

黎曼曲面

参考书 《黎曼曲面讲义》 梅加强

目录

第一章 Riemann 映射定理

§1.1	Schwarz 引理	P. 1
§1.2	调和函数	P. 3
§1.3	Riemann 映射定理	P. 5

第二章 单值化定理

§2.1	黎曼曲面的定义	P. 7
§2.2	Poincaré 引理	P. 11
§2.3	亚纯函数与亚纯微分	P. 17
§2.4	Perron 方法	P. 20
§2.5	单值化定理	P. 25

第三章 Riemann-Roch 定理

§3.1	因子	P. 28
§3.2	Hodge 定理	P. 31

§3.3 Riemann-Roch 公式

P. 34

§3.4 若干应用

P. 38

§3.5 Abel-Jacobi 定理

P. 52

第四章 曲面与上同调

§4.1 生成簇

P. 60

§4.2 因子与线丛

P. 65

§4.3 层与预层

P. 68

§4.4 层与上同调

P. 72

§4.5 上同调群的计算

P. 76

§4.6 欧拉数

P. 80

第五章 曲面的复几何

§5.1 Hermite 度量

P. 82

§5.2 线丛的几何

§5.3 线丛的 Hodge 定理

§5.4 对偶定理

§5.5 消没定理

§5.6 线丛的阶类

第一章

Riemann映射定理

§1.1 Schwarz定理

$\mathbb{C}$ 上的区域指 $\mathbb{C}$ 的连通开集

全纯函数 $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$

平均值原理 f 在 $B_R(a)$ 上全纯. 则 $f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$

最大模原理 f 在区域 D 上全纯. 则 $|f|$ 在 D 上取不到最大值除非 f 为常值

$$\{z \mid |z| < 1\}$$

Thm 1.1.1 (Schwarz) $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ 全纯, $f(0)=0$ 则

$$(i) |f'(0)| \leq 1 \quad (ii) |f(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

$$\text{取等} \Leftrightarrow \exists \theta \text{ s.t. } f(z) = e^{i\theta} z$$

Cor 1.1.2 (i) $f: B_R(0) \rightarrow B_R(0)$ 全纯, $f(0)=0$ 则 $|f'(0)| \leq \frac{1}{R}$

$$(ii) f: B_R(0) \rightarrow \mathbb{C} \text{ 有界全纯} \quad \text{则 } |f'(0)| \leq \frac{2}{R} \sup |f|$$

(iii) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 有界全纯 则 f 为常值

Möbius变换

$\forall z_0 \in \mathbb{D}, \theta \in \mathbb{R}$ 定义

$$f_{z_0}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

$$z \mapsto e^{i\theta} \frac{z - z_0}{\bar{z}_0 z - 1}$$

Thm 1.1.3 $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ 一一全纯, 则 f 为 Möbius 变换

pf. $z_0 = f(0)$. 令 $g = f_{z_0} \circ f$. 则 $g: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ 一一全纯. $g(0) = 0$

则 $|g'(0)| \leq 1$. $h \equiv g^{-1}$ 同样 $|h'(0)| \leq 1$

但 $h \circ g = \text{Id} \Rightarrow h'(0) g'(0) = 1 \Rightarrow |g'(0)| = 1$ 故 $g(z) = e^{i\theta} z$ #

Thm 1.1.4 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 全纯自同构, 则 $f(z) = az + b$. $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$

pf. 不妨 $f(0) = 0$ 则 $f(z) = az$.

令 $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & z \neq 0 \\ f'(0) & z = 0 \end{cases}$ 只要证 g 有界全纯即可

(i) $\exists c > 0$ s.t. $|f(z)| \geq c$ ($\forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$) 则 $\exists z_i \in \mathbb{C} - \{0\} f(z_i) \rightarrow 0$

但 f 在 0 处连续. 故 $z_i = f^{-1}(f(z_i)) \rightarrow f^{-1}(0) = 0$ 矛盾!

(ii) $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = +\infty$ 否则若 $\exists A$ 及 $z_i \rightarrow \infty$ s.t. $|f(z_i)| \leq A$

则不妨 $f(z_i) \rightarrow w \in \mathbb{C}$ 由 (i) 同理 $z_i \rightarrow f^{-1}(w)$ 矛盾!

定义 $g: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ $z \mapsto \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$ 则 g 在 $\mathbb{D}$ 上全纯 $\Rightarrow |g(z)| \leq |z|$ #

§1.2 调和函数

Thm 1.2.1 $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 为区域 Ω 上调和函数

(i) $\forall z_0 \in \Omega$ 其邻域 B_{z_0} 及 B_{z_0} 上调和函数 v .

s.t. $f = u + iFv$ 为 B_{z_0} 上全纯函数

(ii) 若 Ω 单连通, 则 (i) 中 B_{z_0} 可换为 Ω

调和函数性质:

(i) **平均值公式**: $u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$

(ii) **最大值原理**: u 在 Ω 内部取不到局部最大值, 除非 u 为常值

(iii) **Poisson 公式**: $u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \frac{r^2 - |z_0|^2}{|re^{i\theta} - z_0|^2} d\theta$.

Thm 1.2.2 $f(re^{i\theta})$ 为 $\{|z|=r\}$ 上实连续函数, 则 $\{|z|<r\}$

内 $\exists!$ 调和函数 $u(z)$ s.t. $\lim_{z \rightarrow re^{i\theta}} u(z) = f(re^{i\theta})$

Cor 1.2.3 u 为区域 Ω 上连续实函数, 且任给 Ω 中一点 p ,

$\exists$ 邻域 V_p s.t. V_p 内 u 满足平均值公式, 则 u 调和

Thm 1.2.4 (Harnack 不等式) Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中区域. $\forall C \subset (0, 1)$

$\exists D(C, n)$ s.t. $\forall \Omega$ 上正调和函数 u , 有 $\sup_{B_{C\rho}(p)} u \leq D(C, n) \inf_{B_{C\rho}(p)} u$.
 $(\forall B_{\rho}(p) \subset \Omega)$

一般地若 $K \subset \Omega$, 则 $\exists D_K(\Omega)$ s.t. $\forall \Omega$ 上正调和函数 u

$$\text{有 } D_K(\Omega)^{-1} \leq \frac{u(z_1)}{u(z_2)} \leq D_K(\Omega) \quad \forall z_1, z_2 \in K$$

Thm 1.2.5 (Harnack 原理) $\{u_i\}$ 为域 Ω 上单增调和函数.

则下列两种必出现其一

(i) $\{u_i\}$ 内闭一致发散至 $+\infty$

(ii) $\{u_i\}$ 内闭一致收敛到 Ω 上某调和函数

Pf. 不妨 $\{u_i\}$ 均为正的

(i) 若 $\exists z_1 \in \Omega$ s.t. $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i(z_1) = +\infty$ 则由 Harnack 不等式

z_1 附近的 z_2 也有 $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i(z_2) = +\infty$

进一步地. $\forall K \subset \Omega$. u_i 在 K 上一致发散到 $+\infty$

(ii) 若 $\exists z \in \Omega$ s.t. $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i(z) = u < +\infty$ 则由 Harnack 不等式

u_i 在 Ω 上内闭致有界. 由梯度估计可知

u_i 在 Ω 上内闭致等度连续

则 u_i 内闭致收敛到连续函数 u .

又 u 满足均值公式. 故 u 调和.

#

§1.3 Riemann映射定理

Thm 1.3.1 Ω 为 $\mathbb{C}$ 中单连通真子开集. 则 $\exists \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ 的双全纯同构

pf

Lemma 1.3.2 Ω 如上. 则 $\exists$ 单全纯映射 $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{D}$

[若 $\exists z_0 \in \Omega^c, r_0 > 0$ s.t. $B_{r_0}(z_0) \subset \Omega^c$ 则 $\varphi(z) = \frac{r_0}{z - z_0}$]

故不妨 Ω 为有界域. 取 $z_0 \in \Omega$

$$\mathcal{F} = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ 射} \mid f(\Omega) \subset \mathbb{D}, f(z_0) = 0\}$$

Lemma 1.3.3 $f \in \mathcal{F}$ 且 $f(\Omega) \neq \mathbb{D}$ 则 $\exists g \in \mathcal{F}$ s.t. $|g'(z_0)| > |f'(z_0)|$.

$$[\text{取 } w \in \mathbb{D} - f(\Omega) \quad g_1: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} \\ z \mapsto \frac{z - w}{\overline{w}z - 1}]$$

$$\text{则 } 0 \notin g_1(f(\Omega)).$$

可取 $\sqrt{z}$ 在 $g_1(f(\Omega))$ 的一个分支. 记为 $g_2(z)$.

$$g_3: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} \\ z \mapsto \frac{z - g_2(w)}{g_2(w)\overline{z} - 1}$$

$$g \doteq g_3 \circ g_2 \circ g_1 \circ f: \Omega \rightarrow \mathbb{D}$$

$$\text{则 } |g(z_0)| = 0 \text{ 且 } |g'(z_0)| = |(g_3 \circ g_2 \circ g_1)'(0)| |f'(z_0)|$$

$$h = g_1^{-1}([g_3^{-1}(z)]^2): \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} \quad h(0) = 0 \quad \text{则 } |h'(0)| \leq 1.$$

又 h 在 $g_3(0) \neq -1$ 的 $\mathbb{D}$ 中. 故 $|h'(0)| < 1$. 又 $h \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1 = \text{Id} \Rightarrow |g'(z_0)| > |f'(z_0)|$

$\forall f \in \mathcal{F}, z_0 \in \Omega, R = r_0$ s.t. $B_{r_0}(z_0) \subset \Omega$.

