

群与代数表示论

Ref. 《群与代数表示论》 by 马. 章. 李

Chap 1. 基本概念.

1. 定义. 例子

Def. G : 群 V : F -向量空间

若 $\exists$ 同态 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ 则称 (V, ρ) 为 G 的 F -线性表示

若 $\dim_F V < +\infty$ 则 $\deg \rho = \dim_F V$ 为表示的维数/次数

记 $g \cdot v \equiv \rho(g)(v)$

(选定 V 的 F -基 B)

Rmk 对有限群 G 的 n 维表示 $(V, \rho) \Leftrightarrow$ 给出 $|G|$ 个 n 维可逆矩阵 $\rho_B(g)$

$$s.t. \rho_B(g_1 g_2) = \rho_B(g_1) \cdot \rho_B(g_2)$$

Ex. ① $V = F$. 定义 $ga = a$ ($g \in G, a \in V$). 则称 V 为 G 的单位 F -表示

$$\textcircled{2} G = D_4 = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = (ba)^2 = 1 \rangle \quad V = \mathbb{C}^2$$

$$\text{定义 } \rho(a) = \begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix} \quad \rho(b) = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \quad \rho(a^m b^n) = (\rho(a))^m (\rho(b))^n$$

$$\textcircled{3} V = FG = \text{span}_F G$$

$$\forall g \in G. \text{ 对 } x = \sum_{h \in G} x_h h \in V \quad x_h \in F \text{ 定义}$$

$$gx \equiv \sum_{h \in G} x_h (g \cdot h)$$

V 为 $|G|$ 维 F -表示. 记为 (FG, ρ_{reg}) . 正则表示

Def. (i) 子表示: (V, ρ) 为 G 的 F -表示. U 为 V 子空间且 $\rho(g)U \subseteq U$ ($\forall g \in G$)

则 $(U, \rho|_U)$ 为子表示

(ii) 同构/同构: 对 (V_i, ρ_i) ($i=1,2$) 为 G 的 F -表示

若 f 线性映射 $f: V_1 \rightarrow V_2$

s.t. $\forall g \in G$. 下同变换

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{f} & V_2 \\ \rho_1(g) \downarrow & \searrow \scriptstyle \square & \downarrow \rho_2(g) \\ V_1 & \xrightarrow{f} & V_2 \end{array} \quad (\text{also known as } \text{等变}) \\ \text{equivariant}$$

则称 f 为 $V_1 \rightarrow V_2$ 的表示同态 (or G -模映射).

此外若 f 双射 则为同构

记 $\text{Hom}_G(V_1, V_2)$ 为全体 $V_1 \rightarrow V_2$ 的 G -模映射

2. 构造表示

(i) 直和. 补表示

Lemma. U 为 V 的子表示. 则 U 有补表示 $\Leftrightarrow \exists V \rightarrow U$ 的 G -模投影

(pf. 线性代数)

(ii) 反变表示

$$(V, \rho) \rightarrow (V^*, \rho^*) \quad \rho^*(g)(f)(v) = f(g^{-1} \cdot v) \quad (\forall f \in V^*, v \in V) \\ \Rightarrow \rho_{V^*}^*(g) = (\rho_V(g)^T)^{-1}$$

(iii) 张量积

(iv) 提升

Fact. $N \triangleleft G$. 则 $\{G/N \text{ 的表示}\} \leftrightarrow \{G \text{ 的表示 } \rho \text{ 且 } \ker \rho \supseteq N\}$

(v) 外张量积

$$(V_1, \rho_1) \text{ } G_1 \text{ 表示} \Rightarrow \rho_1 \# \rho_2 : G = G_1 \times G_2 \rightarrow GL(V_1 \otimes V_2)$$

$$(\rho_1 \# \rho_2)(g) = \rho_1(g_1) \otimes \rho_2(g_2) \quad g = (g_1, g_2) \in G$$

3. 不可约与完全可约表示

Def. G 的非0表示 (V, ρ) 称为不可约 若它无非平凡子表示

$\text{Irr}_F G$: 互不同构的不可约 F -表示全体

若 (V, ρ) 可分解为不可约表示的直和, 则称 (V, ρ) 为完全可约表示

Lemma 不可约表示为正则表示的商表示

(pf. $\forall v \neq 0 \in V$ 定义 $\pi: FG \rightarrow V$

$$\sum_{g \in G} \lambda_g g \mapsto \sum_{g \in G} \lambda_g (gv)$$

$\pi(v) = V \Rightarrow \text{Im } \pi$ 为 V 的 非零 子表示 $\Rightarrow \text{Im } \pi = V \quad \forall v \in FG / \ker \pi$.)

Ex. $G = \langle g \rangle$ 为 p 阶循环群 $(\mathbb{Q}G, \text{reg})$ 正例

$$\text{令 } U = \mathbb{Q}(g-1) \oplus \mathbb{Q}(g^2-g) \cdots \oplus \mathbb{Q}(g^{p-1}-g^{p-2})$$

若 U 有子表示 $W \neq 0$ 且 $W \neq U$ 则 $\dim_{\mathbb{Q}} W < p-1 \Rightarrow$ 取基 $g+1, p_B(g) = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \varphi(\lambda) = |\lambda I - A| |\lambda I - D|$$

另一方面取 U 的基 $\{g-1, g^2-g, \dots, g^{p-1}-g^{p-2}\}$ ($U \subset B$) $\Rightarrow p_{B'}(g) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

特征多项式不可约, 矛盾!

$\Rightarrow U$ 为 G 的不可约 $\mathbb{Q}$ -表示

Lemma. TFAE: (i) (V, ρ) 完全可约

(ii) (V, ρ) 为若干不可约子表示之和

(iii) (V, ρ) 任一子表示有补表示

(iv) (V, ρ) 任一不可约子表示有补表示

Prop. G Abel. 则 G 的不可约复表示均为 1-维

(pf. (V, ρ) 不可约复表示. $gh=hg \Rightarrow \rho(h)\rho(g) = \rho(g)\rho(h)$)

由线性代数知 $\{\rho(g) | g \in G\}$ 有公共特征向量 v

令 $U = \mathbb{C}v$. 则 U 为 V 子表示. 由不可约有 $U=V$. #)

Lemma (Schur) (V, ρ) 为任一群 G 的不可约 F -表示

(i) $f: V_1 \rightarrow V_2$ 非零 G -模映射 则为同构

(ii) $\text{Hom}_G(V_1, V_1)$ 为包含 F 的除环

(iii) 若 F 代数闭. 则 $\text{Hom}_G(V_1, V_1) \subseteq F$

(pf. (i) $W = \ker f$ 由 V_1 不可约. $W=0$

$\Rightarrow$ 同构

$W' = \text{Im } f$. 由 V_2 不可约 $W'=V_2$

(iii) $\forall \alpha \in \text{Hom}_G(V_1, V_1)$. 由 F 代数闭. $\exists \lambda \in F$. $\alpha \neq 0$

s.t. $\alpha v = \lambda v$ 由 V_1 不可约. $Gv = V_1 \Rightarrow \alpha = \lambda 1_{V_1}$. #)

Def. 若 $\forall V \in \text{Irr}_F G$ 有 $\text{Hom}_G(V, V) \subseteq F$ 则称 F 为 G 的分裂域
(故代数闭域均为分裂域)

Thm (V, ρ) 为有限群 G 的有限维复表示. 则 (V, ρ) 为酉表示

(pf. 取一组基 $\{u_1, \dots, u_n\}$ $(\cdot, \cdot)$ 为标准 Hermite 内积

定义 $\langle \cdot, \cdot \rangle$: $\langle v_1, v_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (g v_1, g v_2)$

易验证这是一个 G -不变的 Hermite 内积 #)

Cor (V, ρ) 为有限群的 n -维表示. $g \in G$. $g^m = 1$. 则 $\exists V$ 的基 $B(g)$

s.t. $\rho_{B(g)}(g) = \text{diag} \{ \omega_1, \dots, \omega_n \}$ ω_i 为 m -次单位根

4. Maschke 定理

设 $\text{char } F \nmid |G|$ 若 $\text{char } F = 0$ 或 $\text{char } F > 0$ 且 $\text{char } F \nmid |G|$

Thm (Maschke) G 有限群 $\text{char } F \nmid |G|$ 则 G 的任 F -表示完全可约.

Cpf. 只须证 F -表示 (V, ρ) 的子表示 U . $\exists \psi: V \rightarrow U$ 为 G -模投影.

令 $p: V \rightarrow U$ 投影. 定义 $\psi: V \rightarrow U$ as

$$\psi(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} p(gv)$$

易验证 $\psi|_U = 1_U$ 且 G -不变.

#)

事实上该定理之逆也成立.

Thm G 有限 G 的任 F -表示完全可约 $\Leftrightarrow \text{char } F \nmid |G| \Leftrightarrow (FG, \rho_{\text{reg}})$ 完全可约

(pf. 设 (FG, ρ_{reg}) 完全可约 若 $\text{char } F \mid |G|$ 设 $G = \{g_1 = 1, g_2, \dots, g_n\}$

$$n = p^q \quad p = \text{char } F. \quad \frac{1}{n} z = \sum_{g \in G} g \in FG$$

则 Fz 关于 FG 有补表示 W 即有直和表示 $FG = Fz \oplus W$

$$\Rightarrow \exists a \in F \quad w \in W \quad \text{s.t.} \quad 1 = az + w$$

$$gz = z \Rightarrow gw = 1 - az. \quad g_2 w = g_2 - az \quad \dots \quad g_n w = g_n - az$$

$$\text{则 } \sum_{i=1}^n g_i w = \sum_{i=1}^n g_i - \underbrace{na z}_{0 \text{ in } Fz} = z \in Fz \cap W = 0. \quad \text{矛盾!} \Rightarrow \text{char } F \nmid |G|$$

5. 不可约分解

总设 G 有限 $\text{char } F \nmid |G|$ 则任一 F -表示 V 可分解为

$$V = n_1 V_1 \oplus \dots \oplus n_s V_s \quad V_i \text{ 不可约且互不同构}$$

Thm. (分解唯一) $V = n_1 V_1 \oplus \dots \oplus n_s V_s = m_1 W_1 \oplus \dots \oplus m_t W_t$ 如上

则 $s=t$ 且 $\exists \{1, \dots, s\}$ 的置换 π s.t. $W_i = V_{\pi(i)}$ $m_i = n_{\pi(i)}$

Thm. (正则表示的分解) G 的任一不可约 F -表示为 (FG, P_{reg}) 的直和项 (故有限个)

更具体地 令 $(V_1, P_1), \dots, (V_s, P_s)$ 为所有互不同构的不可约 F -表示.

$$\text{则 } P_{\text{reg}} = \left(\frac{\deg P_1}{d_1} \right) P_1 \oplus \dots \oplus \left(\frac{\deg P_s}{d_s} \right) P_s$$

其中 $d_i = \dim_F \text{Hom}_G(V_i, V_i)$

(Pf. $P_{\text{reg}} = n_1 P_1 \oplus \dots \oplus n_s P_s$ 为不可约分解. 则

$$0 \neq V \subseteq \text{Hom}_G(FG, V) \subseteq n_1 \text{Hom}_G(V_1, V) \oplus \dots \oplus n_s \text{Hom}_G(V_s, V)$$

则 $\exists i$ s.t. $\text{Hom}_G(V_i, V) \neq 0$ 则 $V \subseteq V_i$ $\text{Hom}_G(V_j, V) = 0$ ($\forall j \neq i$)

$$\text{则取 } V = V_i. \quad \dim_F V_i = n_i d_i \Rightarrow n_i = \frac{\deg P_i}{d_i} \quad \#.)$$

Cor. $V_1, \dots, V_s$ 如上 $n_i = \dim_F V_i$ $d_i = \dim_F \text{Hom}_G(V_i, V_i)$

则 $|G| = \sum_{i=1}^s \frac{n_i^2}{d_i}$ 特别地, 若 F 为分裂域. 则 $|G| = \sum_{i=1}^s n_i^2$

6. 不可约表示的例子

① 一次表示. 对群 G G' 为导群. 则 $\{G \text{ 的一次表示}\} \leftrightarrow \{G/G' \text{ 的一次表示}\}$

(pf. 设 (F, ρ) 为 G 的一次表示. 则 $\rho: G \rightarrow GL(F) = F^*$ 为同态

$\Rightarrow G/\ker \rho \cong \text{Im } \rho$ 为 Abel 群 $\Rightarrow \ker \rho \geq G'$ #)

Ex (S_n 的一次表示) $n=1$ or $n=2$ 且 $\text{char } F=2 \Rightarrow$ 只有单位表示

$n=2$ $\text{char } F \neq 2 \Rightarrow$ 有 2 个一次表示. 单位表示和 (F, ρ)

$$\rho(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma \text{ 偶置换} \\ -1, & \sigma \text{ 奇} \end{cases}$$

$n \geq 3$. $S_n' = A_n \Rightarrow$ 若 $\text{char } F \neq 2$ 有 2 个一次表示如上

$\text{char } F=2$ 只有单位表示

② S_n 在 n 元集 $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ 上自然作用 $\Rightarrow S_n$ 的置换表示 (FX, ρ)

$$\text{令 } V_1 = FX, \quad X = \sum_{i=1}^n x_i$$

$$V_2 = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i \mid a_i \in F, \sum_{i=1}^n a_i = 0 \right\}$$

Lemma. (i) 若 $\text{char } F \neq 2$. 则 $\text{Hom}_G(V_2, V_2) = F$

(ii) 若 $\text{char } F \neq n$. 则 $FX = V_1 \oplus V_2$ 且 V_2 为 S_n 的 $n-1$ 次不可约表示.

