t = \frac{x_0 + ty}{\|x_0 + ty\|}, \phi_y(t) = (Tz_t, z_t) = \frac{(T(x_0+ty), x_0+ty}{(x_0+ty, x_0+ty)}$. 则有

$$\phi_y(t) = \frac{(Tx_0, x_0) + 2t\mathrm{Re}(Tx_0, y) + t^2(Ty, y)}{(x_0, x_0) + 2t\mathrm{Re}(x_0, y) + t^2(y, y)}.$$

则

$$0 = \phi_y'(0) = \frac{2\mathrm{Re}(Tx_0, y) - 2\lambda_0 \mathrm{Re}(x_0, y)}{(1 + 2\mathrm{Re}(x_0, y))^2}.$$

进而 $\forall y \in X, \mathrm{Re}(Tx_0 - \lambda_0 x_0, y) = 0$, 则只能 $Tx_0 = \lambda_0 x_0$.

(6) 若 $x \in N(\lambda I - T) \cap N(\lambda' I - T)$, 则 $Tx = \lambda x = \lambda' x$, 则只能 $x = 0$.

对 $x \in N(\lambda I - T), y \in N(\lambda' I - T)$, 则

$$\lambda(x, y) = (Tx, y) = (x, Ty) = (x, \lambda' y) = \overline{\lambda'}(x, y) = \lambda'(x, y).$$

进而 $(x, y) = 0$, 故得证. □

借助上面的性质我们可以证明如下的对称紧算子结构定理.

Theorem 3.6 (Hilbert-Schmidt)

对 H 空间 X, 则 T 为对称紧算子当且仅当存在正交规范基 $\{e_i\}_{i\in I}$ 和 $\{\lambda_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{R}$, 使得

(1) $T = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i e_i \otimes e_i$.

(2) $\forall n, I_n = \{i \in I : |\lambda_i| \geq \frac{1}{n}\}$ 是有限集.

证明 $\Leftarrow$: 按照 (1) 定义 T, 则有限秩算子 $T_n = \sum\limits_{i\in I_n} \lambda_i e_i \otimes e_i$ 逼近 T, 故 T 为紧算子, 此外 T 对称:

$$\begin{aligned}(Tx, y) &= (\sum_{i\in I} \lambda_i (x, e_i) e_i, \sum_{j\in I} (y, e_j) e_j) \\ &= \sum_{i\in I} \lambda_i (x, e_i)(y, e_i) = \sum_{i\in I} \overline{\lambda_i}(x, e_i)(y, e_i) = (x, Ty)\end{aligned}$$

故 T 为对称紧算子.

$\Rightarrow$: (2) 由紧算子谱定理以及性质 (1) 立得, 故只需证 (1).

对任意 $\lambda \in \sigma_p(T) - \{0\}$, 有 $N(\lambda I - T) = N(I - \frac{T}{\lambda})$ 有限维, 进而它有正交规范基 $\{e_i^\lambda\}_{i\in I_\lambda}$, 其中 $|I_\lambda| = \dim N(\lambda I - T) < \infty$.

当 $0 \in \sigma_p(T)$ 时, 则取 $N(T)$ 的规范正交基 $\{e_i^0\}_{i\in I_0}$, 它可能不可数.

则令 $\{e_i\} = \sqcup_{\lambda\in\sigma_p(T)-\{0\}} \{e_i^\lambda\}_{i\in I_\lambda} \sqcup \{e_i^0\}_{i\in I_0}$. 则由性质 (6), 它是一个正交规范集, 定义 $M = \mathrm{span}\{e_i\}_{i\in I}$. 则任意 $x = \sum\limits_{i\in I} (x, e_i) e_i$, 有 $Tx = \sum\limits_{i\in I} (x, e_i) \lambda_i e_i$, 进而对任意 $x \in \overline{M}$, 有 $Tx = \sum\limits_{i\in I} \lambda e_i \otimes e_i(x)$.