$R \mid f(r_0 z + z_0) : D \rightarrow D$

由 Schwarz 定理 $|f'(z_0)| \leq r_0^{-1} \quad \forall f \in \mathcal{F}$.

由 Lemma 1.3.3 $\exists \{f_i\} \subset \mathcal{F}$ s.t. $\lim_{i \rightarrow \infty} |f'_i(z_0)| = \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(z_0)| \leq r_0^{-1}$

Lemma 1.3.4 $\{f_i\}$ 有收敛子列且收敛到 $\mathcal{F}$ 中满射

[子集 $K \subset \Omega$. 同上有常数 $C(K)$ s.t. $|f'_i(z)| \leq C(K) \quad \forall z \in K, f \in \mathcal{F}$

则 $\{f_i\}$ 在 K 上一致有界且等度连续. 则有收敛子列

对角线论证可得 $\{f_i\}$ 的内闭一致收敛子列. 极限 f 全纯

显然 $|f'(z_0)| = \sup_{g \in \mathcal{F}} |g'(z_0)| > 0 \Rightarrow f'$ 不为零值.

又 f_i 为单射. 由 Hurwitz 定理. f 为单射. 则 $f \in \mathcal{F}$.

由 Lemma 1.3.3 f 为满射

].

综上所述得证.

#

第二章 单值化定理

§2.1 黎曼曲面的定义

Def 2.1.1 Σ 为 A_2, T_2 拓扑空间 其开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in P}$

及 U_α 上连续映射 $\phi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ 且

(i) $\phi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha)$ 为同胚

(ii) $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 则 $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}: \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ 全纯

则 Σ 为 **黎曼曲面**

e.g. ^① 黎曼球面 定义 $S = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$$f: S^2 \rightarrow S$$

$$(x, y, z) \mapsto \begin{cases} \frac{x + \sqrt{-1}y}{1-z} & (x, y, z) \neq (0, 0, 1) \\ \infty & (x, y, z) = (0, 0, 1) \end{cases} \quad \text{双全纯}$$

故 $S^2 \cong S$ 同理可证 $\mathbb{CP}^1 \cong S$

② $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^*$ $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$ $\Lambda \triangleq \{m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$

$\mathbb{C}/\Lambda$ 为黎曼曲面 (称为黎曼环面)

$$\exists \delta = \inf_{(m,n) \neq (0,0)} |m\omega_1 + n\omega_2| > 0$$

$\forall p \in \mathbb{C}/\Lambda$ 取 $z_p \in \pi^{-1}(p)$ $U_p = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z_p| < \frac{\delta}{2}\}$

$$U_p = \pi(U_p)$$

例 $\pi_{U_p}: U_p \rightarrow \mathcal{U}_p$ 为同胚.

令 $\varphi: U_p \rightarrow U_p \subset \mathbb{C}$

$$q \mapsto (\pi_{U_p})^{-1}(q)$$

例 $\{(U_p, \varphi_p)\}$ 为坐标覆盖

Prop 2.11. (i) $\forall p \in \mathbb{C}/\Lambda$ 存在纯自同构

$$f_p: \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda \quad \text{s.t. } f_p(p) = [0]$$

$$(ii) \mathbb{C}/\langle \omega_1, \omega_2 \rangle \cong \mathbb{C}/\langle 1, \frac{\omega_1}{\omega_2} \rangle \cong \mathbb{C}/\langle 1, \frac{\omega_2}{\omega_1} \rangle$$

Pf. (i) 取 $z_p \in \pi^{-1}(p)$ 定义 $f_p: \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$

$$[w] \mapsto [w - z_p] \quad \text{BPG}$$

$$(ii) f: \mathbb{C}/\langle \omega_1, \omega_2 \rangle \rightarrow \mathbb{C}/\langle 1, \frac{\omega_1}{\omega_2} \rangle$$

$$[z] \mapsto [\frac{z}{\omega_2}]$$

#

Thm 2.12 (黎曼环面分类) $\forall \mathbb{C}/\Lambda \cong \mathbb{C}/\langle 1, \tau \rangle, \text{Im} \tau > 0$

且 $\mathbb{C}/\langle 1, \tau \rangle \cong \mathbb{C}/\langle 1, \tau' \rangle \Leftrightarrow \exists a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ s.t.}$

$$\tau' = \frac{c + d\tau}{a + b\tau} \quad ad - bc = 1$$

Pf. 若 $\mathbb{C}/\langle 1, \tau \rangle \cong \mathbb{C}/\langle 1, \tau' \rangle$ $f: \mathbb{C}/\langle 1, \tau \rangle \rightarrow \mathbb{C}/\langle 1, \tau' \rangle$ 双全

则不妨 $f([0]) = [0]$

$\exists!$ 全纯的 $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $F(0)=0$ s.t.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{F} & \mathbb{C} \\ \downarrow \pi_1 & \supseteq \downarrow \pi_2 & \\ \mathbb{C}/\Lambda_1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}/\Lambda_2 \end{array} \quad \text{记 } F \text{ 为 } f \text{ 的提升}$$

因为 f^{-1} 也有提升 $G: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $G(0)=0$ $\pi_1 \circ G = f^{-1} \circ \pi_2$

则 F, G 为互逆全纯同构 则 $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 自同构

故 $\exists \gamma \in \mathbb{C}$ s.t. $F(z) = \gamma z$

故 $f([z]) = [\gamma z]$ $[0] = f([0]) = f([1]) = [\gamma]$
 $f([T]) = [\gamma T]$

$\exists a, b, c, d \in \mathbb{C}$ s.t. $\begin{cases} \gamma = a + bT' \\ \gamma T = c + dT' \end{cases} \quad (*)$

$\exists i \in \mathbb{Z}$ $\begin{cases} ad - bc = 1 \\ T' = \frac{c + dT}{a + bT} \end{cases}$

反之 由 (*) 定义 a, b, c, d, γ

构造 $f: \mathbb{C}/\langle 1, T \rangle \rightarrow \mathbb{C}/\langle 1, T' \rangle$
 $[z] \mapsto [\gamma z]$

则 f 为全纯同构

#

§2.2 Poincaré 定理

$C^\infty(p) \triangleq \{M \text{ 上 } p \text{ 点附近的光滑函数} \}$

$V_p: C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$ 称为 p 处的 **切向量**. 若

$$V_p(fg) = f(p)V_p(g) + g(p)V_p(f) \quad \forall f, g \in C^\infty(p)$$

$T_p M = \{ \text{切向量全体} \}$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}|_p(f) = \frac{\partial}{\partial x}|_0(f \circ \varphi_\alpha^{-1}) \quad \frac{\partial}{\partial y_\alpha}|_p(f) = \frac{\partial}{\partial y}|_0(f \circ \varphi_\beta^{-1})$$

$$\mathbb{R}[T_p M] = \langle \frac{\partial}{\partial x_\alpha}|_p, \frac{\partial}{\partial y_\alpha}|_p \rangle$$

$$\phi: M \rightarrow N \Rightarrow \phi_{*p}: T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} N$$

$$\phi_{*p}(V_p)(g) = V_p(g \circ \phi) \quad \forall g \in C^\infty(\phi(p))$$

$$\text{若 } \phi = u + i v \quad \mathbb{R}[T_p M] \quad \phi_{*p} \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}|_p \\ \frac{\partial}{\partial y_\alpha}|_p \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}|_{\phi(p)} \\ \frac{\partial}{\partial y_\beta}|_{\phi(p)} \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}|_p \right)^* = dx_\alpha|_p \quad \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}|_p \right)^* = dy_\alpha|_p$$

$$T_p^* M = \langle dx_\alpha|_p, dy_\alpha|_p \rangle$$

余切向量场又称 **1-形式微分形式**

$\Lambda^2 T_p^* M = \{ \psi: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R} \mid \psi \text{ bilinear 且 关于两个分量反对称} \}$

$$\wedge: T_p^* M \times T_p^* M \rightarrow \Lambda^2 T_p^* M$$

$$(\omega_p, \eta_p) \mapsto \omega_p \wedge \eta_p$$

$$(\omega_p \wedge \eta_p)(v_p, w_p) = \omega_p(v_p) \cdot \eta_p(w_p) - \omega_p(w_p) \cdot \eta_p(v_p)$$