(pf. (i) $f \in \text{Hom}_G(V_2, V_2)$ 令 $f(x_i - x_1) = a_{ij} x_j$ ($2 \leq i \leq n$)

$$\text{由 } f((ij)(x_i - x_1)) = (ij)f(x_i - x_1) \Rightarrow f(x_i - x_1) = a_{ji}(x_i - x_1)$$

$$\text{再由 } f((ij)(x_1 - x_i)) = (ij)f(x_1 - x_i) \Rightarrow a_{ii} = a_{jj} \Rightarrow f \text{ 为数乘}$$

(ii) 若 U 为 V_2 的子表示. 取 $0 \neq u = \sum_{i=1}^n a_i x_i \in U \Rightarrow u \notin FX$

不妨设 $a_1 \neq a_2$. 则 $u - (12)u = (a_1 - a_2)(x_1 - x_2) \in U \Rightarrow x_1 - x_2 \in U$

又 $(2i)(x_1 - x_2) = x_1 - x_i$ $\{x_1 - x_i\}$ 为 V_2 的基 $\Rightarrow U = V_2$. #)

③ G 有有限群, 指数为 m 若 F 含 m -次本原单位根, 则 F 有全部 m -次单位根且 $\text{char } F \nmid |G|$

Lemma. G 如上且 Abel. 则 (i) 若 F 为分裂域, 则 G 的不可约 F -表示为 1-次
 (ii) 若 F 含 m -次本原单位根, 则 G 的不可约 F -表示均为 1-次, 且恰有 $|G|$ 个 1-次表示
 (pf 设 (V, ρ) 为不可约 F -表示.

(i) G Abel. 则 $\rho(g)$ 为 $V \rightarrow V$ 的 G -模映射

由 F 分裂 $\Rightarrow \rho(g)$ 为数乘. 由 V 不可约 $\Rightarrow V$ 为 1-维

(ii) $g^m = 1 \Rightarrow \rho(g)$ 由 $x^m - 1$ 零化. 由 F 有本原根, $\rho(g)$ 在 F 中有特征值 λ_g

由 G Abel, $\ker(\rho(g) - \lambda_g \text{Id}_V)$ 为子表示 $\Rightarrow \rho(g)$ 为倍乘 $\lambda_g \Rightarrow V$ 1-次 F 分裂)

Lemma. G 非 Abel $\text{char } F \nmid |G|$ 则 G 的 2-次忠实 F -表示不可约

(pf (V, ρ) 2-次忠实 F -表示. 若 V 可约, 则由 Maschke's Thm V 完全可约.

$\Rightarrow \forall g \in G$ $\rho(g)$ 矩阵形如 $\begin{pmatrix} \lambda_1(g) & \\ & \lambda_2(g) \end{pmatrix} \Rightarrow \rho(g)\rho(h) = \rho(h)\rho(g)$

$\Rightarrow ghg^{-1}h^{-1} \in \ker \rho \stackrel{\text{忠实}}{=} \{1\}$ 与 G 非-Abel 矛盾 #)

Ex. $D_4 = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = (ba)^2 = 1 \rangle$

$a^2 = bab^{-1}a^{-1} \Rightarrow D_4 \supseteq \langle a^2 \rangle$ 又易证 $\langle a^2 \rangle \triangleleft D_4$ 且 $D_4 / \langle a^2 \rangle$ 4-阶 Abel

故 $D_4' = \langle a^2 \rangle$ 故 D_4 的 1-次表示 $\hookrightarrow D_4 / D_4' = V$ 的 1-次表示 (Klein 4 元群)

$\Rightarrow D_4$ 有 4 个 1-次实表示 $(\mathbb{R}, \text{Id}), (\mathbb{R}, \rho_i) \ (i=1, 2, 3)$

同时又有 2-次表示 $(\mathbb{R}^2, \rho)$ $\rho(a) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ $\rho(b) = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$ 忠实

$\Rightarrow \rho$ 不可约 另证 $\text{Hom}_G(\rho, \rho) = \mathbb{R}$

由 $1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 = 8 \Rightarrow D_4$ 的不可约实表示恰为上述五个

Chap2 特征标理论

1. 基本概念

(V, ρ) 为 G 的 F -表示 $\forall g \in G$ 令 $\chi_\rho(g) = \text{tr } \rho(g)$ 为 G 上的 F -值函数

χ_ρ 称为 ρ 的特征标. $\deg \chi_\rho = \deg \rho$. 若为 1 则称线性特征标

记 $\text{Irr}_F G$ 为互不同构的不可约 F -表示的特征标集合

$R_F^+(G)$ 为互不同构的 F -表示的集合. $\text{ch}_F^+(G)$ 为 $R_F^+(G)$ 中特征标集合

Rmk. ① $(V_1, \rho_1) \cong (V_2, \rho_2) \Rightarrow \chi_{\rho_1} = \chi_{\rho_2}$

② χ_ρ 为 G 上类函数

③ $\chi_\rho(1) = \deg \rho$ 1_F

④ $\rho' = \rho|_U$ $\rho'' = \rho_{V/U}$ 则 $\chi_\rho = \chi_{\rho'} + \chi_{\rho''}$

⑤ $\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$

⑥ $\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2}(g) = \chi_{\rho_1}(g_1) \cdot \chi_{\rho_2}(g_2)$

⑦ α 为线性特征标, χ 为不可约特征标. 则 $\alpha \cdot \chi$ 为不可约特征标

⑧ $F = \mathbb{C}$. 则 $\chi_{\rho}(g) = \overline{\chi_{\rho}(g)}$

Def. 设 $C_1 = \{1\}, \dots, C_s$ 为有限群 G 的全部共轭类

$\widehat{\text{Irr}}_F G = \{\rho_1, \dots, \rho_t\}$ χ_i 为 ρ_i 的特征标 (χ_i 为单位)

令 $\chi_{ij} = \chi_i(g_j)$ ($g_j \in C_j$) $h_j = |C_j|$. 则如下表为特征标表

	C_1	C_2	C_3	C_s
χ_1	1	1	1	1
$\vdots$				
χ_i	χ_{i1}	χ_{i2}	χ_{i3}	χ_{is}
$\vdots$				
χ_t	χ_{t1}	χ_{t2}	χ_{t3}	χ_{ts}

2. 正交关系

本环设 G 有限, $\text{char } F \nmid |G|$

对 φ, ψ 为 G 上 F -值函数, 定义 (φ, ψ) as

$$(\varphi, \psi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) \psi(g^{-1})$$

若 $(\varphi, \psi) = 0$ 则称 φ 和 ψ 正交

Rmk. 若 $F = \mathbb{C}$ 则 $(\chi_1, \chi_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_1(g) \overline{\chi_2(g)}$

Thm (第一正交) $(V_1, \rho_1), (V_2, \rho_2)$ 为 G 的两个不可约 F -表示.

$$(\chi_1, \chi_2) = \begin{cases} \dim_F \text{Hom}_G(V_1, V_2) & \text{若 } \rho_1 \cong \rho_2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

特别地 若 F 为 G 的分裂域 则 $\rho_1 \cong \rho_2 \Leftrightarrow \chi_1 = \chi_2 \Rightarrow |\overline{\text{Irr}}_F G| = |\text{Irr}_F G|$

(Pf. i) $\forall (V, \rho) \in R_F^+(G) \quad \wedge \quad \text{Inv}_G(V) = \{v \in V \mid gv = v, \forall g \in G\}$

其为 V 的子表示.

考虑 $z = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \in \text{End}(V) \Rightarrow \forall h \in G \quad \rho(h) z = z \rho(h) = z$

故 $z^2 = z$ 记 $V = V_0 \oplus V_1$ 为对应特征值 1 的子空间 易证 $\text{Inv}_G(V) = V_1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) &= \text{tr}(z) = \text{tr}(z|_{V_1}) = \text{tr}\left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)|_{V_1}\right) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\text{Inv}_G(V)}(g) \end{aligned}$$

(ii) $\forall U, V \in R_F^+(G)$ 则 $\forall f \in \text{Hom}_F(U, V) \quad g \in G$.

定义 $gf: U \rightarrow V$

$$v \mapsto g(f(g^{-1}v))$$

则 $\text{Hom}_F(U, V)$ 为 G 的 F -表示. $\text{Hom}_G(U, V)$ 为子表示

可验证 $\text{Hom}_G(u, v) = \text{Inv}_G(\text{Hom}_F(u, v))$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\chi_u, \chi_v) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_u(g^{-1}) \chi_v(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{u^*}(g) \chi_v(g) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\text{Hom}_F(u, v)}(g) \stackrel{(i)}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\text{Hom}_G(u, v)}(g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iii) 由(ii): } (\chi_1, \chi_2) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\text{Hom}_G(V_1, V_2)}(g) \\ &= \begin{cases} (\dim_F \text{Hom}_G(V_1, V_2)) 1_F, & P_1 \simeq P_2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad \#) \end{aligned}$$

Thm. F 为特征 $p > 0$ 的域 $V = n_1 V_1 \oplus \dots \oplus n_s V_s$ 为不可约分解

$$\text{则 } n_i = \frac{(\chi, \chi_i)}{d_i} \quad d_i = \dim_F \text{Hom}_G(V_i, V_i)$$

$$\text{(pf) } (\chi, \chi_i) = \left(\sum_{j=1}^s n_j \chi_j, \chi_i \right) = \sum_{j=1}^s n_j \delta_{ij} d_i = n_i d_i$$

Corollary 为特征 $p > 0$ 的域 $P_1, P_2 \in R_F^+(G)$ 则 $P_1 \simeq P_2 \Leftrightarrow \chi_{P_1} = \chi_{P_2} \Rightarrow |\overline{\text{Irr}}_F G| = |\text{Irr}_F G|$

② F 为特征 $p > 0$ 的分裂域 则 P 不可约 $\Leftrightarrow (\chi, \chi) = 1$

3. 分裂域上不可约常表示个数

本节设 G 有限, $\text{char } F \nmid |G|$ 且 F 为 G 的分裂域

记 $\text{cf}_F(G)$ 为 G 上 F -值类函数的集合. 则 $\text{cf}_F(G)$ 为 F 上向量空间 维数为 s . 其中 s 为 G 的共轭类数

Thm. G 的不可约特征标构成了 $\text{cf}_F(G)$ 的基 且 $\forall f \in \text{cf}_F(G)$ 有

$$f = \sum_{\chi \in \text{Irr}_F(G)} (f, \chi) \chi$$

特别地, $|\text{Irr}_F(G)| = s$. s 又同上.

(Pf. (i)) 对 $f \in \text{cf}_F(G)$ $(V, \rho) \in R_F^+(G)$ 对 $P_f = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \rho(g) \in \text{End}(V)$

则 P_f 为 G -模映射.

对 (V, ρ) 为 n 维不可约 F -表示. 则 $P_f = \lambda_f \cdot 1_V \Rightarrow \text{tr } P_f = n \lambda_f$

$$\Rightarrow n \lambda_f = \text{tr } P_f = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \chi(g) = (f, \chi^*)$$

$$\text{取 } f = \chi^* \quad \text{则 } n \lambda_{\chi^*} = (\chi^*, \chi^*) = 1 \Rightarrow \text{char } F \nmid n, P_f = \frac{(f, \chi^*)}{n} \cdot 1_V$$

(ii) 设 $\text{Irr}_F(G) = \{\chi_1, \dots, \chi_t\}$. 若 $f \in \text{cf}_F(G)$ 满足 $(f, \chi_i^*) = 0$ ($\forall 1 \leq i \leq t$)

则写 $P_{\text{reg}} = \bigoplus_{i=1}^t m_i \rho_i$ $n_i = \dim_F V_i$ 有

$$(P_{\text{reg}})_f = \underbrace{\bigoplus_{i=1}^t (P_i)_f}_{m_i \uparrow} \stackrel{(i)}{=} 0 \quad (f, \chi_i^*) = 0$$

$$\text{另一方面 } (P_{\text{reg}})_f(1) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) g \Rightarrow f = 0$$

(iii) 首先 $\text{Irr}_F(G)$ 在 $\text{cf}_F(G)$ 中线性无关. 因为若

$$\chi = \sum_i \lambda_i \chi_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = (\chi, \chi_i) = 0.$$

其次 $\forall f \in C_F(G)$. 令 $\lambda_i = (f, \chi_i^*)$ ($1 \leq i \leq t$)

由 ρ_i^* 不可约. $\rho_i^* = \rho_{\pi(i)}$. $\chi_i^* = \chi_{\pi(i)}$ π 为置换

令 $f' = f - \sum_{i=1}^t \lambda_i \chi_{\pi(i)}$ 则

$$(f', \chi_j^*) = (f, \chi_j^*) - \sum_{i=1}^t \lambda_i (\chi_{\pi(i)}, \chi_j^*)$$

$$= (f, \chi_j^*) - \lambda_j = 0 \quad (\text{ii}) \Rightarrow f = \sum_{i=1}^t (f, \chi_i) \chi_i$$

$\Rightarrow \text{Irr}_F(G)$ 为 $(f_F(G))$ 的基 $t = |\text{Irr}_F(G)| = |\text{Irr}_F(G)| = s$. #)

→ 正交列. 第-正交. 正交. 在标表上容易看出.