则只需证明 $\overline{M} = X$. 首先注意到 $T\overline{M} \subseteq \overline{M}$, 则若 $y \in \overline{M}^\perp$, 则任意 $x \in \overline{M}$, 有 $(Tx, y) = 0 = (x, Ty)$, 进而 $Ty \in \overline{M}^\perp$. 即 $\overline{M}^\perp$ 为 T 的不变子空间.

再令 $\tilde{T} = T|_{\overline{M}^\perp}$, 由性质 (2) 它也是对称紧算子. 若 $\overline{M}^\perp \neq \{0\}$, 则由性质 (4), 存在 $\tilde{x_0} \in \overline{M}^\perp, \|\tilde{x_0}\| = 1$, 且 $\tilde{T}\tilde{x_0} = \|\tilde{T}\|\tilde{x_0}$. 则 $T\tilde{x_0} = \|\tilde{T}\|\tilde{x_0}$, 即 $\tilde{x_0} \in N(\|\tilde{T}\| I - T) \subseteq \overline{M}$, 矛盾! 故得证. □

Corollary 3.1

对称紧算子 T, 则 $\sigma_p(T) = \{0\} \iff r_\sigma(T) = 0 \iff T = 0$.

则对对称紧算子 T, 设其特征值按绝对值递减排列 (允许重复)，即 $\|T\| = \lambda_1 \geq \lambda_2 \cdots$. 则由上面的表示，设 $T = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i \otimes e_i$, 则立即有

$$|\lambda_n| = \sup_{\|x\|=1} \{|(Tx, x)| : x \perp \mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_{n-1}\}\}.$$

再考虑按正负值排列 $\lambda_1^+ \geq \lambda_2^+ \cdots \geq 0 \geq \lambda_1^- \geq \lambda_2^- \cdots$. 则和上面类似地有如下定理:

Theorem 3.7 (极小-极大原理)

T 为对称紧算子，则

$$\lambda_n^+ = \inf_{E_{n-1}} \sup_{0 \neq x \perp E_{n-1}} \frac{(Tx, x)}{(x, x)}.$$

$$\lambda_n^- = \sup_{E_{n-1}} \inf_{0 \neq x \perp E_{n-1}} \frac{(Tx, x)}{(x, x)}.$$

其中 E_{n-1} 取遍 X 的所有 $n-1$ 维子空间.

证明 注意到 $\lambda_n^+(T) = -\lambda_n^-(-T)$, 故只需证第一个式子. 设右边的值为 μ_n.

首先设 $Te_n^+ = \lambda_n^+ e_n^+$, 则 $e_n^+ \perp \tilde{E}_{n-1} = \mathrm{span}\{e_1^+, \cdots, e_{n-1}^+\}$, 故 $\mu \leq \sup\limits_{x \perp \tilde{E}_{n-1}} \frac{(Tx,x)}{(x,x)}$.

对任意 $x \perp \tilde{E}_{n-1}$, 则有表示

$$x = \sum_{i \geq n} x_i e_i^+ \sum_{j > 0} x_j e_j^- + \sum_{i \in I_0} x_i e_i.$$

此时有

$$Tx = \sum_{i \geq n} \lambda_i^+ x_i e_i^+ + \sum_{j > 0} \lambda_j^- x_j e_j^-.$$

进而

$$(x, Tx) = \sum_{i \geq n} \lambda_i^+ |x_i|^2 + \sum_{j > 0} \lambda_j^- |x_j|^2.$$

$$(x, x) = \sum_{i \geq n} |x_i|^2 + \sum_{j > 0} \lambda_j^- |x_j|^2.$$

故 $\frac{(Tx,x)}{(x,x)} \leq \lambda_n^+$, 则 $\mu_n \leq \lambda_n^+$.