U_α 上的 2-次微分形式 比如 $a dx_\alpha \wedge dy_\alpha$

$$\omega = a dx_\alpha + b dy_\alpha, \text{ 则 } d\omega = da \wedge dx_\alpha + db \wedge dy_\alpha$$

$$f: M \rightarrow N \quad f^*: N \text{ 的 } i\text{-形式} \rightarrow M \text{ 的 } i\text{-形式}$$

$$f^* g = g \circ f \quad g \in C^\infty(N)$$

$$f^* \omega_p(v_p) = \omega_{f(p)}(f_{*p} v_p) \quad \omega \text{ 为 } N \text{ 上 } 1\text{-形式}$$

$$f^* \eta_p(v_p, w_p) = \eta_{f(p)}(f_{*p} v_p, f_{*p} w_p) \quad \eta \text{ 为 } N \text{ 上 } 2\text{-形式}$$

$$\begin{cases} f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta) \\ f^*(d\omega) = d(f^*(\omega)) \end{cases}$$

Def 2.2.1 $d\omega = 0$ 则 ω 为 闭形式
 $\omega = d\eta$ 则 ω 为 恰当形式

$$H_{dR}^q(M) \triangleq \{q\text{-次闭形式}\} / \{q\text{-次恰当形式}\}$$

Thm 2.2.1 (Poincaré 3/15). $H_{dR}^q(\mathbb{C}) = 0$ ($q=1, 2$)

12f. (i) ω 为闭 1-形式 $\omega = p dx + q dy$

$$\begin{aligned} d\omega = 0 &\Rightarrow dp \wedge dx + dq \wedge dy = \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) \wedge dx \\ &\quad + \left(\frac{\partial q}{\partial x} dx + \frac{\partial q}{\partial y} dy \right) \wedge dy \\ &= \underbrace{\left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right)}_0 dx \wedge dy = 0 \end{aligned}$$

$$df = \omega \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = p, \frac{\partial f}{\partial y} = q \Leftrightarrow f = \int_0^x p(t, y) dt + \int_0^y q(x, t) dy$$

(ii) ω 为闭 2-形式 $\omega = F(x, y) dx \wedge dy$

$$\text{则 } 1 = \left[\int_0^x F(t, y) dt \right] dy \quad d1 = \omega.$$

~~#~~

ω 为 M 上 1-形式. $\sigma: [a, b] \rightarrow M$ 曲线.

$$\omega \text{ 在局部为 } \omega = a dx_\alpha + b dy_\alpha$$

$$1/2 f(t) = a \circ \sigma(t) \cdot x'_\alpha(t) + b \circ \sigma(t) \cdot y'_\alpha(t)$$

$$\text{定义 } \int_\sigma \omega = \int_a^b f(t) dt$$

ω 为 M 上 2-形式 Ω 为 M 中区域

(i) 若有坐标/开域 U_α s.t. $\text{supp } \omega \cap \Omega \subset U_\alpha$

$$\text{定义 } \int_\Omega \omega = \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} a dx_\alpha dy_\alpha$$

(ii) 一般. 借助于坐标分解

Thm 2.2.2 (Stokes' 公式). ω 为 1-形式. $\text{supp } \omega \cap \Omega \subset \Omega$

$$\mathbb{R}) \int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega$$

Ω . $\forall P \in \partial\Omega \exists U_P, \varphi_P$

$\varphi_P(P) = 0$, s.t.

$\varphi_P(U_P \cap \Omega) = \{y \geq 0\}$

$\varphi_P(U_P \cap \partial\Omega) = \{y = 0\}$

$$\text{Thm 2.2.3 } H_{dR}^1(\mathbb{C}^*) = \mathbb{R} = H_{dR}^1(\mathbb{D}^*)$$

Pf. $\varphi: H_{dR}^1(\mathbb{C}^*) \rightarrow \mathbb{R}$

$$[\omega] \mapsto \int_{S^1} \omega$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \mathbb{R}) \begin{cases} dr = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} (x dx + y dy) \\ d\theta = \frac{1}{x^2+y^2} (x dy - y dx) \end{cases}$$

$$\varphi(d\theta) = 2\pi \neq 0 \text{ 故 } \varphi \text{ 满}$$

$$\text{若 } d\omega = 0, \int_{S^1} \omega = 0 \quad \omega = f dr + g d\theta \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial g}{\partial r}$$

$$\mathbb{R}) \omega = d\left(\int_1^r f(t, \theta) dt\right) = g(1, \theta) d\theta$$

$$\int_{S^1} \omega = 0 \Rightarrow \int_0^{2\pi} g(1, \theta) d\theta = 0 \quad \mathbb{R}) \int_0^\theta g(1, s) ds \text{ 良定}$$

$$\text{令 } \gamma = \int_1^r f(t, \theta) dt + \int_0^\theta g(1, s) ds \quad \mathbb{R}) \omega = d\gamma \Rightarrow \varphi \text{ 单} \neq$$

Thm 2.2.4 u 为 $\mathbb{D}^*$ 上调和函数 u 为 $\mathbb{D}^*$ 上某全纯函数

$$\text{的实部} \Leftrightarrow \exists 0 < r_0 < 1, \text{ s.t. } \int_{\partial D_{r_0}} \frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

这对 $\mathbb{C}^*$ 也成立. 更一般地, 有

Thm 2.25 (i) M 单连通 则 $H^1_{dR}(M) = 0$

(ii) M 单连通. $P \in M$ U 为坐标邻域 φ 坐标映射. $\varphi(P) = 0$

$\varphi(U) = D$. ω 为 M - $\{P\}$ 上闭 1-形式

若 $\exists 0 < r_0 < 1$ $\int_{\partial U_{r_0}} \omega = 0$. 则 ω 为 M - $\{P\}$ 上恰当 1-形式
 $U_{r_0} = \varphi^{-1}(D_{r_0})$

Pf. (i) M 上闭 1-形式 ω . 固定 $P_0 \in M$

$f: M \rightarrow \mathbb{R}$

$P \mapsto \int_{\gamma_P} \omega$

只需证 f 与 γ_P 选取无关. 设 $\sigma_P: P_0 \rightarrow P$

$\gamma_P: P_0 \rightarrow P$

由 M 单连通. σ_P 可被连续映为 S^1 上半圆. γ_P 下半圆

$$\text{则 } \int_{\sigma_P} \omega - \int_{\gamma_P} \omega = \int_{S^1} \sigma^*(\omega) = \int_D d\sigma^*(\omega) = \int_D \sigma^*(d\omega) = 0$$

(ii) 同 Thm 2.2.3 可知 $U-P$ 上有光滑函数 g s.t. $\omega = dg$

取 $\phi \in C^\infty(U)$ ϕ 在 P 附近恒为 1. ∂U 附近为 0

则 ϕg 可视为 $M-P$ 上光滑函数

$\omega - d(\phi g)$ 在 P 附近恒为 0. 可视为 M 上光滑 1-形式 且闭

则由 (i). 为 M 上恰当形式

故 ω 为 M - $\{P\}$ 上恰当 1-形式

#

下面举例说明该定理的应用

g 为连通 M 上恒非零全纯函数. 则 $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists M$ 上全纯函数 f s.t. $f^k = g$. (开 k 次方)

Pf. $\forall p \in M$. 取坐标邻域 U_p 及 U_p 上全纯函数 f_p s.t. $f_p^k = g$

$U_p \cap U_q \neq \emptyset$ 时, $\exists$ 常数 C_{pq} s.t. $f_p = C_{pq} f_q$

U_p 上定义 $\omega_p = \frac{df_p}{f_p}$ 则 $U_p \cap U_q \subseteq \omega_p = \omega_q$

则有 M 上整体闭形式 ω 则 $\exists h$ s.t. $dh = \omega = \frac{df_p}{f_p}$

$\Rightarrow U_p \subseteq d(f_p e^{-h}) = 0$ $f_p e^{-h} = C_p \Rightarrow g e^{-kh} = C_p^k$

C_p^k 不依 p 记为 C 令 $f = |C|^{\frac{1}{k}} e^h$ //

同理可证“取对数”

下面将之前实的概念“复化”