Thm (第-正交) 设 $g_j \in G$ ($1 \leq j \leq s$) 则

$$\sum_{i=1}^s \chi_i(g_j) \chi_i(g_k^{-1}) = \frac{|G|}{h_j} \delta_{jk}.$$

特别地. 若 $F = \mathbb{C}$ 则 $\sum_{i=1}^s \chi_{ij} \bar{\chi}_{ik} = \frac{|G|}{h_j} \delta_{jk}$

cpf. $X \triangleq (\chi_{ij})_{s \times s}$. $\bar{X} \triangleq (\chi_i(g_j^{-1}))_{s \times s}$. $A = \begin{pmatrix} h_1 & & \\ & \ddots & \\ & & h_s \end{pmatrix}$

则第-正交给出 $XA\bar{X}^T = |G| \cdot I_s$

$$\Rightarrow \bar{X}^T X A = |G| \cdot I_s \quad \bar{X}^T X = |G| A^{-1} \quad \#)$$

Ex ① G Abel $\Leftrightarrow G$ 的不可约复表示均 1 维 $\Leftrightarrow G$ 有 $|G|$ 个不可约复表示

② G 的线性特征标数 = $[G : G']$

③ 若 G 有指数 m 的 Abel 子群 H 则 G 的不可约复表示至多 m 维

(pf. 若 (V, ρ) 为 G 的不可约复表示. 则 $(V, \rho|_H)$ 为 H 的表示

取 $(V, \rho|_H)$ 的不可约子表示 U . 则 $\dim_{\mathbb{C}} U = 1$ 令 $U = \langle u \rangle$ $V' = \{gu : g \in G\}$

则 V' 为 (V, ρ) 的非零子表示. $V' = V$.

另一方面. 设 $G = g_1 H \cup \dots \cup g_m H$ 为左陪集分解. 则 $V' = \{g_i u \mid 1 \leq i \leq m\}$

故 $\dim_{\mathbb{C}} V = \dim_{\mathbb{C}} V' \leq m$ #)

4. 特征标表算例

以下均考虑复特征标

$$\textcircled{1} S_2: \begin{array}{c|cc} & (1) & (12) \\ \hline \chi_1 & 1 & 1 \\ \chi_2 & 1 & -1 \end{array}$$

$S_3: \pi: S_3 \rightarrow S_3/S_3' = S_2 \Rightarrow$ 有2个线性 χ_1, χ_2

$$n_i = \deg \chi_i \quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 6 \Rightarrow n_3 = 2$$

(S_3 有3个共轭类 $[(1)], [(12)], [(123)]$)

由第一正交. $0 = \sum_{i=1}^3 n_i \chi_i((12)) = 2\chi_3((12))$
 $\downarrow$
 $\chi_{ij} \overline{\chi_{ik}} = \frac{|G|}{h_j} \delta_{jk}$
 $= \sum_{i=1}^3 n_i \chi_i((123)) = 2 + 2\chi_3((123))$

由 $\pi((123)) = (1)$. 由提升有

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 3 & 2 \\ & (1) & (12) & (123) \\ \hline \chi_1 & 1 & 1 & 1 \\ \chi_2 & 1 & -1 & 1 \\ \chi_3 & 2 & 0 & -1 \end{array}$$

S_4 : 共轭类为 $\begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ [(1)] & [(12)] & [(123)] & [(12)(34)] & [(1234)] \end{array}$

$\pi: S_4 \rightarrow S_3 = S_4/K \quad K = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

$(12)(34) \mapsto (1)$

$(1234) \mapsto (12)$

$\Rightarrow$ 可提升为3个 χ_1, χ_2, χ_3

$$24 = n_1^2 + \dots + n_5^2 \Rightarrow n_4^2 + n_5^2 = 18 \Rightarrow n_4 = n_5 = 3$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 6 & 8 & 3 & 6 \\ & (1) & (12) & (123) & (12)(34) & (1234) \\ \hline \chi_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \chi_2 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \chi_3 & 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ \chi_4 & 3 & a & b & c & d \\ \chi_5 & 3 & & & & \end{array}$$

由第一正交 $\begin{cases} 3+6a+8b+3c+6d=0 \\ 3-6a+8b+3c-6d=0 \\ 6-8b+6c=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow b=0, c=-1, d=-a$$

$\Rightarrow$ 再由第二正交 $9+6|a|^2+3+6|a|^2=24$
 $|a|=1$

又 $\alpha = \chi_4(112)$ 为 4 次根之和 $\Rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$. $\alpha = \pm 1$

又 $\chi_2 \chi_4$ 仍为 3-次不可约且 $\chi_2 \chi_4 \neq \chi_4 \Rightarrow \chi_5 = \chi_2 \chi_4$ 则可确定全表

② A_4 : $\begin{matrix} \uparrow \\ [1] \end{matrix}$ $\begin{matrix} \uparrow \\ [12] \end{matrix} [34]$ $\begin{matrix} \uparrow \\ [13] \end{matrix} [24]$ $\begin{matrix} \uparrow \\ [14] \end{matrix} [23]$

不仅有 A_3 的表示为

	(1)	(123)	(132)
χ_1	1	1	1
χ_2	1	ω	ω^2
χ_3	1	ω^2	ω

$\pi: A_4 \rightarrow A_4/K = A_3 \Rightarrow$ 提升出 3 个 $\chi \sim \chi_3$

则 $n_4 = 3$ 设第一行为 $(4, a, b, c)$ 则由正交可得 $a=0, b=0, c=-1$

$\Rightarrow$ 为

	(1)	(123)	(132)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	ω	ω^2	1
χ_3	1	ω^2	ω	1
χ_4	3	0	0	-1

③ $D_n = \langle a, b \mid a^n = b^2 = (ba)^2 = 1 \rangle \quad |D_n| = 2n$

由 D_n 含指数 2 的循环子群 $\langle a \rangle \Rightarrow$ 不可约复表示维数 ≤ 2

(i) 若 $n = 2m$. 则有 4 个一维表示 ρ_1 : 单位 $\rho_2: a \mapsto 1, b \mapsto -1$

$\rho_3: a \mapsto -1, b \mapsto 1 \quad \rho_4: a \mapsto -1, b \mapsto -1$

m -个二维: $\tau_l: a \mapsto \begin{pmatrix} \omega^l & \\ & \omega^{-l} \end{pmatrix} b \mapsto \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$
 $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}} \quad 1 \leq l \leq m-1$

$\Rightarrow$

	1	1	m	m	2
	1	a^m	b	ab	$a^k (1 \leq k \leq m-1)$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	-1	1
χ_3	1	$(-1)^m$	1	-1	$(-1)^k$
χ_4	1	$(-1)^m$	-1	1	$(-1)^k$
χ_{τ_l}	2	$(-1)^l$	0	0	$2\omega^l \frac{2\pi i k \pi}{n}$

(ii) $n = 2m+1$. 类似有

	1	1	2
	1	b	$a^k (1 \leq k \leq m)$
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_{τ_l}	2	0	$2\omega^l \frac{2\pi i k \pi}{n}$

5. 从特征标表到群结构

本节设 $F = \mathbb{C}$. G 有限群

① 正规子群

$$(V, \rho) \in \text{Rep}_F^+(G) \quad \ker \chi = \ker \rho \triangleleft G$$

Lemma 设 $\text{Irr}_\mathbb{C} G = \{\chi_1, \dots, \chi_s\}$. $\chi \in \text{ch}_\mathbb{C}^+ G$ 且 $\chi = \sum_{i=1}^s n_i \chi_i$ $n_i \geq 0$

$$\text{则 } \ker \chi = \bigcap_{i=1}^s \ker \chi_i$$

$$\text{特别地 } \bigcap_{i=1}^s \ker \chi_i = 1$$

(Pf. 设 $g \in \ker \chi$. $\chi(g) = 1_V$

$$\text{由 } \rho = \bigoplus_{i=1}^s n_i \rho_i \Rightarrow \rho_i(g) = 1_V \Rightarrow g \in \ker \rho_i = \ker \chi_i$$

$$\text{反之 } \forall g \in \bigcap_{i=1}^s \ker \chi_i \quad \chi(g) = \sum_{i=1}^s n_i \chi_i(g) = \chi(1) \Rightarrow g \in \ker \chi$$

"特别地". 取 $\chi = \chi_{\text{reg}}$

#)

Prop. (i) $N \triangleleft G$ 则 $N = \bigcap_{\substack{\chi \in \text{Irr}_\mathbb{C} G \\ N \subseteq \ker \chi}} \ker \chi$

$$(i) \quad G \text{ 单群} \Leftrightarrow \forall \chi \in \text{Irr}_\mathbb{C} G \setminus \{1\} \quad \ker \chi = \{1\}$$

(Pf. (i) 令 (V, τ) 为 G/N 的正规表示. 特征标为 ψ

则通过 $\pi: G \rightarrow G/N$ 提升为 G 的表示 $(V, \tau \cdot \pi)$ 特征标 $\psi \cdot \pi$

$$N = \ker \pi = \ker(\tau \pi) = \ker(\psi \pi) \quad \text{由 Lemma 即可}$$

(ii) 由 (i) 立得

#)

② 商群

Prop. $N \trianglelefteq G$. 则 G/N 的特征标表可由 G 的得到

(pf. 回忆 $\text{Irr}_{\mathbb{C}} G/N = \{ \chi \in \text{Irr}_{\mathbb{C}} G \mid \ker \chi \supseteq N \}$

$\ker \chi$ 可以从表中读出 $\Rightarrow \text{Irr}_{\mathbb{C}} G/N$ 可得

此外由 $\text{Irr}_{\mathbb{C}} G/N$ 构成 $\text{cf}_{\mathbb{C}}(G/N)$ 的基. 故 gN 和 hN 在 G/N 的

同一共轭类 $\Leftrightarrow \chi(g) = \chi(h) \quad (\forall \chi \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G/N))$ 故可由表确定 G/N 共轭类)

③ 导群

Prop. G 有限群. 则 $G' = \bigcap_{\substack{\chi \in \text{Irr}_{\mathbb{C}} G \\ \chi(1)=1}} \ker \chi$

(pf. 若 χ 为一次复表示特征标. 则 $G/\ker \rho \leq \mathbb{C}^* \Rightarrow$ 可交换

故 $\ker \chi = \ker \rho \supseteq G'$. 则由①中 Prop 得到)

④ 中心

设 $\chi \in \text{ch}_{\mathbb{C}}^+(G)$ 则 $Z(\chi) = \{ g \in G \mid |\chi(g)| = \chi(1) \}$
 $= \{ g \in G \mid \chi(g) = \omega \chi(1) \quad \omega \text{ 为单值根} \}$
 $= \{ g \in G \mid \rho(g) = \omega \cdot 1_V \quad \omega \text{ 为单值根} \}$

Prop. $Z(G) = \bigcap_{\chi \in \text{Irr}_{\mathbb{C}} G} Z(\chi)$

(pf. 设 $g \in Z(G)$ 则 $\forall \rho \in \overline{\text{Irr}}_{\mathbb{C}} G$. $\rho(g)$ 属于 $\rho(G)$ 的中心.

则诱导 $(v, \rho) \rightarrow (v, \rho)$ 自身的 G -模映射.

$$\rho(g)(h \cdot v) = (g \cdot h) \cdot v = h(\rho(g) \cdot v)$$

$$\text{R1) } \rho(g) = \omega \cdot 1_v \Rightarrow g \in \bigcap_{\chi \in \text{Irr}_c G} Z(\chi)$$

$$\text{反之若 } g \in \bigcap_{\chi \in \text{Irr}_c G} Z(\chi) \quad \text{R2) } \forall h \in G, \rho \in \text{Irr}_c G$$

$$\rho(g^{-1}h^{-1}gh) = \omega^{-1} 1_v \quad \rho(h)^{-1} \cdot 1_v \cdot \omega \quad \rho(h) = 1_v$$

$$\Rightarrow g^{-1}h^{-1}gh \in \bigcap_{\rho \in \text{Irr}_c G} \ker \rho = \bigcap_{\chi \in \text{Irr}_c G} \ker \chi = 1 \Rightarrow g \in Z(G). \quad \#)$$

⑤ 可解性与幂零性

G 为有限可解群 $\Leftrightarrow G$ 有正规群列 $G \supseteq G_1 \supseteq G_2 \cdots \supseteq G_m = 1$

且 $|G_i/G_{i+1}|$ 为素数幂

故可解性可从表中读出

$$G_1 = Z(G) \quad G_n \leq G \quad \text{s.t.} \quad G_n/G_{n-1} = Z(G/G_{n-1}) \quad \text{R1) } G_n \triangleleft G$$

若 $\exists n$ s.t. $G_n = G$ 则称 G 幂零

G_1 可从表中读出 $G_2/G_1 = Z(G/G_1)$ 也可读出

$\Rightarrow G_2$ 可从 G 的表中读出

... 以此类推, 幂零性也可以从表中读出.