另一方面任取 $E_{n-1} \subsetneq \mathrm{span}\{e_1^+, \cdots, e_n^+\}$, 则存在 $x \in \mathrm{span}\{e_1^+, \cdots, e_n^+\}$, 使得 $x \perp E_{n-1}$. 则

$$(Tx, x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^+ |x_i|^2 \geq \lambda_n + (x, x).$$

则对所有 E_{n-1} 取下确界有 $\lambda_n^+ \leq \mu_n$. 故得证. □

对 A, B 对称，记 $A \geq B$ 当且仅当 $\forall x \in X, (Ax, x) \geq (Bx, x)$. 注意到这意味着 $\|A\| \geq \|B\|$. 特别地当 $B = 0$，则称满足 $A \geq B$ 的 A 为正对称算子. 若还有 A, B 为紧算子，则 $A \geq B$ 当且仅当 $\lambda_n^+(A) \geq \lambda_n^+(B)$.

则若对 A 正对称紧算子，有表示 $A=\sum\limits_{i\in I}\lambda_i e_i\otimes e_i,\lambda_i\geq 0$, 则可以定义 $\sqrt{A}=\sum\limits_{i\in I}\sqrt{\lambda_i}e_i\otimes e_i$.

更一般地，对对称紧算子 A, 有 $-\|A\|I\leq A\leq\|A\|I$. 进而对 $f:(-\|A\|,\|A\|)\to\mathbb{R}$ 为连续函数，是否能够定义 $f(A)$?

首先证明如下的定理：

Theorem 3.8

设 $T_0,T_1,\cdots$ 为对称算子，且 $T_0\leq T_1\leq\cdots\leq T$, 其中 T 对称有界，则存在对称算子 T_∞ 使得 $\forall x\in X,T_\infty(x)=\lim\limits_{n\to\infty}T_n(x)$.

证明 不妨 $T_0=0$, 则 $\sup\limits_{n\geq 1}\|T_n\|\leq\|T\|<\infty$ 且 $\|T_n-T_m\|\leq\|T\|$.

则任意 $x\in X$, 有 $\{(T_nx,x)\}$ 为单增有界列，进而为 Cauchy 列，则

$$\begin{aligned}\|T_nx-T_mx\|^2&=((T_n-T_m)x,(T_n-T_m)x)\\&\leq\sqrt{((T_n-T_m)x,x)}\sqrt{((T_n-T_m)(T_n-T_m)x,(T_n-T_m)x)}\\&\leq\sqrt{(T_nx,x)-(T_mx,x)}\|T\|^{\frac{3}{2}}\|x\|\to 0.\end{aligned}$$

注意到第一个不等式使用了 $|(Tx,y)|\leq\sqrt{(Tx,x)}\sqrt{(Ty,y)}$. 故 $\{T_nx\}$ 为 Cauchy 列.

故定义 $T_\infty x=\lim\limits_{n\to\infty}T_nx$，则 T_∞ 为线性算子，且 $\|T_\infty\|\leq\|T\|<\infty$. 且有：

$$(T_\infty x,y)=\lim_{n\to\infty}(T_nx,y)=\lim_{n\to\infty}(x,T_ny)=(x,T_\infty y).$$

则 T_∞ 为对称算子. □

则设 $T\in\mathcal{L}(X)$ 对称，存在 m,M 使得 $mI\leq T\leq MI$, 并取 $a<m\leq M<b$. 首先考虑 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为实多项式，则 $f(T)$ 也可以被定义，且有界对称.

进一步，若 $f\in C[a,b]$ 为连续函数，则取多项式 $p_1\geq p_2\geq\cdots\geq f(t)=\lim\limits_{n\to\infty}p_n(t)\geq q(t)$ on $[a,b]$. 若能证明 $p_1(T)\geq p_2(T)\cdots\geq f(T)\geq q(T)$，则由上面的定理，可以定义 $f(T)=\lim\limits_{n\to\infty}p_n(T)$（思考：良定性?）

Proposition 3.6

对称算子 $T\in\mathcal{L}(X),mI\leq T\leq MI$, 实多项式 p 满足 $p(t)\geq 0,\forall t\in[m,M]$, 则 $p(T)\geq 0$.