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$dz = dx + i dy \quad d\bar{z} = dx - i dy$$

$$dx \wedge dy = \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z}$$

$$f \text{ 全纯} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

A^q : q -次微分形式 $(\bar{z}, d\bar{z})$

$$A^2 = A^{2,0} \oplus A^{0,2}$$

$$\partial: A^q \rightarrow A^{q+1} \quad \bar{\partial}: A^q \rightarrow A^{q+1}$$

$$f \in A^0 \quad \partial f = \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad \bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

$$\omega = p dz + q d\bar{z} \in A^1 \quad \partial \omega = \frac{\partial q}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge d\bar{z} \quad \bar{\partial} \omega = \frac{\partial p}{\partial z} dz \wedge dz$$

$$\omega \in A^2 \quad \partial \omega = \bar{\partial} \omega = 0$$

$$d = \partial + \bar{\partial} \quad \partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0 \quad \bar{\partial}\partial = -\partial\bar{\partial}$$

$$f^* \partial = \partial f^* \quad \bar{\partial} f^* = f^* \bar{\partial}$$

Exercise. $H_{dR}^2(\mathbb{C}^*) = H_{dR}^2(\mathbb{D}^*) = 0$

pf. $\forall \eta = f dr \wedge d\theta$ 设 $\omega = p dr + q d\theta$ s.t. $d\omega = \eta$

$$d\omega = dp \wedge dr + dq \wedge d\theta$$

$$= \left(\frac{\partial q}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) dr \wedge d\theta = \eta$$

即 $\frac{\partial q}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial \theta} = f$ 同时 $\int_0^{2\pi} q(1, \theta) d\theta = 0$

§2.3 亚纯函数与亚纯微分

Def 2.3.1 $f: X \rightarrow Y$ 为拓扑空间之间连续映射

若 $\forall p \in M$ $\exists$ 邻域 U s.t. $f: U \rightarrow f(U) - f(p)$

为单射覆盖映射 则称 f 为 分歧覆盖

Prop 2.3.1 $f: M \rightarrow N$ 为非常值全纯映射 则 f 为分歧覆盖

对 $q \in N$ 定义 $\#f^{-1}(q) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} (p \text{ 处 } f \text{ 的重数})$ 为 q 在 f 下 原像数

Def 2.3.2 $f: M \rightarrow S$ $f \neq \infty$ 的全纯映射称为 M 上 亚纯函数

Thm 2.3.2 S 上亚纯函数为有理函数

Pf. $f: S \rightarrow S$ 亚纯. 不妨 $f(\infty) \neq \infty$

则 $\exists R > 0$ s.t. $f \neq \infty$ ($\forall |z| > R$)

$f^{-1}(\infty) \subset \mathbb{C} = S - \{\infty\}$ 为 $\{1 \leq |z| \leq R\}$ 的离散子集 则有限

取 $a \in f^{-1}(\infty)$ 则 a 附近 $f(z) = \underbrace{p_a(\frac{1}{z-a})}_{\text{多项式}} + \underbrace{H_a(z)}_{\text{亚纯}}$

令 $S(z) = \sum_{a \in f^{-1}(\infty)} p_a(\frac{1}{z-a})$ 则 $f - S$ 为 $\mathbb{C}$ 上有界全纯函数

故 $f = S + C$ 即有理

#

Def 2.3.3 M 上亚纯函数记为 $\mathcal{H}(M)$

设 $f \in \mathcal{H}(M)$, $f \neq 0$. $\forall p \in M$ z 为 p 附近坐标函数 $z(p) = 0$

p 附近 Laurent 展开 $f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots$

称 n 为 f 在 p 的 **赋值** 记为 $\nu_p(f)$

Rmk. (i) $\nu_p(f)$ 与坐标选取无关

(ii) $\nu_p(fg) = \nu_p(f) + \nu_p(g)$ $\nu_p(f+g) \geq \min(\nu_p(f), \nu_p(g))$

Def 2.3.4 M 上闭 (1,0) 型形式称为 **全纯微分**.

全纯微分全体空间记为 $\mathcal{H}(M)$

Def 2.3.5 M 上 **亚纯微分** 指除在 M 某离散集上的全纯微分

使得此全纯微分的局部表示的系数为 M 上局部亚纯函数

亚纯微分全体构成空间记为 $\mathcal{R}(M)$

Def 2.3.6 ω 为亚纯微分 $\forall p \in M$ p 附近坐标函数 z $z(p) = 0$

$\omega = (a_n z^n + \dots + a_{-1} z^{-1} + b(z)) dz$ a_{-1} 为 ω 在 p 的 **留数**

记为 $\text{Res}_p(\omega)$

Lemma 2.3.3 $\text{Res}_p(\omega)$ 与坐标无关

Pf 取以 p 为中心的圆盘 B 则

$$\int_{\partial B} \omega = \int_{\partial B} (a_{-n} z^{-n} + \dots + a_{-1} z^{-1} + b(z)) dz$$

$$= 2\pi \sqrt{-1} a_{-1} \Rightarrow a_{-1} = \frac{1}{2\pi \sqrt{-1}} \int_{\partial B} \omega$$

#

Thm 2.3.4 (留数定理) M 为紧黎曼曲面. 则对 k -亚纯微分

$$\sum_{p \in M} \text{Res}_p(\omega) = 0$$

Pf. ω 的极点 $p_1, \dots, p_k$ B_j 为含 p_j 的坐标圆盘

当 $i \neq j$ 时 $B_i \cap B_j = \emptyset$. 令 $\Omega = M - \bigcup_j B_j$

则 ω 为 Ω 上全纯微分

$$\text{Stokes: } 0 = \int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial \Omega} \omega = - \sum_j \int_{\partial B_j} \omega = -2\pi \sqrt{-1} \sum_j \text{Res}_{p_j}(\omega) \quad \#$$

$f: M \rightarrow \mathbb{C}$ 亚纯 $\omega = \frac{df}{f}$ 亚纯 且 $\nu_p(f) = \text{Res}_p(\omega)$

$$\Rightarrow \sum_{p \in M} \nu_p(f) = \sum_{p \in M} \text{Res}_p(\omega) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{p \in f^{-1}(\infty)} -\nu_p(f) = \sum_{p \in f^{-1}(a)} \nu_p(f)$$

$$\Rightarrow \#f^{-1}(\infty) = \#f^{-1}(a) \quad \text{同理 } \forall a. \#f^{-1}(\infty) = \#f^{-1}(a)$$

§2.4 Perron 方法

Def 2.4.1 $u: M \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 若 $\forall p \in M$ 附近 u 为 M 上

某局部全纯函数的实部, 则 u 为 M 上一个 **调和函数**

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx \quad u \text{ 调和} \Leftrightarrow \omega \text{ 闭}$$

Hodge 星算子

$$\star: A^1(M) \rightarrow A^1(M)$$

$$\eta = a dx + b dy \mapsto a dy - b dx$$

$$\star^2 = -\text{Id}$$

$$\star(dz) = -\sqrt{-1} d\bar{z} \quad \star(d\bar{z}) = \sqrt{-1} dz$$

$$\text{R: } \omega = \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx = \star du$$

$$\text{又 } \bar{\partial} u = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{-1} \frac{\partial u}{\partial y} \right) (dx - \sqrt{-1} dy)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy - \sqrt{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} (du - \sqrt{-1} \star du)$$

故

$$\text{Prop 2.4.1 } u \text{ 调和} \Leftrightarrow \star du \text{ 闭} \Leftrightarrow \bar{\partial} u \text{ 闭} \Leftrightarrow \partial \bar{\partial} u = 0$$

Prop 2.4.2 M 单连通 ⁽ⁱ⁾ u 为 M 上调和函数, 则为全纯函数实部

(ii) u 为 M -pts 上调和函数 $\int_B \star du = 0$ 则 u 为 M -pts 上全纯函数

(iii) u 为 M -pts 上调和函数 B 内有全纯函数 F_B st. $u = \log |F_B|$ ^{局部}
 则 M 上有 F st. $u = \log |F|$

Def 2.4.2 $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 为复平面区域上连续函数
 若 $\forall B_r(p) \subset \Omega$ $u(p) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(p+re^{i\theta}) d\theta$
 则称 u 为 Ω 上 **次调和函数**

Prop 2.4.3 下列等价

- (i) $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 次调和
- (ii) $\forall$ 区域 $\Omega' \subset \subset \Omega$ 及 Ω' 上调和函数 v , $u-v$ 在 Ω' 内达不到局部最大值 除非 $u-v$ 在 Ω' 上恒为 0
- (iii) $\forall B \subset \Omega$ u_B 为 B 内以 $u|_{\partial B}$ 为边值的调和函数, 则 $u \leq u_B$

pf. (i) $\Rightarrow$ (ii) 易得

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 由 $u-u_B|_{\partial B} = 0$ 由最大值原理可得