6. 整性定理. 不可约复表示维数

回忆在代数数论中有

- ① $\mathbb{Z}$ 为代数整数

- ② $\alpha \in \mathbb{C}$ 为代数整数 $\Leftrightarrow$ 加群 $\mathbb{Z}[\alpha]$ 有限生成

- ③ 所有代数整数构成 $\mathbb{C}$ 的子环 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$

Lemma χ 为复特征标. 则 $\chi(g) \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$

(因为 $\chi(g)$ 为单位根之和)

设 G 有限群 $C_G(g)$ 为中心化子

Thm. $\chi \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$ 则 $\frac{[G:C_G(g)]\chi(g)}{\chi(1)} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$

(pf. 设 (V, ρ) 为对应表示. 则 (V, ρ) 可视为 $(\mathbb{C}G, \text{Reg})$ 子表示.

令 C_g 为 g 所在共轭类 定义 $\psi = \sum_{h \in C_g} \rho(h) \in \text{End}(V)$.

则 $\forall g' \in G$.

$$\rho(g') \psi \rho(g') = \sum_{h \in C_g} \rho(g' h g') = \sum_{h \in C_g} \rho(h) = \psi$$

故 ψ 为 G -模映射 $\Rightarrow \psi = \lambda 1_V$

$$\lambda \chi(1) = \text{tr } \psi = |C_g| \cdot \chi(g) = [G:C_G(g)] \chi(g) \Rightarrow \lambda = \frac{[G:C_G(g)] \chi(g)}{\chi(1)}$$

再考虑 $\psi = \sum_{h \in C_g} \text{Reg}(h) \in \text{End}(\mathbb{C}G)$ $\psi|_V = \psi \Rightarrow \lambda$ 为 ψ 特征值

又 ψ 在基 G 下矩阵 M 为 0-1 阵且 $\det(\lambda I - M) = 0$

$\Rightarrow \lambda$ 为代数整数. #)

Cor. G 的不可约复表示维数整除 $|G|$

(pf) 设 $\chi \in \text{Irr}_{\mathbb{C}} G$. $g_1, \dots, g_s$ 为共轭类代表元.

则由第 2 题. $\frac{|G|}{\chi(1)} = \frac{1}{\chi(1)} \sum_{i=1}^s [G : C_G(g_i)] \chi(g_i) \overline{\chi(g_i)}$

$\Rightarrow \frac{|G|}{\chi(1)}$ 为代数整数.

又 $\frac{|G|}{\chi(1)} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{|G|}{\chi(1)} \in \mathbb{Z}$. #)

进一步地有

Thm. G 有限. $\chi \in \text{Irr}_{\mathbb{C}} G$ 则 $\chi(1) \mid [G : Z(G)]$ ($\chi(g) \in \mathbb{C}^*$)

(pf) 设 (V, ρ) 为对应不可约复表示. $\forall g \in Z(G)$. 同前 $\rho(g) = \chi(g) \cdot 1_V$

考虑 G^m 的表示 $(V^{\otimes m}, \rho \# \dots \# \rho)$ 为不可约复表示

且 $Z(G^m) = Z(G) \times Z(G) \times \dots \times Z(G)$

令 $H_m = \{(g_1, \dots, g_m) \in Z(G^m) \mid g_1 \dots g_m = 1\} \triangleleft G_m$

则 $\forall (g_1, \dots, g_m) \in H_m$. $\chi(g_1) \dots \chi(g_m) = 1$

又 $(g_1, \dots, g_m)(v_1 \otimes \dots \otimes v_m) = g_1 v_1 \otimes \dots \otimes g_m v_m$
 $= \chi(g_1) \dots \chi(g_m) v_1 \otimes \dots \otimes v_m$

$\Rightarrow H_m \subseteq \ker(\rho \# \dots \# \rho)$

则 $V^{\otimes m}$ 为 G^m / H_m 的不可约复表示.

令 $|G| = n$. $|Z(G)| = c$. $\dim_{\mathbb{C}} V = d$. 则 $|G^m / H_m| = \frac{n^m}{c^{m-1}}$
 $\Rightarrow d^m \mid \frac{n^m}{c^{m-1}}$

故 $\frac{n^m}{c^{m-1} d^m} \in \mathbb{Z}$. 令 $q = \frac{n}{cd} \in \mathbb{Q} \Rightarrow c q^m \in \mathbb{Z}$ ($\forall m$)

则 $q \in \mathbb{Z} \Rightarrow d \mid \frac{n}{c}$. #)

7. Burnside 可解定理

回忆. ① 对有限群 G

G 可解 $\Leftrightarrow \exists G = G_0 \supset G_1 \cdots \supset G_m = \{1\}$ s.t. G_{i-1}/G_i Abel

$\Leftrightarrow \dots \dots \dots$ 因子的阶均为素数幂

② 可解群的子群/商群也可解

Lemma. α 为 n 个复单位根之和. $\frac{\alpha}{n} \in O_{\mathbb{C}}$ 则 $\alpha = 0$ 或 α 为复单位根 (L. 田秀)

Lemma. 有限群 G 有共轭类 C s.t. $|C| = p^t (p \nmid t+1)$ 则 G 非单

(pf. 由 $|G|$ 非 Abel 取 $g \in C$ 则 $g \neq 1$ 由引理 $\frac{\alpha}{n} \in O_{\mathbb{C}}$ 则 $\alpha = 0$ 或 α 为复单位根

由 $\frac{\alpha}{n} \notin O_{\mathbb{C}} \Rightarrow \exists 2 \leq i \leq s \quad \chi_i(g) \neq 0 \quad \frac{\chi_i(g)}{p} \notin O_{\mathbb{C}} \Rightarrow p \nmid \chi_i(1)$

则 $\exists a, b \in \mathbb{Z} \quad a|C| + b\chi_i(1) = 1 \Rightarrow \frac{\chi_i(g)}{\chi_i(1)} = a \frac{|C|\chi_i(g)}{\chi_i(1)} + b \chi_i(g)$

$\Rightarrow \frac{\chi_i(g)}{\chi_i(1)} \in O_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\text{Lemma}} \chi_i(g) = \omega \chi_i(1)$

则 $1 \neq g \in Z(\chi_i) \triangleleft G$ 若 $Z(\chi_i) = G$ 则 G 非单

若 $Z(\chi_i) \neq G$ 则 $\forall h \in G \quad \rho_i(h) = \omega_h \cdot 1$

又 ρ_i 不可约 $\Rightarrow \rho_i$ 必为 1-尺表示

又 ρ_i 不为单位表示 $\Rightarrow \ker \rho_i \neq G$ 又 G 非 Abel $\Rightarrow \ker \rho_i \neq \{1\} \Rightarrow G$ 非单)

Thm (Burnside). $|G| = p^a q^b$ p, q 素. 则 G 可解

(pf. 对 $|G|$ 归纳. 取 H 为 Sylow p -子群 $Z(H) \neq \{1\}$ 取 $1 \neq g \in Z(H)$

则 $H \subseteq C_G(g) \Rightarrow [G : C_G(g)] \mid q^b \Rightarrow g$ 所在共轭类大小为 q^t ($t \geq 0$)

$t \geq 1 \xrightarrow{\text{Lemma}} \exists N \triangleleft G \quad N \neq \{1\} \quad N \neq G$ 由归纳 $N, G/N$ 可解 $\Rightarrow G$ 可解

$t = 0 \Rightarrow g \in Z(G)$ 若 $Z(G) \neq G$ 则由归纳 $G/Z(G)$ 可解 $\Rightarrow G$ 可解)

Chap3 代数的表示

1. 域上代数

基本定义回顾

Prop. 对 F -代数 A . TFAE. (i) A 分解为若干代数的直积

(ii) A 为非零理想直和

(iii) A 的单位元分解为两两正交的中心幂等元之和

Prop $A = A_1 \times \cdots \times A_n$. I 为 A 的任一左(右)理想. 则 $I = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$. $I_i = I \cap A_i$

特别若 A_i 为单代数. 则 I 为若干 A_i 的直积

Def. 幂等元称为(中心)本原的. 若它不能表为两两正交的中心幂等元之和

中心本原 为本原

$(e \in Z(A))$

Prop. (i) e 为 A 的中心幂等元. 则 e 中心本原 $\Leftrightarrow Ae$ 不能分解为 A 的理想直和

(ii) e_1, e_2 为中心本原幂等元. 则 $e_1 = e_2$ 或 e_1, e_2 正交

(iii) 设 $1_A = e_1 + \cdots + e_n$ 且 e_i 两两正交中心幂等. 则

$e_1, \dots, e_n$ 为 A 的全部中心幂等元

连通代数 ^{Def} $\Leftrightarrow$ 无非平凡直积分解 $\Leftrightarrow$ 仅有平凡中心幂等元 $0, 1$ 有限维 局部代数

代数用域上有有限维时才有下性质

$\uparrow$ 可除代数

$M_n(D)$

$\subseteq$ 单代数

$\subseteq$ 半单代数

(Fact: 局部单 = 可除)

$\cap$

$\cap$

$\cap$

局部代数 $\subseteq$ 连通代数 $\subseteq$ 代数

Wedderburn: D 有有限维可除. F 有限域 则 D 为域

2. 代数上的模

Lemma ① TFAE: (i) M 为半单 A -模 (ii) M 为单子模之和
(iii) M 的任-子模有补模 (iv) M 的任-单子模有补模

② 半单模的子模. 商模也半单

③ (Schur) M, N 为单 A -模. 若 $\exists 0 \neq f \in \text{Hom}_A(M, N)$ 则 $M \cong N$

故 $\text{End}_A(M) = \text{Hom}_A(M, M)$ 为有限 (即可除) F 代数 $\Rightarrow \text{End}_A(M) \cong F$
 F 代数同

$\{G \text{ 的 } F\text{-表示}\} \leftrightarrow \{ \text{左 } FG\text{-模} \}$ $\Rightarrow G \text{ 的 } F\text{-表示} \Leftrightarrow FG \text{ 的模理论}$
(不可约表示 $\Leftrightarrow$ 单模. 完全可约 $\Leftrightarrow$ 半单模)

Prop. $\{A \text{ 的直和分解}\} \leftrightarrow \{1_A \text{ 的交零分解}\}$

$\{M \text{ 的直和分解}\} \leftrightarrow \{1_M \in \text{End}_A(M) \text{ 的交零分解}\}$

Lemma. $\text{End}_A(M_1 \oplus \dots \oplus M_n) \cong \left\{ \begin{pmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \dots & f_{nn} \end{pmatrix} \mid f_{ij} \in \text{Hom}_A(M_j, M_i) \right\}$

特别地: (i) 若 $\text{Hom}_A(M_i, M_j) = 0$ ($i \neq j$) $\Rightarrow \text{End}_A(\oplus M_i) = \oplus \text{End}_A(M_i)$

(ii) $\text{End}_A(nL) \cong M_n(\text{End}_A(L))$

Thm ① (Jordan-Hölder) $M = M_0 \supset \dots \supset M_s = 0$ 和 $M = N_0 \supset \dots \supset N_t = 0$

为 M 的合成列. 则 $s = t$ 且 $\exists \pi \in S_t$ s.t. $N_i / N_{i+1} \cong M_{\pi(i)} / M_{\pi(i)+1}$

② A 为有限维 F 代数. 则任-单 A -模为正则模的合成因子

特别地 A 仅有有限个单 A -模同构类

③ (Knull-Schmidt-Remak) A 有限维代数 M 有限维 A 模

$M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n = N_1 \oplus \dots \oplus N_m$ 则 $m = n$. $\exists \pi \in S_n$ s.t. $M_i \cong N_{\pi(i)}$
(M_i, N_i 不可分解)

3. Wedderburn-Artin 定理 半单代数的表示

Lemma. (i) ${}_A A$ 为半单 A -模 $\Leftrightarrow A$ 为极小左理想之和
 $\Rightarrow A$ 为极小左理想直和