证明 则设

$$p(t)=c\prod_{\alpha_i\leq m}(t-\alpha_i)\prod_{k=1}^{r}((t-r_k)^2+\delta_k^2)\prod_{\beta:j\geq M}(\beta_j-t).$$

故此时有

$$p(T)=c\prod_{\alpha_i\leq m}(T-\alpha_iI)\prod_{k=1}^{r}((T-r_kI)^2+\delta_k^2I)\prod_{\beta:j\geq M}(\beta_jI-T).$$

同时又由于 $T-\alpha_i I\ge 0, \beta_j I - T\ge 0$, 且

$$(((T-r_kI)^2+\delta_k^2 I)x,x)=\delta_k^2(x,x)+((T-r_kI)x,(T-r_kI)x)\ge 0.$$

则由下面的定理（在此不作证明）

Theorem 3.9 (Riesz-Nagy)

对称算子 $A\ge 0, B\ge 0$, 且 $AB=BA$, 则 $AB\ge 0$.

有 $p(T)\ge 0$. 故得证. □

则运用该命题，有 $p_1(T)\ge p_2(T)\cdots\ge f(T)\ge q(T)$，则由上面的定理 3.8，可以定义 $f(T)=\lim\limits_{n\to\infty} p_n(T)$. 故对任意 $[a,b]$ 上的连续函数 f, 我们定义了 $f(T)$.

更一般地，对 $f\in\mathcal{K}[a,b]=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}: f$有界，且存在从上的多项式逼近$p_1(t)\ge\cdots p_n(t)\ge\cdots\}$，可以同理定义 $f(T)$. 进而对 $\phi=f_1-f_2\in\mathcal{K}[a,b]-\mathcal{K}[a,b]=\{f_1-f_2: f_1,f_2\in\mathcal{K}[a,b]\}$, 可以定义 $\phi(T)=f_1(T)-f_2(T)$.

至此我们对相当广的函数空间中的函数 f 成功定义了 $f(T)$.

3.5 Fredholm 算子

回忆在 3.2 节中定义过 Fredholm 算子，我们记 $X \to Y$ 的 Fredholm 算子全体为 $F(X, Y)$. 下面是基本的例子.

Example 3.9 设 $X = Y, A \in \mathcal{C}(X), T = I - A$, 则 T 为 Fredholm 算子，且 $\mathrm{ind}(T) = 0$.

Example 3.10 $X = Y = l^2$, 则定义 $T : l^2 \to l^2, (x_1, x_2, \cdots) \mapsto (x_2, x_3, \cdots)$. 显然 $\dim N(T) = 1, \mathrm{codim} R(T) = 0$. 故 T 为 Fredholm 算子，$\mathrm{ind}(T) = 1, \mathrm{ind}(T)^n = n$.

再对 $T^* : (y_1, y_2, \cdots) \mapsto (0, y_1, y_2, \cdots)$ 为伴随算子，则 $\mathrm{ind}(T^*) = -1 = -ind(T)$.

事实上这可以推广到一般的结果: (1) 若 $T \in F(X, Y)$, 则 $T^* \in F(Y^*, X^*)$，且 $\mathrm{ind}(T^*) = -\mathrm{ind}(T)$.

(2) $T \in F(X)$, 则 $T^n \in F(X)$, 且 $\mathrm{ind}(T^n) = n\mathrm{ind}(T)$.

Example 3.11 $X = C^1[0, 1], Y = C[0, 1], T : X \to Y, f \mapsto f'$, 则 $T \in F(X, Y), \mathrm{ind}(T) = 1$.

下面我们给出 Fredholm 算子的等价刻画.

Theorem 3.10 (等价刻画)

对 B 空间 X, Y, 如下命题等价.

(1) $T \in F(X, Y)$.

(2) 存在 $\tilde{T} \in \mathcal{L}(Y, X), K_1 \in \mathcal{F}(X), K_2 \in \mathcal{F}(Y)$, 使得 $\tilde{T} \circ T = I_X - K_1, T \circ \tilde{T} = I_Y - K_2$.