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \Rightarrow \text{(i)} \quad u(p) &\leq u_B(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_B(p+re^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(p+re^{i\theta}) d\theta \quad \# \end{aligned}$$

同样定义黎曼曲面上 **次调和函数**

Def 2.4.3 $\mathcal{F}$ 为 M 上族次调和函数, 若 $\mathcal{F}$ 满足

- (i) 若 $u, v \in \mathcal{F}$ 则 $\exists w \in \mathcal{F}$ s.t. $w \geq \max\{u, v\}$
- (ii) 若对 M 上任何坐标圆盘 B 若 $u \in \mathcal{F}$ 则 $\tilde{u}_B \in \mathcal{F}$

其中 $\tilde{u}_B = \begin{cases} u_B & p \in B \\ u & p \in M-B \end{cases}$

则 $\mathcal{F}$ 为 **Perron 族**

Thm 2.4.4 $\mathcal{F}$ 为 Ω 上 Perron 族 则

$$u_{\mathcal{F}} = \sup_{u \in \mathcal{F}} u \text{ 要么恒为 } \infty \text{ 要么为 } \Omega \text{ 上调和函数}$$

Def 2.4.4 ξ 为 $\partial\Omega$ 上一点. 若 $\exists \Omega$ 上连续到边界的次调和函数, 满足 $u(\xi) = 0$, $u(x) < 0 (\forall x \in \Omega - \{\xi\})$

则称 ξ 为 **正则点**, u 为 ξ 处的 **调函数**

Lemma 2.4.5 Ω 为 $\mathbb{C}^n$ 上有界域, $z_0 \in \partial\Omega$ 若 $\exists$ 坐标邻域 U, ϕ s.t. $\phi(z_0) = 0$, $\phi(\Omega \cap U) \subset \{z \in \mathbb{C}^n \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ 则 z_0 正则

特别地 对 Stoker 公式中的区域, 边界点均正则

Thm 2.4.6 Ω 为 $\mathbb{C}^n$ 上有界域, 边界点均正则, 则

$\forall f \in C(\partial\Omega)$ 则 $\exists!$ Ω 内调和函数 u u 连续到边界 $u|_{\partial\Omega} = f$

Pf $\mathcal{F}_f = \{u \text{ 为 } \Omega \text{ 内连续到边界的次调和函数 } u|_{\partial\Omega} \leq f\}$

易见 $\mathcal{F}_f$ 为 Perron 族, $u_f = \sup_{u \in \mathcal{F}_f} u$ 为 Ω 内调和函数

下证 u 为所求. $\forall \xi \in \partial\Omega$ 取 v 为调函数

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B_\xi \text{ s.t. } f(\xi) - \varepsilon < f(x) < f(\xi) + \varepsilon \quad \forall x \in \partial\Omega \cap B_\xi$$

$$\text{又 } v < 0 \text{ 且连续, 故 } \exists C, \text{ s.t. } f(\xi) - \varepsilon + Cv < f(x) < f(\xi) + \varepsilon - Cv \quad \forall x \in \partial\Omega \cap B_\xi$$

$$\text{特别地 } f(\xi) - \varepsilon + Cv \in \mathcal{F}_f \Rightarrow f(\xi) - \varepsilon + Cv \leq u_f \quad (*)$$

$$\text{又 } \forall u \in \mathcal{F}_f \text{ 由 } u|_{\partial\Omega} \leq f \Rightarrow u + Cv < f(\xi) + \varepsilon \text{ (于 } \partial\Omega \text{ 最大值于 } \Omega \text{)}$$

$$\text{故 } u_f \leq f(\xi) + \varepsilon - Cv \text{ 由 } v(\xi) = 0 \text{ 和 } (*) \text{ 得: } \quad \#$$

Lemma 2.4.7. 若 M 上有非常值非正次调和函数.

则 (i) M 上有非常值有界次调和函数

(ii) K 为 M 中紧集 $\Omega = M - K$ 连通且有正则边界 ∂K .

则 $\exists \Omega$ 内连续到边界的调和函数 w s.t. $w|_{\partial\Omega} = 1$ $0 < w|_{\Omega} < 1$.

Pf. u 为 M 上非正非常值函数.

(i) $p_0 \in M$. 令 $v = \max\{u(p_0), u\}$ 则 v 为所求

(ii) 不妨 $\max_K u = -1$ 若是 $\max\{-1, u\}$ 更进一步设 $u|_K = -1$.

$\mathcal{F}_K = \{w: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{次调和, 连续到 } \partial\Omega, w \leq -u\}$

则 $w = \sup_{w \in \mathcal{F}_K} w$ 为 Ω 内调和 且 $0 \leq w \leq -u \leq 1$ 下证 w_i 满足

$\forall p \in \Omega$ 取边界正则有界域 $\Omega_p \supset K \cup \{p\}$ 则

$\exists \Omega_p - K$ 内连续到边界调和函数 w_p s.t. $w_p|_{\partial K} = 1$
 $w_p|_{\partial\Omega_p} = 0$

则 $\Omega_p - K$ 内 $0 < w_p < 1$.

对 $w_p + u$ 在 $\Omega_p - K$ 最大值 $\Rightarrow w_p + u \leq 0$

Ω_p 外零延拓 w_p 可视为 M 上次调和 且 $w_p + u \leq 0$

故 $w_p \in \mathcal{F}_K \Rightarrow w_p \leq w$ 则不难证 w_i 满足

#

Rmk. K 为 M 上紧集. 若 $M-K$ 上有次调和函数 h

$$\text{s.t. } \sup_{M-K} h < \infty \quad \limsup_{P \rightarrow \partial K} h = 0 \quad \text{且 } \exists q \in M-K, h(q) > 0$$

则称最大原理对 K 不成立.

则结合引理有: M 上有非常值有界次调和函数 $\Leftrightarrow \exists K'$ 使得最大原理在 K' 上不成立

Lemma 2.4.8 若 M 上不存在非常值有界次调和函数.

U 为任意坐标圆盘 ϕ 为坐标函数 记 $U_r = \{q \in U \mid |\phi(q)| < r\}$

则 (i) $\forall \partial U_r$ 上连续函数 f , $\exists M-U_r$ 中惟一有界调和函数 u

$$\text{s.t. } u|_{\partial U_r} = f$$

(ii) 对上述调和函数 u , 若 $r < s < 1$, 则 $\int \partial U_s * du = 0$

Pf (i) 通过加一个常数, 不妨 $f \geq 0$ 考虑.

$$\mathcal{F}_f = \{v \text{ 为 } M-U_r \text{ 上次调和函数, 且 } v \leq \sup_{\partial U_r} f, v|_{\partial U_r} \leq f\}$$

$$u = \sup_{\mathcal{F}_f} v \text{ 为 } M-U_r \text{ 上调和函数, 且 } 0 \leq u \leq \sup_{\partial U_r} f$$

取 M 中正则边界有界域 Ω s.t. $\overline{U_r} \subset \Omega$, 则 $\Omega - \overline{U_r} \ni !$ 连续

到边界调和函数 v_Ω s.t. $v_\Omega|_{\partial U_r} = f, v_\Omega|_{\partial \Omega} = 0$

又延拓后可视 v_Ω 为 $M-U_r$ 上次调和函数

$$\text{由最大原理 } v_\Omega \in \mathcal{F}_f \Rightarrow u|_{\partial U_r} \geq v_\Omega|_{\partial U_r} = f \Rightarrow u|_{\partial U_r} = f$$

(ii) 略

#

§2.5 单值化定理

Def 2.5.1 存在非常值有界之调和函数的黎曼曲面为

双曲型

紧黎曼曲面为椭圆型

否则为抛物型

Prop 2.5.1 C 为抛物型

Pf. 若 C 为双曲型, 由 Lemma 2.4.7

$\exists$ 连续到边界的调和函数 $u: C - \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{s.t. } u|_{\partial D} = 0 \quad 0 < u < 1$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall z \in C - \bar{D} \quad \text{取 } r_0 > \max(|z|, e^{\frac{1}{\varepsilon}})$$

$$\text{由在 } \partial(D_{r_0} - \bar{D}) \text{ 上 } \varepsilon \log |z| \Rightarrow \varepsilon \log |z| \geq u(z) \geq 0$$

则令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 有 $u \equiv 0$. 矛盾!