(ii) A 半单代数 $\Rightarrow {}_A A$ 为半单 A -模

(iii) $(M_n(D))^{op} \cong M_n(D^{op})$

Prf. (ii) $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ A_i 单 $\Rightarrow {}_A A = \bigoplus_i A_i$ 故由 (i) 只须证 A 单情形
 记 $M = \sum_{I \text{ 极小}} I$ 为 A 的理想 $\Rightarrow A = M \stackrel{(i)}{\Rightarrow} {}_A A$ 半单

Thm (Wedderburn-Artin) A 半单 $\Leftrightarrow$ 任-左 A -模半单 $\Leftrightarrow A \cong M_{n_i}(D_i)$ (可保) $\Rightarrow {}_A A$ 半单

Cor. (1) $\text{char } F \nmid |G| \Leftrightarrow FG$ 半单

(2) A 单 $\Leftrightarrow A \cong M_n(D)$ D 可保 特别若 F -代数闭 则 A 单 $\Leftrightarrow A \cong M_n(F)$
 半单 $\Leftrightarrow A \cong \bigoplus M_{n_i}(F)$

(3) ${}_A A$ 半单 $\Leftrightarrow A$ 半单 $\Leftrightarrow A_A$ 半单

A 为半单代数 由上述 Thm 左 A -模的分解化归为半单模 $\Rightarrow$ 单 A -模

Thm. D 为有限维可保 F -代数 则

(i) $A = M_n(D)$ 有唯一-不可约表示 (V, ρ) 且 (1) ${}_A A \cong V^{\oplus n}$ (2) $\text{End}_A(V) \cong D^{op}$
 (3) $\text{Im } \rho \cong M_n(D) \cong M_n(\text{End}_A(V)^{op})$

(ii) 设 $A = M_{n_1}(D_1) \times M_{n_2}(D_2) \times \cdots \times M_{n_t}(D_t)$ V_i 为 $M_{n_i}(D_i)$ 唯一-单模
 将 V_i 视为 A -模 则 $V_1, \dots, V_t$ 为 A 仅有的单模

Cor. 若 A 半单且 V 单 A -模 V . $\text{Hom}_A(V, V) = F$. 则共有 $\dim_F Z(A)$ 个单 A -模
 (pf. $A \cong M_{n_1}(D_1) \times \dots \times M_{n_t}(D_t)$ 则 $\dim_F Z(A) = \dim_F (Z(M_{n_1}(D_1) \times \dots \times M_{n_t}(D_t))) = t$)

Cor. $A \cong M_{n_1}(D_1) \times \dots \times M_{n_t}(D_t) \cong M_{m_1}(K_1) \times \dots \times M_{m_s}(K_s)$. 则

$$t=s \text{ 且 } \exists \pi \in S_t \text{ s.t. } n_i = m_{\pi(i)} \quad D_i = K_{\pi(i)}$$

上述在群表示论中有如下基本应用

Thm. $\text{char } F \nmid |G|$. C 的共轭类数为 S 则

FG 的互不同构的左模个数 $\leq S$ 特别地 若 F 分裂 则取等

现设 $FG \cong M_{n_1}(F) \times \dots \times M_{n_s}(F)$

$c_i = \frac{1}{|C_i|} \sum_{g \in C_i} g \in Z(FG)$ 为 C_i 的类和

$d_i = \frac{1}{n_i} \times M_{n_i}(F)$ 的单元元

则 $c_1, \dots, c_s$ 和 $d_1, \dots, d_s$ 构成 $Z(FG)$ 的两组基

Prop. 取 $\chi_i = \chi_{V_i}$. $g_i \in G$ 对应特征标表矩阵为 $\chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \vdots \\ \chi_s \end{pmatrix} (c_1, \dots, c_s)$

则 (1) $(\chi_1, \dots, \chi_s)$ 为 $(d_1, \dots, d_s)$ 的对偶基

$$(2) (c_1, \dots, c_s) = (d_1, \dots, d_s) \chi$$

4. Jacobson根

上一节: 半单代数

如何半单代数 $\rightarrow$ 一般代数?

Def. 有限维 F -代数 A 的最大零理想称为 A 的 Jacobson 根. 记 $\text{rad}(A)$

Thm. A 有限维 F -代数. 则 A 半单 $\Leftrightarrow \text{rad}(A) = 0$

(i 证明略)

Cor. A 有限维 F -代数. 则 (1) $A/\text{rad}(A)$ 半单

(2) 若 A/I 半单. 则 $\text{rad}(A) \subseteq I$

A 单模 $\rightarrow \underbrace{A/\text{rad}(A)}_{\text{半单}}$ 上单模

Thm. A 同上. S 为有限维单 A -模. 则

(1) $\text{rad}(A)S = 0$ 从而 S 为 $A/\text{rad}(A)$ 上单模

特别地. 单 A -模个数为 $A/\text{rad}(A)$ 单因子数

(2) S 对应的 $A/\text{rad}(A)$ 的单因子为 $M_n(D)$ $\rho: A \rightarrow \text{End}_F(S)$ 为对应同态

则 $\rho(A) \subseteq M_n(D)$

(pf. (1) 若 $\text{rad}(A)S \neq 0$ 则 $\text{rad}(A)S = S$

又 $\text{rad}(A)$ 幂零 $\Rightarrow 0 = (\text{rad}(A))^m S = S$ 矛盾!)

Cor. $(S, \rho), (S', \rho')$ 为有限维 F -代数 A 上互不同构的不可约表示

则 $\forall a \in A \quad \exists b \in A \quad \text{s.t.} \quad \rho(a) = \rho(b) \quad \rho'(b) = 0$

Thm. F 为有限群 G 的分裂域. 则 $\text{Irr}_F G$ 为 $\text{CF}_F(G)$ 的线性无关集

特别地. (i) $\chi \in \text{Irr}_F G$ 则 $\chi \neq 0$

(ii) $\rho_1, \rho_2 \in \overline{\text{Irr}}_F G$. 对 χ_1, χ_2 . 则 $\rho_1 = \rho_2 \Leftrightarrow \chi_1 = \chi_2$

(iii) $|\text{Irr}_F G| = |\overline{\text{Irr}}_F G|$

Rmk. 事实上, 上述结论对任意域均成立!

pf. $\overline{\text{Irr}}_F G = \{\rho_1, \dots, \rho_s\}$ 对 χ_i . 若 $\sum_{i=1}^s c_i \chi_i = 0$

由 $\rho_i(FG) = M_{n_i}(F)$. 令 e_{ii} 为 $M_{n_i}(F)$ 中 (i, i) 为 1 其余为 0 的矩阵

则 $\exists b_i \in A = FG$ s.t. $\rho_i(b_i) = e_{ii}$ $\rho_j(b_i) = 0 \quad \forall j \neq i$

则 $\chi_i(b_i) = 1$ $\chi_j(b_i) = 0$ #)

Def. A 的理想 I 称为拟正则的. 若 $\forall x \in I$. $1 - x$ 可逆.

Prop. (i) $\text{rad}(A)$ 为极大(左/右) / 极大拟正则(左/右) 理想之交

(ii) $\text{rad}(A) = \bigcap_{S \text{ 单 } A\text{-模}} \text{ann}(S)$

Thm. A 有限维代数. 则 A 为单代数 $\Leftrightarrow$ 存在 A -模

pf. 令 $A = M_n(D)$ D 可除 F -代数

则 A 有唯一单模 $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in D \right\}$ 可验证 $\text{ann}(V) = 0$

反之若存在 A -模 S . 则由 Prop (ii) $\text{rad}(A) = 0 \Rightarrow A$ 半单

设 $A = A_1 \times \dots \times A_s$ A_i 单代数. 则 S 为某 A_i 上单模. $A_j S = 0 \quad (j \neq i)$

$\Rightarrow A_j \subseteq \text{ann}(S) \quad (j \neq i)$ 由 S 忠实 $\Rightarrow S = 1$ #)

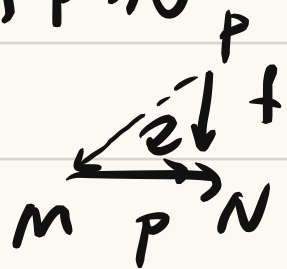
模的 Jacobson 根有类似定义与性质. 在此略去.

§ 投射模和内射模

总设 A 为有限维 F -代数. A -模为有限维 A -模

Def. A -模 P 称为投射模. 若 $\forall$ 同态 $p: M \rightarrow N$ 和模同态 $f: P \rightarrow N$

$\exists$ 模同态 $g: P \rightarrow M$ s.t. $f = pg$



Prop. P 为投射模 $\Leftrightarrow \text{Hom}_A(P, \cdot)$ 为正合函子

$\Leftrightarrow \forall$ 正合列 $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \rightarrow 0$ 裂正合

$\Leftrightarrow \exists$ 自由模 W 和模 P' s.t. $W \subseteq P \oplus P'$

② $P_1 \oplus \dots \oplus P_n \Leftrightarrow \forall P_i$ 投射

③ P, Q 投射. $|R| \mid P \subseteq Q \Leftrightarrow P/\text{rad}(P) \subseteq Q/\text{rad}(Q)$

Thm. (i) 任一不可分解投射模 P 有唯一极大子模 $\text{rad}(P)$

(ii) $P_1, \dots, P_n$ 为正则模 A 的互不同构直和分解块. 则 $P_1, \dots, P_n$ 为所有不可分解投射模

(iii) $\{\text{不可分解投射模}\} \leftrightarrow \{\text{单模}\}$

$P \mapsto P/\text{rad}(P)$

射模

Def. M 为 A -模. 投射模 P 称为 M 的投射盖. 若 $\exists$ 同态 $f: P \twoheadrightarrow M$

$\ker f \subseteq \text{rad}(P)$

Thm. (i) 投射盖存在唯一 (同构意义下). 记 $P(M)$

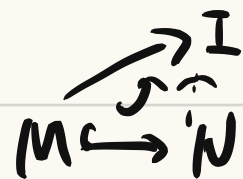
(ii) $P = P(M) \Leftrightarrow \exists$ 满 $f: P \twoheadrightarrow M$ s.t. $f: P/\text{rad}(P) \rightarrow M/\text{rad}(M)$ 为同构

(iii) P 为使 $P \rightarrow M \rightarrow 0$ 正合的维数最小的投射模

(iv) $P(M) \subseteq P(M/\text{rad}(M))$

$P(M \oplus N) \subseteq P(M) \oplus P(N)$

Def. A -模 I 称为内射模. 若 $\forall$ 单同态 $i: M \rightarrow N$ 和模同态 $f: M \rightarrow I$
 $\exists$ 模同态 $g: N \rightarrow I$ s.t. $f = gi$



Thm (Baer 判别法) 左模 I 为内射模 $\Leftrightarrow \forall$ 模同态 $I \rightarrow L$ 能延拓成 $A \rightarrow L$
 $(I \text{ 为 } A \text{ 的左理想})$

Thm. I 内射模 $\Leftrightarrow$ 任-短正合列 $0 \rightarrow I \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow 0$ 裂正合

$\Leftrightarrow I$ 为某个 $n(A_n)^*$ 的直和项

② 对偶函子: 模(内)射 $\rightarrow$ 内(模)射

③ $Q_1 \oplus \dots \oplus Q_n$ 内射 $\Leftrightarrow \forall i Q_i$ 内射

④ S 单模 $\Leftrightarrow S^*$ 单模

Def M 任-模 M 的单子模之和称为 M 的基座. 记为 $\text{soc}(M)$

由 $\text{rad}(M)$ 为极大子模之交 $\Rightarrow \text{rad}(M)^\perp$ 为 M^* 的单子模之和

$$\Rightarrow \text{soc}(M^*) = (\text{rad}(M))^\perp = (M/\text{rad}(M))^*$$

Thm (i) Q, Q' 内射 $\mathbb{R} \exists Q \cong Q' \Leftrightarrow \text{soc}(Q) \cong \text{soc}(Q')$

(ii) $\text{soc}(Q)$ 为 Q 唯一单子模. $\{\text{不可分解内射模}\} \leftrightarrow \{\text{单 } A\text{-模}\}$
 $Q \mapsto \text{soc}(Q)$

(iii) 不可分解内射模为 A^* 的直和项

Def. 内射模 Q 为 M 的内射包. 若 $\exists$ 单同态 $\varphi: M \hookrightarrow Q$ s.t. $\text{soc}(\varphi) \subseteq \text{Im } \varphi$

由对偶有类似讨论 略去.