(3) 存在 $\tilde{T} \in \mathcal{L}(Y, X), K_1 \in \mathcal{C}(X), K_2 \in \mathcal{C}(Y)$, 使得 $\tilde{T} \circ T = I_X - K_1, T \circ \tilde{T} = I_Y - K_2$.

(2) 存在 $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2 \in \mathcal{L}(Y, X), K_1 \in \mathcal{C}(X), K_2 \in \mathcal{C}(Y)$, 使得 $\tilde{T}_1 \circ T = I_X - K_1, T \circ \tilde{T}_2 = I_Y - K_2$. ♡

证明 (2) ⇒ (3) ⇒ (4) 显然，

(4) ⇒ (1) : 由条件，$N(T) \subseteq N(\tilde{T}_1 \circ T) = N(I_X - K_1), R(T) \supseteq R(T \circ \tilde{T}_2) = R(I_Y - K_2)$. 由 Riesz-Fredholm 定理，$\dim N(T) < \dim N(I_X - K_1) < \infty$，$\mathrm{codim} R(T) < \mathrm{codim} R(I_Y - K_2) < \infty$.

进而由命题 3.3 有分解 $Y = R(I_Y - K_2) \oplus M$, 其中 M 有限维，则设 $R(T) = R(I_Y - K_2) \oplus M'$, 其中 $M' \subseteq M$ 有限维，进而由 $R(I_Y - K_2)$ 和 M 闭，有 $R(T)$ 闭，故 T 为 Fredholm 算子.

(1) ⇒ (2) : 由命题 3.3 有直和分解 $X = N(T) \oplus X_1, Y = R(T) \oplus Y_1$, 进而考虑如下交换图表

$$\begin{tikzcd} N(X) \oplus X_1 \arrow[r, "T"] & R(T) \oplus Y_1 \arrow[d, two heads, "p_1"] \\ X_1 \arrow[u, hook, "i_1"] \arrow[r, "T_0"] & R(T) \end{tikzcd}$$

则 $T_0 = p_1 \circ T_0 \circ i_1 \in \mathcal{L}(X_1, R(T))$, 且可逆（为什么?）. 进而可以定义 $\tilde{T} = p_1 \circ T_0^{-1} \circ i_1 \in \mathcal{L}(Y, X)$. 此时对 $x = x_0 + x_1, x_0 \in N(T), x_1 \in X_1$ 和 $y = y_0 + y_1, y_0 \in R(T), y_1 \in Y_1$, 有

$$\tilde{T} \circ T(x_0 + x_1) = \tilde{T} x_1 = \tilde{T} T_0 x_1 = x_1.$$

$$T \circ \tilde{T}(y_0 + y_1) = T(T_0^{-1} y_0) = y_0.$$

进而取 $K_1 : X \to N(T) \subseteq X, K_2 : Y \to Y_1 \subseteq Y$ 为投影，有 $\tilde{T}, X, Y$ 符合条件. □

则我们可以证明下面 Fredholm 算子的性质.

Theorem 3.11

(1) 若 $T \in F(X,Y), S \in \mathcal{C}(X,Y)$, 则 $T+S \in \mathcal{F}(X,Y), \mathrm{ind}(T+S) = \mathrm{ind}(T)$.

(2) 若 $T_1 \in F(X,Y), T_2 \in F(Y,Z)$, 则 $T_2 \circ T_1 \in F(X,Z)$, 且 $\mathrm{ind}(T_2 \circ T_1) = \mathrm{ind}(T_1) + \mathrm{ind}(T_2)$.

(3) $F(X,Y) \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ 为开集, 且 $\mathrm{ind}: F(X,Y) \to \mathbb{Z}$ 为局部常值函数.

(4) 若 $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, 则 $T \in F(X,Y)$ 且 $\mathrm{ind}(T) = 0 \Longleftrightarrow$ 存在 $L \in \mathcal{L}(X,Y)$ 可逆和 $K \in \mathcal{C}(X,Y)$ 使得 $T = L - K$.