#

Lemma 2.5.2 M 为双曲型, 则 $\forall p \in M$ $M - \{p\}$ 上存在

正调和函数 g s.t. 在 p 的坐标邻域 B 内.

$$g + \log |z| \text{ 调和 } (\phi \text{ 为坐标函数 } \phi(p) = 0, \phi(B) = D)$$

g 称为 p 处的 Green 函数

Thm 2.5.3 单连通双曲型曲面全纯同构于 $\mathbb{D}$

Pf. $\forall p \in M$, B 为坐标邻域 中坐标函数

g_p 为 p 处 Green 函数. $g_p + \log|\phi|$ 在 B 上调和 则
为某全纯函数 h 的实部

$F_p = e^{-h}\phi$ 为 B 内全纯函数

$$\log|F_p| = -g_p$$

由 Prop 2.4.2 F_p 延拓到 M 且仍 $\log|F_p| = -g_p$

则 $F_p: M \rightarrow \mathbb{D}$. 下证 F_p 为单射 则 M 与 $\mathbb{D}$ 中单连通域 $F(M)$ 同胚

由 Riemann 映射 $\mathbb{D} \xrightarrow{\pi} F(M)$

$\forall q \in M$ ψ 为坐标函数 $\psi(q) = 0$ 同理有 Green 函数 g_q

和 F_q s.t. $\log|F_q| = -g_q$

$$1/2 F'(x) = \frac{F_p(x) - F_p(q)}{1 - \overline{F_p(q)} F_p(x)} \quad \text{则 } F' \text{ 全纯 } F'(q) = 0 \text{ 无重零点}$$

令 $u = -\frac{\log|F'|}{n}$ 则 $u + \log|\psi|$ 在 q 附近有限 延拓为 q 附近

调和函数. 由 Green 函数构造有 $g_q \leq u$

$$\text{则 } |F_q(x)| \geq |F'(x)|^{\frac{1}{n}} \geq |F'(x)| \Rightarrow |F_q(p)| \geq |F'(p)| = |F_p(q)|$$

$$\text{交换 } p, q \Rightarrow |F_q(p)| = |F'(p)| = |F_p(q)| \Rightarrow F' = c F_q, |c| = 1$$

由 F_q 只有 q 这一零点 则 F' 也是. 故 F_p 为单的.

#

Lemma 2.5.4 M 非双曲型 B 为 p 的邻域圆盘

中解析函数 $f: B - \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ 全纯

对 $0 < r < 1$ 令 U_r 为 $M - B_r$ 上满足 $U_r = \operatorname{Re}(f)$ 的有界调和函数

则当 $0 < r < \frac{1}{2}$ 时 $\exists C(r)$ s.t. $\max_{M - B_r} |U_r| \leq \max_{\partial B_r} |U_r| \leq C(r)$ ($r < 1$)

Cor 2.5.5 M 非双曲 B 中 f 同上

则 $\exists$ 调和函数 $u: M - \{p\} \rightarrow \mathbb{R}$ s.t. u 在 p 的任一邻域外有界

且 $u - \operatorname{Re}(f)$ 可延拓为在 p 为 0 的 B 上调和函数

Thm 2.5.6 M 为非双曲型单连通. 则 M 与 S 或 $\mathbb{C}$ 同构

Pf. $\forall p \in M$. 考虑 $B - \{p\}$ 上全纯的 ϕ . 则 $\exists M - \{p\}$ 上调和 u

s.t. B 上 $u = h + \operatorname{Re}(\phi)$ 其中 h 在 B 上调和 $h(p) = 0$
 $\Rightarrow h = \operatorname{Re}(F_B)$ F_B 全纯

故 $u = \operatorname{Re}(F_B + \phi)$

由单连通 $F_B + \phi$ 可延拓为 $M - \{p\}$ 内全纯 记为 F

则 F 为 M 上以 p 为单极点的正纯函数

可证 F 为单射.

则 M 与 S 中单连通域 $F(M)$ 同构

若 M 紧. 则 $F(M)$ 既开又闭 $\Rightarrow F(M) = S$ $M \cong S$

否则 $F(M)$ 为 $\mathbb{C}$ 中单连通域 $F(M) \subseteq D$ 或 $\mathbb{C}$

又 M 非双曲. 故 $M = F(M) \subseteq \mathbb{C}$

#

第三章 Riemann-Roch 定理

§3.1 因子

Def 3.1.1 $D: M \rightarrow \mathbb{Z}$ 若除有限个点外均 $D=0$ 则称 D 为 M 上的一个 **因子**

用形式和 $\sum_{p \in M} D(p) \cdot p$ 表示因子 D

若 $D(p) \geq 0$ 恒成立 则称 D 为 M 上 **有效因子**

$\bar{D} = \{M \text{ 上因子全体} \}$ 称为 **因子群**

$$d: \bar{D} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$D \mapsto \sum_{p \in M} D(p)$$

$d(D)$ 称为 D 的 **次数**

e.g. 亚纯函数 f 诱导 $(f) = \sum_{p \in M} \nu_p(f) \cdot p$

若 M 紧 则 $d(f) = 0$ (守恒)

Def 3.1.2 M 紧 则上述 (f) 称为 **主要因子**

$P = \{ (f) \mid f \in R(M) \}$ 称为 **主要因子群**

$P \subset \ker d \Rightarrow \bar{D}/P$ **因子类群**

e.g. $w \in R(M)$ $(w) \subseteq \sum_{p \in M} \nu_p(w) \cdot p$

若 $w' \in R(M)$ 则 $(w) - (w') \in P$ 故 $(w), (w')$ 等价

记为类 K 典范因子类

Def 3.13 M 域 $\mathcal{L}(D) = \{f \in R(M) \mid (f) + D \geq 0\}$
 $\mathcal{L}(D) = \{w \in R(M) \mid (w) - D \geq 0\}$

Lemma 3.1.1

- (i) $\mathcal{L}(D), \mathcal{L}(D')$ 为复向量空间. 若 $D \geq D'$, 则 $\mathcal{L}(D) \supseteq \mathcal{L}(D')$, $\mathcal{L}(D) \supseteq \mathcal{L}(D')$
- (ii) $\mathcal{L}(D), \mathcal{L}(D)$ 均有有限维
- (iii) 若 K 为典范因子, 则 $\mathcal{L}(D) \supseteq \mathcal{L}(K-D)$

pf. (i) 显然

(ii) $D = D_1 - D_2$, $D_1 \geq 0, D_2 \geq 0$. 则 $\mathcal{L}(D) \subset \mathcal{L}(D_1)$

即 $\dim \mathcal{L}(D) < \infty$. 对 $d(D)$ 归纳

$d(D_1) = 0$. 则 $D_1 = 0$ $\mathcal{L}(D_1) = \{f \in R(M) \mid (f) \geq 0\} = \{\text{非负实数}\} = \mathbb{C}$

若 $d(D_1) = m$ 时成立. $d(D_1) = m+1$ 时

设 $D_1 = \eta \cdot P + \dots$ $A_{D_1} = \{f \in \mathcal{L}(D_1) \mid \nu_P(f) > -n\}$

$B_{D_1} = \{f \in \mathcal{L}(D_1) \mid \nu_P(f) = -n\}$

则 $A_{D_1} \cup B_{D_1} = \mathcal{L}(D_1)$ $A_{D_1} \subset \mathcal{L}(D_1 - P)$ 则 $\dim A_{D_1} < \infty$.

若 $B_{D_1} \neq \emptyset$ 取 $f_0 \in B_{D_1}$ $f_0(z) = a_{-n} z^{-n} + \dots$

则 $\forall f \in B_{D_1}$ $\exists \lambda$ s.t. $f - \lambda f_0 \in A_{D_1} \Rightarrow \mathcal{L}(D_1) = \text{span}\{f_0, A_{D_1}\}$

故 $\dim \mathcal{L}(D) \leq 1 + \dim A_{D_1} < \infty$. 对 $\mathcal{L}(D)$ 类似

(iii) 设 K 由亚纯函数生成 则

$(\eta) - D \geq 0 \Leftrightarrow (\frac{\eta}{w}) + K - D \geq 0$ 故 $\psi: \mathcal{L}(D) \rightarrow \mathcal{L}(K-D)$

$\eta \mapsto \frac{\eta}{w}$ 为同构 $\neq$

Cor 3.12 M 为紧黎曼曲面

(i) 对有效因子 D , $\dim(L(D)) \leq d(D) + 1$.

(ii) 特别地 $\dim(L(p)) \leq \forall p \in M$ 等号 $\Leftrightarrow M$ 与 S 同构

(iii) $\dim H < \infty$ H 为 M 上全体 1-形式构成的空间.

Pf. (i) 由上面证明不难得到

$$(ii) \dim(L(p)) \leq d(p) + 1 = 2$$

若取等, 则 $\exists f \in L(p)$, f 不为常值 $(f+p=0 \Rightarrow p$ 为 f 唯一极点.