6. 绝对单模和分裂域

总设 A 为有限 F -代数, K 为 F 的扩域

V 为 F -向量空间 $V^K \stackrel{\text{def}}{=} K \otimes_F V$ 为 K -向量空间

$A^K = K \otimes_F A$ 为 K -代数 $\dim_K A^K = \dim_F A$

特别地, 若 $A = FG \Rightarrow A^K = KG$

(M, ρ) 为 F -表示 $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{P}_F^r$

$\downarrow$
 (M^K, ρ^K) 为 K -表示 $\downarrow$
 $1 \otimes m_1, \dots, 1 \otimes m_r \in \mathbb{P}_K^r$

$\lambda \mapsto \lambda^K!$

Prop ① M 为左 A -模 $\Rightarrow M^K$ 为左 A^K -模

② M^K 为单 A^K -模 $\Rightarrow M$ 为单 A -模

③ $\text{Hom}_{A^K}(M^K, N^K) \cong \text{Hom}_A(M, N)^K$. 特别地, $\dim_K \text{End}_{A^K}(M^K) = \dim_F \text{End}_A(M)$

Def. 单 A -模 M 为绝对单模, 若 $\forall K$ 为 F 的扩域, M^K 单

定义 $A_L = A / \text{ann}(M)$

Prop. ① M 为单 A -模 $\Leftrightarrow M$ 为单 A_L -模

② M 为单 A -模 则 M 绝对单 $\Leftrightarrow \text{End}_A(M) \cong F$

Def. 若 $A^K / \text{rad}(A^K) \cong M_{n_1}(K) \times \dots \times M_{n_r}(K)$, 则称 K 为 A 的分裂域

Prop. K 分裂 $\Leftrightarrow$ 单 A^K -模均绝对单

$\Leftrightarrow \forall S$ 为单 A^K -模, $\text{End}_{A^K}(S) \cong K$

Rmk. 对 G 有有限群, 则 F 为 G 的分裂域 $\Leftrightarrow F$ 为代数 FG 的分裂域
(之前的语言)

Thm. $E/K/F$ 打3长. 则

$$K \text{ 分裂 } A \Leftrightarrow \begin{cases} E \text{ 分裂 } A \\ \text{且 } \{A^E \text{ 单模}\} \longleftrightarrow \{A^F \text{ 单模}\} \\ s \mapsto s^E \end{cases}$$

Cor. ① K/F 打3长. 则 F 分裂 $G \Leftrightarrow \begin{cases} K \text{ 分裂 } G \\ \overline{\text{Irr}}_K G = \{\varphi^K \mid \varphi \in \overline{\text{Irr}}_F G\} \end{cases}$

② $\forall$ 有限群 G 域 F . $\exists F$ 的有限扩张 K . s.t. K 为 G 的分裂域

应用:

回忆: 当 $\text{char } F \nmid |G|$. F 为 G 分裂域时

$$\begin{aligned} p \sim p' &\Leftrightarrow \chi = \chi' \\ |\text{Irr}_F G| &= |\overline{\text{Irr}}_F G| \\ \text{Irr}_F G &\text{ 为 } \text{cf}_F(G) \text{ 的基} \end{aligned}$$

现在去掉所有条件. 并证明. 特征标 χ 及 χ' 已分不可约表示

$\text{Irr}_F G$ 为 $\text{cf}_F(G)$ 中无关集

Thm. $\text{Irr}_F G$ 在 $\text{cf}_F(G)$ 中无关. 进而

$$\begin{cases} \forall \chi \in \text{Irr}_F G, \chi \neq 0 \\ p_1 = p_2 \Leftrightarrow \chi_1 = \chi_2 \\ |\text{Irr}_F G| = |\overline{\text{Irr}}_F G| \end{cases}$$

Lemma K 为 F 有限可分扩张. E 为 F 打3长. 则 $E \otimes_F K$ 为 E 的有限可分扩张直积 (1.1.10)

Lemma G 有限群 $\text{char } F = p > 0$. K 为 F 的代数闭域 则

$$\rho \in \overline{\text{Irr}}_F G \Rightarrow \rho^K = \bigoplus_{i=1}^t \rho_i \quad \rho_i \text{ 不可约 } K\text{-表示且 } \rho_i \neq \rho_j (i \neq j)$$

(pf. $i \in A = FG$. $A_0 = \overline{F} \rho G$)

$$\text{rad}(A_0) \neq 0 \Rightarrow \text{rad}(A_0)^F \neq 0 \Rightarrow \text{rad}(A_0)^F \subseteq \text{rad}(A)$$

$$A/\text{rad}(A_0)^F = A_0/\text{rad}(A_0)^F$$

$$= \bigoplus_{i \in I} M_{n_i}(D_i \otimes_{F_p} F) \stackrel{\text{Lemma}}{=} \bigoplus_{j \in J} M_{m_j}(F_j)$$

(由 Wedderburn D_i 为有限域)

$$\text{由条件 } \rho \text{ 为单 } A/\text{rad}(A) \text{ 模} \Rightarrow \exists j \text{ s.t. } M_{m_j}(F_j) = m_j \cdot \rho$$

$$\text{则 } m_j \rho^K \subseteq M_{m_j}(F_j)^K \subseteq M_{m_j}(F_j \otimes K)$$

$$\stackrel{\text{Lemma}}{=} \bigoplus_{i=1}^t M_{m_j}(K_i) \subseteq \bigoplus_{i=1}^t m_j \rho_i$$

$$\text{由 Jordan-Hölder.} \quad \rho^K \subseteq \bigoplus_{i=1}^t \rho_i \quad \#)$$

pf of Thm. 若 $\text{char } F = 0$ 则由前例得证.

$$\text{若 } \text{char } F = p > 0 \quad \text{Irr}_F G = \{\chi_1, \dots, \chi_s\}$$

由线性无关性将 χ_i 视为

$$\overline{F}G \xrightarrow{\pi} M_{n_1}(\overline{F}) \times \dots \times M_{n_s}(\overline{F}) \twoheadrightarrow M_{n_i}(\overline{F}) \xrightarrow{\pi_i} \overline{F}$$

$$\forall A_i \in M_{n_i}(\overline{F}) \text{ s.t. } \text{tr}(A_i) = 1 \quad \exists f_i \in \overline{F}G \text{ s.t. } \pi(f_i) = (0, \dots, A_i, 0, \dots, 0)$$

$$\text{若 } \sum a_j \chi_j = 0 \quad \text{则 } \sum a_j \chi_j(f_i) = 0 \Rightarrow a_i = 0$$

故 $\overline{F}$ 中 $\chi_1, \dots, \chi_s$ 线性无关

$$\text{现设 } \overline{\text{Irr}}_F G = \{(\nu_1, \rho_1), \dots, (\nu_n, \rho_n)\} \quad \text{Irr}_F G = \{\chi_1, \dots, \chi_s\}$$

$$\text{由 Lemma.} \quad \rho_i^{\overline{F}} = \bigoplus_j \rho_{ij} \Rightarrow \mu_i = \sum_j \chi_{ij}$$

$$\Rightarrow \mu_1, \dots, \mu_n \text{ 无关}$$

#

Chap 4 诱导表示 诱导特征标

1. 基本概念

$H \leq G$ (W, ρ) 为 H 的 F -表示 $\rightsquigarrow G$ 的 F -表示?

$\Leftrightarrow$ 左 FH -模 $W \rightsquigarrow$ 左 FG -模?

已知: $FG \otimes_{FH} W$ 有左 FG -模结构. 称为 W 的诱导模

$\Rightarrow$ 有 G 的 F -表示 (W^G, ρ^G) . 称为 W 的诱导表示
(也记 ρ_H^G)

Fact: 若 ρ 为 H 的 FH -表示 则 ρ^G 为 G 的 F -表示

($\rho^G = (FH)^G = FG \otimes_{FH} FH \cong FG$)

Thm (i) $\dim_F W^G = [G:H] \dim_F W$.

(ii) 有 F -向量空间直和分解 $W^G = g_1(1 \otimes_{FH} W) \oplus \dots \oplus g_r(1 \otimes_{FH} W)$

且有 FH -模同构 $1 \otimes_{FH} W \cong W$

(iii) $\{g_1 \otimes w_1, \dots, g_r \otimes w_n\}$ 为 W^G 的 F -基 $\rho^G(g)$ 在该基下矩阵将在下面给出

(pf. 现今 $\{w_1, \dots, w_n\} = B$ 为 W 的 F -基. $G = g_1 H \cup \dots \cup g_r H$ 为左陪集分解

$\Rightarrow FG = g_1(FH) \oplus \dots \oplus g_r(FH)$

$W^G = FG \otimes_{FH} W = (g_1(FH) \otimes_{FH} W) \oplus \dots \oplus (g_r(FH) \otimes_{FH} W)$

$\cong W \oplus \dots \oplus W = rW \Rightarrow \dim_F W^G = [G:H] \dim_F W$

$rW^G = \bigoplus_{i=1}^r g_i(1 \otimes_{FH} W)$ $g_i \otimes w_j$ 为 W^G 的 F -基

$\forall g \in G \exists! g_1 \neq h \in H$ s.t. $gg_1 = g_1 h \Rightarrow g(g_1 \otimes w_j) = g_1 \otimes h w_j$

设 $\rho(h)$ 在 $\{w_1, \dots, w_n\}$ 下矩阵为 $\rho_B(h) = (a_{ij}(h))_{n \times n}$ 则

$g(g_1 \otimes w_j) = g_1 \otimes h w_j = \sum_{t=1}^n a_{tj}(h) g_1 \otimes w_t$

$$\text{令 } \dot{a}_{tj}(g) = \begin{cases} a_{tj}(g) & g \in H \\ 0 & g \notin H \end{cases}$$

$$\text{则 } g(g_i \otimes w_j) = \sum_{t=1}^n a_{tj}(g_i^{-1} g g_i) (g_i \otimes w_t)$$

$$= \sum_{s=1}^r \sum_{t=1}^n \dot{a}_{tj}(g_s^{-1} g g_s) (g_s \otimes w_t)$$

$$\Rightarrow \rho^G(g) \text{ 在如上基下矩阵为 } \begin{pmatrix} \dot{\rho}_B(g_1^{-1} g g_1) & \dots & \dot{\rho}_B(g_1^{-1} g g_r) \\ \vdots & & \vdots \\ \dot{\rho}_B(g_r^{-1} g g_r) & \dots & \dot{\rho}_B(g_r^{-1} g g_r) \end{pmatrix}$$

$$\text{其中 } \dot{\rho}_B(g) = (\dot{a}_{ij}(g))_{n \times n} \quad \forall g \in G.$$

#)

Rmk. 不难发现上述矩阵的各行/列都只有一个非零项矩阵

Prop. M 为 FG 模, M 在 H 上的限制含有子模 W s.t. $M = \bigoplus_{i=1}^r g_i W$ (g_i 如上)

则有左 FG -模同构 $M \cong W^G$

故本质的如上直和分解完全列出了 i 号子表示.

再看特征标. χ 为 (W, ρ) 特征标 将 $\chi: H \rightarrow F$ 扩充为 $\tilde{\chi}: G \rightarrow F$.

$$\tilde{\chi}(g) = \begin{cases} \chi(g) & g \in H \\ 0 & g \notin H \end{cases}$$

$$\text{则由上面矩阵表示 } \chi^G(g) = \text{tr}(\rho^G(g)) \\ = \sum_{i=1}^r \tilde{\chi}(g_i^{-1} g g_i)$$

Prop (i) 若 $g \notin \bigcup_{i=1}^r g_i H g_i^{-1} = \bigcup_{x \in G} x H x^{-1}$ 则 $\chi^G(g) = 0$

特别若 $H \nsubseteq G$ 则 $\chi^G(g) = 0 \quad (\forall g \notin H)$

(ii) $H \subset Z(G)$ 则 $\chi^G(g) = [G:H] \tilde{\chi}(g) \quad \forall g \in G$

可进一步地推广到表示的直和.

$$\text{Thm 若 } \chi \in \text{Irr } F \chi | H| \text{ 则 } \chi^G(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \chi(x^{-1}gx) \\ = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{x \in G \\ x^{-1}gx \in H}} \chi(x^{-1}gx) \quad (\forall g \in G)$$

$$(\text{pf. } \forall h \in H, g \in G \quad \chi(hgh^{-1}) = \chi(g)$$

$$\text{取 } x \in g_i H. \quad x = g_i h \Rightarrow \chi(x^{-1}gx) = \chi(h^{-1}g_i^{-1}g g_i h) \\ = \chi(g_i^{-1}g g_i)$$

$$\text{故 } \sum_{x \in G} \chi(x^{-1}gx) = \sum_{i=1}^r \sum_{x \in g_i H} \chi(x^{-1}gx) = |H| \chi^G(g). \quad \#)$$

利用张量积的性质也可以得到诱导表示的如下性质

Prop. (W, ρ) 为子群 H 的表示 (i) W_1 为 W 的子表示. 则 W_1^G 为 W^G 的子表示

(ii) $W = W_1 \oplus \dots \oplus W_n$ 为子表示分解. 则 $W^G = W_1^G \oplus \dots \oplus W_n^G$

(iii) K 为 H 关于 G 的中间子群. 则 $W^G \subseteq (W^K)^G$

(iv) ψ 为 G 的表示. ψ_H 为在 H 上的限制. 则有 $F[G]$ 模同构 $\rho^G \otimes_F \psi_H = (\rho \otimes_F \psi_H)^G$

Cor. χ 为 W 的特征标 (i) $\chi = \chi_1 + \chi_2$ 为特征标分解. 则 $\chi^G = \chi_1^G + \chi_2^G$