♡

证明

(2) 首先由等价刻画, 存在 $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2$, 有界和 $K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22}$ 紧, 使得

$$\tilde{T}_1 \circ T_1 = I_X - K_{11}, T_1 \circ \tilde{T}_1 = I_Y - K_{12}.$$

$$\tilde{T}_2 \circ T_2 = I_Y - K_{21}, T_2 \circ \tilde{T}_2 = I_Z - K_{22}.$$

故有

$$(\tilde{T}_1 \circ \tilde{T}_2) \circ (T_2 \circ T_1) = \tilde{T}_1 \circ (I_Y - K_{21}) \circ T_1 = I_X - (K_{11} + \tilde{T}_1 \circ K_{21} \circ T_1).$$

$$(T_2 \circ T_1) \circ (\tilde{T}_1 \circ \tilde{T}_2) = \tilde{T}_2 \circ (I_Y - K_{12}) \circ T_2 = I_Z - (K_{22} + \tilde{T}_2 \circ K_{12} \circ T_2).$$

则注意到括号中的算子均为紧的, 则由等价刻画, 有 $T_2 \circ T_1$ 为 Fredholm 算子.

再证明关于指标的命题. 仍然考虑交换图表, 其中 T_{01} 和 T_{02} 是双射.

$$\begin{tikzcd}
X = N(T_1) \oplus X_1 \arrow[r, "T_1"] & Y = R(T_1) \oplus Y_1 \arrow[d, "p_1"] \\
X_1 \arrow[u, "i_1"] \arrow[r, "T_{01}"] & R(T_1)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Y = N(T_2) \oplus Y_2 \arrow[r, "T_2"] & Z = R(T_2) \oplus Z_2 \arrow[d, "p_2"] \\
Y_2 \arrow[u, "i_2"] \arrow[r, "T_{02}"] & R(T_2)
\end{tikzcd}$$

则令 $W_1 = R(T_1) \cap Y_2, W_2 = R(T_1) \cap N(T_2), W_3 = Y_1 \cap N(T_2), W_4 = Y_1 \cap Y_2$. 进而 $R(T_1) = W_1 \oplus W_2, Y_1 = W_3 \oplus W_4$.

取 $X_2 = T_{01}^{-1}(W_2) \subseteq X_1$, 有 $\dim X_2 = \dim W_2 \leq \dim N(T_2) < \infty$. 再取 $Z_4 = T_{02}(W_4)$, 则 $\dim Z_4 = \dim W_4 \leq \dim Y_1 < \infty$. 注意到此时有

$$R(T_2) = T_{02}(W_1 \oplus W_4) = T_{02}(W_1) \oplus T_{02}(W_4) = R(T_2 \circ T_1) \oplus Z_4, N(T_2 \circ T_1) = T_{01}^{-1}(W_2 \oplus W_3) = X_2 \oplus N(T_1).$$

故

$$\dim N(T_2 \circ T_1) = \dim N(T_1) + \dim W_2, \mathrm{codim} R(T_2 \circ T_1) = \mathrm{codim} R(T_2) + \dim W_4.$$

进而

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind}(T_2 \circ T_1) &= \dim N(T_1) + \dim W_2 - \operatorname{codim} R(T_2) - \dim W_4 \\
&= (\operatorname{ind}(T_1) + \dim W_3 + \dim W_4) + \dim W_2 - (\dim W_2 + \dim W_3 - \operatorname{ind}(T_2)) - \dim W_4 \\
&= \operatorname{ind}(T_1) + \operatorname{ind}(T_2).
\end{aligned}$$

故得证.

(1) 由等价刻画，取 $\tilde{T} \in \mathcal{L}(Y, X)$ 以及 K_1, K_2 紧, 使得 $\tilde{T} \circ T = I_X - K_1, T \circ \tilde{T} = I_Y - K_2$, 注意到由等价刻画这也意味着 $\tilde{T} \in F(Y, X)$. 则

$$\tilde{\circ}(T+S) = I_X - (K_1 - \tilde{T} \circ S), (T+S) \circ \tilde{T} = I_Y - (K_2 - S \circ \tilde{T}).$$

其中 $\tilde{T} \circ S, S \circ \tilde{T}$ 均紧，则两个括号均紧，则由等价刻画，$T + S \in F(X, Y)$.