则 $f: M \rightarrow S$ 为一全纯映射 已同构

(iii) 取全纯微分 ω 生成 K 为有效因子.

$$\text{则 } \dim H (= \dim \pi_1) = \dim L(K) \leq d(K) + 1$$

故 H 有限维

#

§3.2 Hodge定理

Def 3.2.1 ω 为 1-形式. 若 $\omega * \omega$ 均为闭形式. 则称 ω 为 闭调和形式

全纯形式 $\Leftrightarrow (1,0)$ 闭调和形式

$\mathcal{H}' = \{\text{闭调和形式全体}\}$

Lemma 3.2.1 $\mathcal{H}' = \mathcal{H} \oplus \overline{\mathcal{H}}$. $\mathcal{H} = \{\bar{\omega} / \omega \in \mathcal{H}\}$

Pf. $\omega \in \mathcal{H}$ 则 $\bar{\omega}$ 为 $(0,1)$ 型. $*\bar{\omega} = \sqrt{-1} \bar{\omega}$ 闭

则 $\overline{\mathcal{H}} \subset \mathcal{H}' \Rightarrow \mathcal{H} \oplus \overline{\mathcal{H}} \subset \mathcal{H}'$

对 $\omega \in \mathcal{H}'$ $\omega = \frac{\omega + \sqrt{-1} * \omega}{2} + \frac{\omega - \sqrt{-1} * \omega}{2} \in \mathcal{H} \oplus \overline{\mathcal{H}}$ #

定义 $\omega, \omega_2 \in A^1(M)$. 定义 $(\omega, \omega_2) = \int_M \omega \wedge * \bar{\omega}_2$
 $\|\omega\| = \sqrt{(\omega, \omega)}$

Lemma 3.2.2 M 紧. 则

(i) ω 为 M 上闭调和形式, $(\omega, df) = 0 \quad \forall f \in A^0(M)$

特别 闭调和形式恒为 0

(ii) $\omega = \omega_0 + df$ 闭 ω_0 闭调和 $f \in A^0(M)$

则 $\|\omega\| \geq \|\omega_0\|$. 取等 $\Leftrightarrow \omega = \omega_0$

Pf. (i) 即证 $(df, \omega) = 0$ $(df, \omega) = \int_M df \wedge * \bar{\omega}$
 $\stackrel{* \bar{\omega} = \bar{* \omega}}{=} \int_M df \wedge * \bar{\omega} \stackrel{\text{Stokes}}{=} 0$

若 ω 闭和恰当, 则 $\omega = dh$. $\|\omega\|^2 = (\omega, \omega) = (dh, \omega) = 0$

(ii) $\|\omega\|^2 = (\omega_0 + df, \omega_0 + df)$
 $= (\omega_0, \omega_0) + (df, \omega_0) + (\omega_0, df) + (df, df)$
 $= \|\omega_0\|^2 + \|df\|^2 \geq \|\omega_0\|^2$ 取等 $\Leftrightarrow df = 0 \Leftrightarrow \omega = \omega_0$

Thm 3.2.3 (Hodge 定理) M^n 上 $\forall \omega \in A^k(M)$

$\exists ! \omega_h \in \mathcal{H}^k$ 和唯一实数 $f, g \in A^0(M)$

s.t. $\omega = \omega_h + df + *dg$

Rmk. 这是一个正交分解.

若 ω 闭, 则无第三项. 因为 $\|*dg\|^2 = \int_M *dg \wedge **dg$

$= \int_M (\bar{g} * dg) = 0$
 $\Rightarrow$ de Rham 上闭同调类中有唯一闭形式代表元

Cor 3.2.4 M^n 上 $\mathbb{R}$ 上 $H_{dR}^k(M) \subseteq \mathcal{H}^k$

特别地 $\dim H_{dR}^1(M) = 2 \dim \mathcal{H}^1$ (2 $\dim \mathcal{H}^1 = g$ 为 M 的亏格)

e.g. $g(S) = 0$, $g(C/N) = 1$

Cor 3.2.5 M 紧 $n \in \mathbb{Z}_+$. $\forall p \in M$ B 为 p 附近坐标邻域
 z 为 B 上坐标函数 $z(p) = 0$

则 $\exists M$ 上亚纯微分 η 以 p 为唯一极点.

且 p 附近 $\eta = d(\frac{1}{z^n}) + \eta_1$ η_1 为 p 附近全纯微分

pf. 不妨 $z(B) = \mathbb{D}$ $B_{\frac{1}{2}} = \{q \in B \mid |z(q)| < \frac{1}{2}\}$

取 $\rho \in C^\infty(M)$ s.t. $\rho|_{B_{\frac{1}{2}}} = 1$ $\rho|_{M-B} = 0$

考虑 M -3p 上的 1-形式 $\omega' = \begin{cases} d(\rho \frac{1}{z^n}) & q \in B \\ 0 & q \notin B \end{cases}$

$B_{\frac{1}{2}}$ 内 $\omega' - \bar{\partial} * \omega' = 0$. 则 $\omega' - \bar{\partial} * \omega'$ 可视为 M 上光滑 1-形式

Hodge 分解为 $\omega' - \bar{\partial} * \omega' = \omega_h' + df + *dg$

且 $\omega = \omega' - df = \bar{\partial} * \omega' + \omega_h' + *dg$

(i) ω 在 M -3p 上闭和: $\omega = \omega' - df$ 闭 $*\omega = -\bar{\partial} * \omega' + *\omega_h' - dg$ 闭

(ii) $B_{\frac{1}{2}}$ 内 $\omega = \bar{\partial} * \omega' = d(\frac{1}{z^n})$

$\omega - d(\frac{1}{z^n}) = -df = \omega_h' + *dg$ 闭和

令 $\eta = \frac{1}{z^n}(\omega + \bar{\partial} * \omega)$ 则 η 为所求

#

Rmk. 由此可得复黎曼面上总有典范因子和非平凡亚纯函数

$\mathcal{H}$ 的标基 $\{\phi_1, \dots, \phi_g\}$ 则 $\mathcal{H}' = \text{span}\{\phi_1, \dots, \phi_g, \bar{\phi}_1, \dots, \bar{\phi}_g\}$

令 $\phi: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}^g$

$\omega \mapsto (\int_M \omega \wedge \bar{\phi}_1, \dots, \int_M \omega \wedge \bar{\phi}_g)$ 为同构

§3.3 Riemann-Roch 公式

Thm 3.3.1 (Riemann-Roch) M 紧. 亏格为 g .

$$\text{则 } \forall D \quad \dim \mathcal{L}(D) = \dim i(D) + (1-g) + d(D)$$

下面关注它的证明

ω 为 M 上正则微分且留数为 0. $P_1, \dots, P_k$ 为极点.

P_i 处取不变坐标邻域 B_i . 由 $\int_{B_i} \omega = 2\pi \text{Res}_{P_i}(\omega) = 0$.

则 ω 在 $B_i - \{P_i\}$ 恰当 $\exists \varphi_i$ s.t. $\omega = d\varphi_i$

则可拼成 M 上光滑函数 g .

定义 奇并积分 $\int_M \omega \wedge \gamma = \int_M (\omega - d\varphi) \wedge \gamma \quad (\gamma \in \Gamma)$

Prop. (i) 可验证该定义不依赖于 g 的选取

(ii) 若 γ 也恰当 $\gamma = df$.

$$\text{则 } \int_M \omega \wedge \gamma = \int_M (\omega - d\varphi) \wedge df = - \int_M d(f(\omega - d\varphi)) = 0$$

$$\text{(iii) } \omega = d\varphi \quad \varphi \in \mathcal{R}(M) \Leftrightarrow \forall \gamma \in \Gamma \quad \int_M \omega \wedge \gamma = 0$$

Lemma 3.3.2 在 Cor 3.2.5 中可取 γ, γ_n s.t. $\int_M \gamma \wedge \bar{\varphi}_i = 0 \quad (\forall i=1, \dots, g)$

Pf. 在 Cor 3.2.5 中取 γ', γ_n'

$$\text{又 } \varphi: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}^g$$

$$\varphi \mapsto \left(\int_M \varphi \wedge \bar{\varphi}_1, \dots, \int_M \varphi \wedge \bar{\varphi}_g \right) \text{ 为同构}$$

取 φ 满足 s.t. $\int_M \varphi \wedge \bar{\varphi}_i = \int_M \gamma' \wedge \bar{\varphi}_i$. 再令 $\gamma = \gamma' - \varphi$ 即可

#

设 $D = \sum_{i=1}^m n_i p_i$ ($n_i > 0$) 则由引理 $\exists$ 正交微分 $T_{p_i}^{n_i}, \dots, T_{p_i}^{n_i}$
 s.t. B_i 中 $T_{p_i}^k = d(\frac{1}{z^k}) + \gamma_i^k$ γ_i^k 全在 $\mathcal{H}$.