(ii) K 为中间子群. 则 $\chi^G = (\chi^K)^G$

(iii) λ 为 G 的特征标. 则 $\chi^G \lambda = (\chi \lambda_H)^G \quad \lambda_H = \lambda|_H$

$$\text{例: } G = S^4, H = S^3 \quad \chi \in \text{Irr}_C S^3: \quad \begin{matrix} \chi^{(111)} = 2 \\ \chi^{(11)} = 0 \end{matrix} \quad \chi^{(123)} = -1$$

$$\text{令 } B = \{(1), (12), (123), (12)(34), (1234)\} \text{ 为代系. } \Rightarrow \chi^G(g) = \frac{1}{6} \sum_{\substack{x \in G \\ x^{-1}gx \in H}} \chi(x^{-1}gx)$$

$$\text{可以求得 } \chi^G = \underbrace{\chi_3}_{2 \text{ 次}} + \underbrace{\chi_4}_{2 \text{ 次}} + \underbrace{\lambda_5}_{2 \text{ 次}}. \quad (\text{见之前的表}).$$

2. Frobenius 互反律

设 $H \leq G$, W 为 H 的 F -表示, M 为 G 的 F -表示

Thm (模的互反) $\exists F$ -线性同构 $\text{Hom}_{FG}(W^G, M) \cong \text{Hom}_{FH}(W, M)$

($\text{Hom}_{FG}(FG \otimes_{FH} W, M) \cong \text{Hom}_{FH}(W, \text{Hom}_{FG}(FG, M)) \cong \text{Hom}_{FH}(W, M)$)

设 χ, μ 为 W 和 M 的特征标. 则若 $\text{char } F \nmid |G|$ 有

$$(\chi^G, \mu)_G = \dim_F \text{Hom}_{FG}(W^G, M)$$

$$(\chi, \mu_H)_H = \dim_F \text{Hom}_{FH}(W, M)$$

$$\Rightarrow (\chi^G, \mu)_G = (\chi, \mu_H)_H \quad (\text{特征标互反})$$

Def. $\text{char } F \nmid |G|$, $H \leq G$, $\eta \in \text{cf}_F H$. 定义 $\eta^G: G \rightarrow F$

$$\eta^G(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \eta(x^{-1}gx)$$

$$\text{其中 } \eta(g) = \begin{cases} \eta(g), & g \in H \\ 0, & g \notin H \end{cases} \quad \text{故 } \eta^G(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{x \in G \\ x^{-1}gx \in H}} \eta(x^{-1}gx)$$

$\eta^G \in \text{cf}_F G$ 称为 η 的诱导类函数. 特别若 $\eta \in R_F^+(H)$, η^G 即诱导特征标

Thm (类函数互反) $\text{char } F \nmid |G|$, $\eta \in \text{cf}_F H$, $\xi \in \text{cf}_F G$. 则 $(\eta^G, \xi)_G = (\eta, \xi_H)_H$

$$(p.f. (\eta^G, \xi)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \eta^G(g) \xi(g^{-1}))$$

$$= \frac{1}{|G|} \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \sum_{g \in G} \eta(x^{-1}gx) \xi(g^{-1})$$

$$= \frac{1}{|G|} \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} \eta(y) \xi(xy^{-1}x^{-1}) = \frac{1}{|G|} \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{x \in G \\ y \in G}} \eta(y) \xi(y^{-1})$$

$$= \frac{1}{|H|} \sum_{y \in G} \eta(y) \xi(y^{-1}) = \frac{1}{|H|} \sum_{y \in H} \eta(y) \xi(y^{-1})$$

$$= (\eta, \xi_H)_H$$

#)

例) ① G 为四元群 $= \langle a, b \mid a^4=1, b^2=a^2, bab^{-1}=a^3 \rangle$ 81π .

$$= \{1e, \pm i, \pm j, \pm k\}$$

$$G' = \langle -e \rangle = \{e, -e\} \Rightarrow G/G' = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \Rightarrow \text{四个一次实表示 } \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$$

H : Hamilton 四元代数 记 $x \in G$ 为 x' 以 $\mathbb{R}$ 为 RG 中的 $(-1)x$

同时 $G \leq H^*$ H 为 G 的 $\mathbb{R}$ 表示 则 H 为左 RG -模

又 H 不可约 $\Rightarrow H$ 不可约左 RG -模 $\Rightarrow G$ 的 4 次不可约实表示 H

Fact: $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ 为 G 的所有不可约实表示

$$\text{因此: } |G| = \sum \frac{n_i^2}{d_i} \text{ 故只需证 } \dim_{\mathbb{R}} \text{Hom}_{RG}(H, H) = 4$$

证 $\sigma(-e) = -1$ 给出了 G' 的 1 次非单位表示 且有 $\mathbb{R}$ 表示同构 $\sigma^G \cong 1$

G 有左理想分解 $G = G' \cup iG' \cup jG' \cup kG'$

$$\Rightarrow \sigma^G \cong (RG' \otimes_{RG} \mathbb{R}) \oplus (iRG' \otimes_{RG} \mathbb{R}) \oplus (jRG' \otimes_{RG} \mathbb{R}) \oplus (kRG' \otimes_{RG} \mathbb{R})$$

$$\cong \sigma \oplus \dots \oplus \sigma$$

$$\begin{aligned} \text{由模互反律 } \dim_{\mathbb{R}} \text{Hom}_{RG}(H, H) &= \dim_{\mathbb{R}} \text{Hom}_{RG'}(\sigma, \sigma^G) \\ &= 4 \dim_{\mathbb{R}} \text{Hom}_{RG'}(\sigma, \sigma) = 4 \quad \checkmark \end{aligned}$$

② $\text{char } F \nmid |G|$ $H \leq G$ m 和 n 为 H, G 的不可约 F -表示维数最大值

$$|R| m \leq [G:H] m$$

特别地 若 H Abel F 代数闭 则 $m=1 \Rightarrow n \leq [G:H]$

(此前证过)

3. Mackey 子群定理

$H, K \leq G$ (W, ρ) 为 H 的 F -表示. 本节希望证明 $(\rho^G)_K$

对 $g \in G$ 令 ${}^g H = gHg^{-1}$. 则 ${}^g W = (W, {}^g \rho)$ 为 ${}^g H$ 的 F -表示. 称为 (W, ρ) 的共轭表示
 ${}^g \rho(x) = \rho(g^{-1}xg)$

现设 D 为双陪集 (K, H) 代表系. 即有无交并 $G = \bigsqcup_{a \in D} KaH$

对 $a \in D$. 考虑诱导表示 $(({}^a W)_{a_H \cap K})^K$

Thm (Mackey) $\exists FK$ -模同构 $(W^G)_K \cong \bigoplus_{a \in D} ({}^a W)_{a_H \cap K}^K$

且 $({}^a W)_{a_H \cap K}^K$ 不为 D 的迭取.

(i) 证略)

令 χ 为 ρ 的特征标. 则 ${}^a W$ 的特征标 ${}^a \chi: {}^a H \rightarrow F$
 $x \mapsto \chi(a^{-1}xa)$

Cor. 由 (i) 知 $(\chi^G)_K = \sum_{a \in D} ({}^a \chi)_{a_H \cap K}^K$

② 设 $H \triangleleft G$ 则有 FH -模同构 $(W^G)_H \cong \bigoplus_{a \in R} {}^a W$. 其中 R 为 G 关于 H 的左陪集代表系. $(\chi^G)_H = \sum_{a \in R} {}^a \chi$. (取 $H = K \triangleleft G$)

故 H 的表示 (W, ρ) 的诱导表示在 H 上的限制为 W 的所有共轭表示

③ 有 FK -模同构 $(1_H^G)_K \cong \bigoplus_{a \in D} 1_{a_H \cap K}^K$ (取 $W = 1_H$)

设 χ 为 H 的 F -特征标. η 为 K 的 F -特征标. 则有递归公式:

$$\text{若 } \text{char } F \nmid |G| \quad (\chi^G, \eta^G)_G = (\eta^G, \chi^G)_G = (\eta, (\chi^G)_K)_K$$

$$= \sum_{a \in D} (\eta, ({}^a \chi)_{a_H \cap K}^K)_K$$

$$= \sum_{a \in D} (\eta_{a_H \cap K}, ({}^a \chi)_{a_H \cap K})_{a_H \cap K}.$$

4. 诱导表示不可约判定

群 G 的 F -表示 M, N 正交 若它们无共同不可约直和项.

若 $\text{char } F = 0$, 由 Maschke 和第一正交, M, N 正交 $\Leftrightarrow (\chi_M, \chi_N)_G = 0$

设 $H \leq G$, (W, ρ) 为 H 的 F -表示.

Thm (Mackey 不可约判定) $\text{char } F = 0$ 且 F 为 G, H 的分裂域.

则 ρ^G 不可约 $\Leftrightarrow \begin{cases} \rho \text{ 不可约} \\ \forall g \in G-H, \rho_{H \cap g^{-1}H} \text{ 和 } ({}^g\rho)_{H \cap gH} \text{ 不交} \end{cases}$

(Pf. χ 为 ρ 的特征标. $\forall g \in G-H$, 取 G 关于 (H, H) 的代表系 D_g s.t. $g \in D_g$

$$\begin{aligned} \text{则 } (\chi^G, \chi^G)_G &= \sum_{a \in D_g} (\chi_{H \cap {}^aH} ({}^a\chi)_{H \cap {}^aH})_{H \cap {}^aH} \\ &= \underbrace{(\chi, \chi)_H}_{>0} + \underbrace{\sum_{\substack{a \in D_g \\ a \notin H}} (\chi_{H \cap {}^aH} ({}^a\chi)_{H \cap {}^aH})_{H \cap {}^aH}}_{(*)} \end{aligned}$$

则 ρ^G 不可约 $\Leftrightarrow (\chi^G, \chi^G)_G = 1$

$$\Leftrightarrow (\chi, \chi)_H = 1, \quad (*) = 0.$$

#)

Cor. ① $H \triangleleft G$, $\rho \in \text{Irr}_F^+(H)$, $\text{char } F = 0$ 且 F 为 G, H 的分裂域, 则

ρ^G 不可约 $\Leftrightarrow \rho$ 不可约 且 $\rho \not\sim {}^g\rho \quad (\forall g \in G-H)$

② F 条件同上. $\rho = \sigma^G$ 为 F 的单表示. 其中 σ 为 H 的表示.

则 ρ 不可约 $\Leftrightarrow \forall g \in G-H \quad \exists h \in H \cap {}^gH \quad \text{s.t. } \sigma(h) \neq \sigma(g^{-1}hg)$

Chap 5 群表示

1. 群上的不变积分

总设 $F = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$

$\forall f, g \in C(G, F) = \{G \text{ 上连续 } F\text{-函数}\}$ 定义 $(f, g) = \int_G f(x) \overline{g(x)} dx$

$(f, g) = 0$: 正交

$(f, f) = 1$: 规范

与有限群类似定义 $\chi_P(g)$, $\text{Irr}_F G$, $\overline{\text{Irr}_F G}$

Thm $(V, \rho), (U, \varphi)$ 为群 G 的不可约表示. 维数为 n 和 m .

令 $P(g) = (a_{ij}(g))$ $\varphi(g) = (b_{ij}(g))$

(i) 若 ρ, φ 不等价 则 $(a_{ij}, b_{kl}) = \int_G a_{ij}(g) \overline{b_{kl}(g)} dg = 0$

(ii) $F = \mathbb{C}$ 则 $(a_{ij}, a_{kl}) = \frac{1}{n} \delta_{ik} \delta_{jl}$

(pf. 对 $M(g) = (m_{ij}(g))$ 记 $\int_G M(g) dg$ 为 (i, j) 位置是 $\int_G m_{ij}(g) dg$ 的矩阵

对复矩阵 C 令 $\tilde{C} = \int_G \varphi^{-1}(g) C P(g) dg$

因 $\lambda \in \mathbb{C}$ 则 $\varphi^{-1}(x) \tilde{C} P(x) = \tilde{C} \Rightarrow \tilde{C} \in \text{Hom}_G(V, U)$

(i) 取 $C = e_k$ 则由 Schur 引理 $\tilde{C} = 0 \Rightarrow \int_G \overline{\varphi(g)}^T e_k P(g) dg = 0$

取 (i, j) 位置 $\Rightarrow (a_{ij}, b_{kl}) = 0$

(ii) 令 $\tilde{C} = \int_G P(g)^{-1} C P(g) dg \xrightarrow{\text{Schur}} \tilde{C} = \lambda I_V$

$n\lambda = \text{tr}(\tilde{C}) = \int_G \text{tr}(P(g)^{-1} C P(g)) dg = \text{tr}(C) = \delta_{ik}$

又 $\lambda \delta_{jl} = \int_G a_{ij} \overline{a_{kl}} dg = (a_{ij}, a_{kl})$

$\neq$)

Thm. (V, ρ) (U, φ) 同上.