并由 Riesz-Fredholm 定理，有

$$\operatorname{ind}(\tilde{T}) + \operatorname{ind}(T+S) = \operatorname{ind}(\tilde{T} \circ (T+S)) \overset{(2)}{=} \operatorname{ind}(I_X - K_1') = 0 = \operatorname{ind}(\tilde{T} \circ T) = \operatorname{ind}(\tilde{T}) + \operatorname{ind}(T).$$

故 $\operatorname{ind}(T+S) = \operatorname{ind}(T)$.

(3) 对 $T \in F(X, Y)$, 则存在 $\tilde{T} \in F(Y, X)$ 使得 $\tilde{T} \circ T = I_X - K_1, T \circ \tilde{T} = I_Y - K_2$, 其中 K_1, K_2 紧. 令 $\varepsilon = \frac{1}{\|\tilde{T}\|}$, 则当 $\|S\|$ 时，有 $E_X = I_X + \tilde{T} \circ S, E_Y = I_Y + S \circ \tilde{Y}$ 均可逆，且此时

$$\tilde{T} \circ (T+S) = E_X - K_1 = E_X \circ (I_X - E_X^{-1} \circ K_1), (T+S) \circ \tilde{T} = (I_Y - K_2 \circ E_Y^{-1}) \circ E_Y.$$

注意到这里 $K_1' = E_X^{-1} \circ K_1, K_2' = K_2 \circ E_Y^{-1}$ 均紧. 进而有

$$(E_x^{-1} \circ \tilde{T}) \circ (T+S) = I_X - K_1', (T+S) \circ (\tilde{T} \circ E_Y^{-1}) = I_Y - K_2'.$$

故 $T + S \in F(X, Y)$. 故 $F(X, Y) \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ 为开集. 且由 Riesz-Fredholm 定理

$$\operatorname{ind}(E_X^{-1}) + \operatorname{ind}(\tilde{T}) + \operatorname{ind}(T+S) \overset{(2)}{=} \operatorname{ind}((E_X^{-1} \circ \tilde{T}) \circ (T+S)) = 0 = \operatorname{ind}(T \circ \tilde{T}) \overset{(2)}{=} \operatorname{ind}(T) + \operatorname{ind}(\tilde{T}).$$

注意到 $\operatorname{ind}(E_X^{-1}) = 0$, 进而 $\operatorname{ind}(T) = \operatorname{ind}(T+S)$.

(4) $\Leftarrow$: 由 (1) 立得.

$\Rightarrow$: 再次考虑

$$\begin{tikzcd}
N(T) \oplus X_1 \arrow[r, "T"] & R(T) \oplus Y_1 \arrow[d, "p_1"] \\
X_1 \arrow[u, hook, "i_1"] \arrow[r, "T_0"] & R(T)
\end{tikzcd}$$

T_0 为双射，且由于 $\operatorname{ind}(T) = 0$, 故存在同构 $\phi : N(T) \to Y_1$, 并且设 $K_1 : X \to N(T), K_2 : Y \to Y_1$ 为投影. 则定义 $L = T + \phi \circ K_1$, 注意到 $\phi \circ K_1$ 为紧的.

L 是单的：若 $L(x) = 0$, 则由直和分解，只能 $T(x) = 0 = \phi(K_1(x))$, 进而 $K_1(x) = 0$, 故 $x = 0$.

L 是满的：任意 $y \in Y$, 写成分解式 $y = y_0 + y_1, y_0 \in R(T), y_1 \in Y_1$, 则取 $x_0 = T_0^{-1}(y_0) \in X_1, x_1 = \phi^{-1}(y_1) \in N(T)$. 此时 $L(x_0 + x_1) = y_0 + y_1 = y$.

故 $T = L - \phi \circ K_1$ 为想要的分解. □