(i) ρ 和 φ 不等价 则 $(\chi_\rho, \chi_\varphi) = \int_G \chi_\rho(g) \chi_\varphi(g^{-1}) dg = 0$

(ii) 若 $F = \mathbb{C}$ 则 $(\chi_\rho, \chi_\rho) = 1$

(由上个Thm直接计算即可)

Cor. (i) $\text{Irr}_{\mathbb{C}} G$ 为 $C(G, \mathbb{C})$ 中正交规范集 (特别地线性无关)

(ii) $\text{Irr}_{\mathbb{R}} G$ 为 $C(G, \mathbb{R})$ 中正交集

(iii) ρ, φ 为群 G 的两个 F -表示. 则 $\rho \cong \varphi \Leftrightarrow \chi_\rho = \chi_\varphi$

(iv) ρ 为群 G 的 F -表示. ρ 不可约表示 φ 在 ρ 中的重数为 $\frac{(\chi_\rho, \chi_\varphi)}{(\chi_\varphi, \chi_\varphi)}$

特别地若 $F = \mathbb{C}$ 则重数为 $(\chi_\rho, \chi_\varphi)$

(v) ρ 为群 G 的复表示. 则 ρ 不可约 $\Leftrightarrow (\chi_\rho, \chi_\rho) = 1$

2. Peter-Weyl 定理

Def. G 群. $\Delta \subset C(G, \mathbb{C})$ 为至多可数非零正交集. 称 Δ 完备. 若

$\forall f \in C(G, \mathbb{C}) \ \varepsilon > 0 \quad \exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}, f_1, \dots, f_n \in \Delta \quad \text{s.t.}$

$$|f(x) - \sum_{i=1}^n c_i f_i(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in G$$

Lemma G 群. $\Delta \subset C(G, \mathbb{C})$ 正交完备. $f \in C(G, \mathbb{C})$

则 $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists f_1, \dots, f_n \in \Delta \quad \text{s.t.} \quad \|f - \sum_{i=1}^n a_i f_i\|_{C(G, \mathbb{C})} < \varepsilon$

其中 a_i 为 f 关于 Δ 的 Fourier 系数 $a_i = \frac{(f, f_i)}{(f_i, f_i)}$

Cor G, Δ 如上. $0 \neq f \in C(G, \mathbb{C})$ 若 f 与 Δ -中任何元均正交. 则 $f \in \Delta$

Thm. (Peter-Weyl) G 紧. 则 G 的互不等价的有限维复表示的矩阵元的集合为 $C(G, \mathbb{C})$ 的完备正交集

在证明之前先给出该定理的推论

Cor. G 紧. $g \neq h \in G$. 则 $\exists p$ 有限维复不可约表示 s.t. $p(g) \neq p(h)$

Thm. G 紧. 则 $\text{Irr}_G G$ 为 G 上连续类函数空间的正交完备规范集

(Pf. 只证完备. 记 Δ 为 Peter-Weyl 定理中的集合. $\forall f$ 为连续类函数

$\mathbb{R}$) 由 Peter-Weyl Thm. $\exists g(x) = \sum_{i,j,m} C_{ijm} A_{ij}^{(m)}(x)$. 其中 $p_m(x) = (A_{ij}^{(m)}(x)) \in \overline{\text{Irr}}_G G$
s.t. $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$. ($\forall x \in G$).

令 $q(x) = \int_G g(axa^{-1}) da$. 则 q 为连续类函数且 $q \in \text{span}_G \Delta$

$$\begin{aligned} \text{同时 } |f(x) - q(x)| &= \left| \int_G f(axa^{-1}) - g(axa^{-1}) da \right| \\ &\leq \int_G |f(axa^{-1}) - g(axa^{-1})| da < \varepsilon \end{aligned}$$

故只须证. 若 q 为连续类函数且 $q \in \text{span}_G \Delta$. 则 $q \in \text{span}_G \text{Irr}_G G$

设 $q(x) = \sum_{i,j,m} C_{ijm} A_{ij}^{(m)}(x) = \sum_m P_m(x)$. $P_m(x) = (A_{ij}^{(m)}(x)) \in \overline{\text{Irr}}_G G$ 次数 d_m

$$\text{又 } q(axa^{-1}) = \sum_m P_m(axa^{-1}) = q(x) = \sum_m P_m(x)$$

由 Δ 的线性无关 $P_m(axa^{-1}) = P_m(x)$

$$\text{又 } P_m(axa^{-1}) = \sum_{i,j} C_{ijm} A_{ij}^{(m)}(axa^{-1})$$

$$= \sum_{i,j,k,l} C_{ijm} A_{ik}^{(m)}(a) A_{kl}^{(m)}(x) A_{lj}^{(m)}(a^{-1})$$

$$= \sum_{i,j,k,l} C_{ijm} A_{ik}^{(m)}(a) A_{lj}^{(m)}(a^{-1}) A_{kl}^{(m)}(x)$$

$$P_m(x) = \sum_{k,l} C_{k\ell m} A_{k\ell}^{(m)}(x)$$

对 $a_{ik}^{(m)}(x)$ 系数 $\Rightarrow C_{km} = \sum_{i,j} C_{ijm} a_{ik}^{(m)}(a) a_{ej}^{(m)}(a^{-1})$

$$\text{令 } C_m = (C_{ijm})^T \Rightarrow C_m = P_m(a^{-1}) C_m P_m(a)$$

$$\stackrel{\text{Schur}}{\Rightarrow} C_m = a_m I \quad a_m \in \mathbb{C}$$

$$\text{则 } q(x) = \sum_{i,j,m} C_{ijm} a_{ij}^{(m)}(x) = \sum_{i,m} a_m a_{ii}^{(m)}(x) = a_m \chi_m(x) \in \text{span}_{\mathbb{C}} \text{Irr}_{\mathbb{C}} G \quad \#)$$

Cor (i) G 有限群. g, h 为 G 中不同元的元. 则 $\exists$ 有限个互不相同的 $\chi \quad \chi(g) \neq \chi(h)$

(ii) G 有限群. Δ 为 G 上连续类函数空间的正交完备集.

f 为 G 上非零连续类函数. $f \in \Delta$ 且 f 中任一元正交. 则 $f \in \Delta$

(iii) G 有限群. $\Delta \subseteq \text{Irr}_{\mathbb{C}} G$ 且正交完备. 则 $\Delta = \text{Irr}_{\mathbb{C}} G$

3. Peter-Weyl 定理的证明

先在 G 中考虑. G 有限群

Def. $f_1 \in C(G) \quad f_2 \in L^1(G)$ 定义卷积为

$$\begin{aligned} (f_1 * f_2)(g) &= \int_G f_1(gh^{-1}) f_2(h) dh \\ &= \int_G f_1(h) f_2(h^{-1}g) dg \end{aligned}$$

Lemma 对 $\phi \in C(G) \quad T_\phi(f) = \phi * f$. 则 $T_\phi: L^1(G) \rightarrow C(G)$

且 $\|T_\phi f\|_\infty \leq \|\phi\|_\infty \|f\|_1$. 特别地 $T_\phi|_{L^2(G)}$ 有界

(pf. ϕ -致连续 $\Rightarrow \exists U$ 为邻域或 $|\phi(g) - \phi(kg)| < \varepsilon \quad (\forall g \in G \quad k \in U)$

则 $\forall g, g' \text{ s.t. } g'g^{-1} \in U$ 有

$$\begin{aligned} |T_\phi f(g) - T_\phi f(g')| &\leq \int_G |\phi(gh^{-1}) - \phi(g'g^{-1}gh)| |f(h)| dh \\ &\leq \varepsilon \|f\|_1 \Rightarrow T_\phi f \text{ 连续} \end{aligned}$$

$\|T_\phi f\|_{C^\infty} \leq \|\phi\|_{C^\infty} \|f\|_1$ 显然

#)

Prop. $\phi \in C(G)$. 则 (i) T_ϕ 为 $L^2(G)$ 上算子

(ii) 若 $\phi(g^{-1}) = \overline{\phi(g)}$. 则 T_ϕ 在 $L^2(G)$ 上自伴

(pf. (i)) 由 A-A 定理. 只须证 $B = \{T_\phi f \mid f \in L^2(G), \|f\|_2 \leq 1\}$

一致有界且等度连续 in $L^2(G)$. 又 $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$ 故只须

—— in $C(G), \|\cdot\|_\infty$

上个 Lemma 已给出有界. 只须等度连续. 取 u 同上. 则 $\forall k \in u$

$$\begin{aligned} \text{则 } |(\phi * f)(kg) - (\phi * f)(g)| &\leq \int_G |\phi(kgh^{-1}) - \phi(gh^{-1})| |f(h)| dh \\ &\leq \varepsilon \|f\|_1 \leq \varepsilon \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$(ii) \langle T_\phi(f_1), f_2 \rangle = \int_G \int_G \phi(gh^{-1}) f_1(h) \overline{f_2(g)} dg dh$$

$$\langle f_1, T_\phi(f_2) \rangle = \int_G \int_G \overline{\phi(hg^{-1})} f_1(h) \overline{f_2(g)} dg dh \quad \Rightarrow \text{显然自伴} \quad \#)$$

$\phi(g^{-1}) = \overline{\phi(g)}$

定义 G 在 $C(G)$ 上的右移作用 $(R(g)f)(x) = f(xg)$

Lemma ① $\phi \in C(G)$. $\lambda \in \text{Spec}(T_\phi)$. 则特征空间 H_λ 为 G -不变的

$$\begin{aligned} \text{cf } f. \forall f \in H_\lambda, g \in G \quad (T_\phi R(g)f)(x) &= \int_G \phi(xh^{-1}) f(hg) dh \\ &= \int_G \phi(xgh^{-1}) f(h) dh = R(g)(T_\phi f)(x) = \lambda R(g)f(x) \end{aligned}$$

Lemma ② $f \in C(G)$ 为有限维不可约表示的矩阵元 $\Leftrightarrow R(g)f (g \in G)$ 张成有限维空间 (记为 $f \in \Delta$)

(pf. $\Rightarrow$) 若 $f \in \Delta$. 不难验证 $R(g)f \in \Delta \Rightarrow R(g)f (g \in G)$ 张成 $\dim \leq n^2$ 空间 ($n = \deg \rho$)

$\Leftarrow$. $R(g)f$ 张成有限维空间 V' . 则 V' 为有限维 G -表示

$$\text{定义 } L \in V'^* \cdot L(\phi) = \phi(e) \Rightarrow L(R(g)f) = f(g)$$

$\Rightarrow f$ 为 G 的有限维表示 V'^* 的矩阵元 $\#)$

现在证明 Peter-Weyl 定理. R 是完备的. 任取 $\varepsilon > 0$

$\forall f \in C(G)$ - 一致连续 $\Rightarrow \exists U$ 邻域 of e s.t. $|f(g^{-1}h) - f(h)| < \frac{\varepsilon}{2}$ ($\forall g \in U, h \in G$)

取 ϕ 为非负实函数. 满足 $\begin{cases} \phi(g) = \phi(g^{-1}) \\ \phi \in \text{supp}(U) \end{cases} \xrightarrow{\text{Prop}} T_\phi \text{ 紧算子 on } L^2(G)$
 $\int_G \phi(g) dg = 1$

$$\forall h \in G. \quad |(T_\phi f)(h) - f(h)| = \left| \int_G (\phi(g) f(g^{-1}h) - \phi(g) f(h)) dg \right|$$

$$\leq \int_U \phi(g) |f(g^{-1}h) - f(h)| dg \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

由傅里叶级数理论: $\forall \lambda \in \text{spec}(T_\phi)$ 特征空间 H_λ 有限维 ($\lambda \neq 0$)
 且两两正交. 张成 $L^2(G)$

设 $f = \sum f_\lambda$ ($f_\lambda \in H_\lambda$). 则 $\sum \|f_\lambda\|^2 = \|f\|_2^2 < \infty$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \sqrt{\sum_{0 < |\lambda| < \delta} \|f_\lambda\|^2} < \frac{\varepsilon}{2\|\phi\|_\infty} \quad (*)$$

则令 $\tilde{f} = T_\phi(\sum_{|\lambda| \geq \delta} f_\lambda) \in \bigoplus_{|\lambda| \geq \delta} H_\lambda$

且 $\forall g \in G. \quad R(g)\tilde{f} \in \underbrace{\bigoplus_{|\lambda| \geq \delta} H_\lambda}_{\text{有限维}} \xrightarrow{\text{Lemma 2}} \tilde{f} \in \Delta$

$$\text{又 } T_\phi(f) - \tilde{f} = T_\phi(\sum_{0 < |\lambda| < \delta} f_\lambda)$$

$$\|T_\phi f - \tilde{f}\|_\infty \leq \|\phi\|_\infty \left\| \sum_{0 < |\lambda| < \delta} f_\lambda \right\|_2 \stackrel{(*)}{<} \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \|f - \tilde{f}\|_\infty \leq \|f - T_\phi f\|_\infty + \|T_\phi f - \tilde{f}\|_\infty$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

#