$\{T_{p_i}^{n_i}, \dots, T_{p_i}^{n_i}\}_{i=1}^m$ 为 M 上无关正交微分, 张成 $m(D)$

$$\text{则 } \dim m(D) = \sum_{i=1}^m n_i = d(D)$$

Lemma 3.3.3 (i) $\forall f \in l(D), df \in m(D)$

(ii) $T \in m(D)$ 则 $T = df, f \in l(D) \Leftrightarrow \int_M T \wedge \phi_i = 0 \quad \forall i$

pf. (i) $\nu_{p_i}(f) + n_i > 0$ 则 $\exists \lambda_i^k$ s.t. $df - \sum_{i,k} \lambda_i^k T_{p_i}^k \in \mathcal{H}$

$$\text{又 } \int_M (df - \sum_{i,k} \lambda_i^k T_{p_i}^k) \wedge \bar{\phi}_j = 0 \Rightarrow df \in \text{Span}\{T_{p_i}^k\} = m(D)$$

(ii) $\Rightarrow \Leftarrow$

若 $\int_M T \wedge \phi = 0 \quad (\forall \phi \in \mathcal{H})$ 则 $\exists f$ s.t. $T = df \notin \mathcal{H}$

$\forall \phi \in \mathcal{H}$ 由 $T_{p_i}^k$ 构造 $\exists M$ -邻域 U 上 g s.t.

$$U \cap B_i \text{ 附近 } g = \frac{1}{z^k} + f, \quad T_{p_i}^k = dg \quad f \in \mathcal{H}$$

$$\text{则 } \int_M T_{p_i}^k \wedge \phi = \int_M (T_{p_i}^k - dg) \wedge \phi$$

$$= \int_{M-B_i} (T_{p_i}^k - dg) \wedge \phi = - \int_{M-B_i} dg \wedge \phi$$

$$= \int_{\partial B_i} g \phi = \int_{\partial B_i} \frac{1}{z^k} \phi$$

$$\phi = (\sum a_j z^j) dz$$

$$= 2\pi \sqrt{-1} a_{k-1}$$

定义 $S: m(D) \rightarrow \mathcal{H}$
 $T \mapsto \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{j=1}^g \left(\int_M T \wedge \phi_j \right) \phi_j$

$T: \mathcal{H} \rightarrow m(D)$

$\varphi = \left(\sum a_k^i z^k \right) dz \mapsto \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} a_{k-1}^i T_{P_i}^k$

Lemma 3.3.4 (i) $\text{Ker } S = \text{Im } d$ (ii) $\text{Ker } T = i(D)$

(iii) $\dim \text{Im } S = \dim \text{Im } T$

Pf. (i) $T \in \text{Ker } S \Leftrightarrow \int_M T \wedge \phi_j = 0 \ (\forall j) \Leftrightarrow T \in \text{Im } d$

(ii) $\omega \in i(D) \Leftrightarrow \omega \in \mathcal{H}$ 且在 P_i 附近 $\omega = \left(\sum a_k^i z^k \right) dz$
 $\forall j \ a_k^i = 0 \quad k \leq n_i - 1$

$\Leftrightarrow \omega \in \text{Ker } T$

(iii) $\phi_j = \left(\sum_k a_{jk}^i z^k \right) dz$

$\forall j \ S(T_{P_i}^k) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{j=1}^g \left(\int_M T_{P_i}^k \wedge \phi_j \right) \phi_j = \sum_{j=1}^g a_{j, k-1}^i \phi_j$

$T(\phi_j) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} a_{j, k-1}^i T_{P_i}^k$

$\forall j \ S, T$ 线性互为转置 $\Rightarrow \dim \text{Im } S = \dim \text{Im } T$

#

回到主定理证明

Step 1 D 有效 若 $D=0$ 易证

$D \geq 0 \quad d(D) > 0 \quad \forall j$

$\dim l(D) = \dim \text{Ker } d + \dim \text{Im } d = 1 + \dim \text{Ker } S$

$= 1 + \dim m(D) - \dim \text{Im } S = 1 + \dim m(D) - (\dim \mathcal{H} - \dim \text{Ker } T)$

$= 1 + d(D) - g + \dim i(D)$

Cor 3.3.5 K 为 M 上典范因子. 则 $d(K) = 2g - 2$

特别地, 若 $g=1$, 则存在处处非零全纯微分

pf. $g=0$ by $m \leq 5$. $\forall w=dz$ $R|k=(w) = -2\infty$ $d(k) = -2$

9.21 R. $\exists \omega \in H \quad k = (\omega) \geq 0$

且 $I(K) \subseteq I(O) = \mathcal{H}$ $I(K) \subseteq I(O) = \mathcal{E}$

$$g = \dim \mathcal{H} = \dim \ell(k) = 2 + d(k) - g. \quad \#$$

Step2 K-D有双 R)
$$\dim l(k-D) = \underbrace{\dim l(k-D)}_{\dim l(D)} + \underbrace{d(k-D)}_{\dim l(D)} + \underbrace{1-g}_{2g-2-d(D)}$$

Step 1 一般 若 $l(D) \neq 0$ 则 $\exists f_0 \in l(D)$ $(f_0) + D \geq 0$

则公式对 $D_0 = (f_0) + D$ 成立 则对 D 成立

若 $u(0) \neq 0$ 同理.

若 $l(D) = i(D) = 0$, $D = D_1 - D_2$, D_1, D_2 有效

$$\text{Richtig: } \dim t(D_1) \leq \dim t(D_1 - D_2) + d(D_2) = d(D_2)$$

$$d\tilde{m}^2(D) + d(D) + 1 - g$$

$$\geq d(D_1) + 1 - g$$

故 $d(D) = d(D_1) - d(A_2) \leq g-1$ 同理 $d(k-D) \leq g-1$

$$d(D) \geq d(K) - (g-1) = g-1 \Rightarrow d(D) = g-1$$

총상 Riemann-Roch 공식 정리

§3.4 若干应用

(1) Bergman 度量

Thm 3.5.1 M 紧, $g > 0$ 则 $\forall p \in M$ 存在无穷多个 ω s.t. $\omega(p) \neq 0$

Pf 否则 $\exists p \in M$ s.t. $\forall \omega \in \mathcal{H}$ $\omega(p) = 0$

$$\mathcal{H}(\subset i(p)) = \{\omega \mid (\omega, p) \geq 0\} \subset \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{H} = i(p)$$

$$\dim i(p) = \dim i(p) + d(p) + 1 - g = 2 \quad \text{则 } M \subseteq S \text{ 矛盾!} \quad \#$$

$h = \sum_{i=1}^g \varphi_i \otimes \bar{\varphi}_i$ 则称为 Bergman 度量

(2) 亚纯函数的丰富性

Thm 3.4.2 (i) $d(D) \geq 2g - 1$ 则 $\dim i(D) = d(D) + 1 - g$

(ii) $d(D) = g + n$ 时 $\dim i(D) \geq 1 + n$ $g=0$ 取等

Pf (i) $d(K-D) = d(K) - d(D) < 0$ 则 $i(D) = i(K-D) = 0$

$$(ii) \dim i(D) = \dim i(D) + d(D) + 1 - g$$

$$\geq d(D) + 1 - g = 1 + n$$

$g=0$ 由 (i) 易知取等

#

Cor 3.4.3 (i) $\forall p \in M$ 存在无穷 f s.t. f 以 p 为唯一极点 重数 $\leq g+1$

(ii) $\dots \dots \dots$

(iii) $\forall p \neq q \in M$ 存在无穷 f s.t. $f(p) \neq f(q)$

(iv) $\forall p \in M$ 存在无穷 f s.t. p 为单零点

(v) $g > 1$ 存在无穷 f s.t. f 的分支叶数 $\leq g$

(3) 亚纯函数域

Def 3.41 K 为复数域. 若 $\exists z \in K$ st. $z \notin \mathbb{C}$ 为复数元.

$[K: \mathbb{C}(z)] < \infty$. 则称 K 为一元代数函数域.

Thm 3.44 $\mathcal{R}(M)$ 为一元代数函数域.

若 z 为 M 上有一个极点的亚纯函数. 则 $[\mathcal{R}(M): \mathbb{C}(z)] = n$

eg. (i) 取 z 为 $\mathbb{C}$ 上标准复坐标. 则得 $\mathcal{R}(S) = \mathbb{C}(z)$

(ii) $\forall p \in \mathbb{C}/\infty$ $\dim \ell(2p) = d(2p) + 1 - g = 2$

则 $\ell(2p)$ 中有非平凡亚纯函数 f 以 p 为 q 主-极点. 重数 ≤ 2

又重数不为 1 (否则为 S) 则 $[\mathcal{R}(\mathbb{C}/\infty): \mathbb{C}(f)] = 2$

Thm 3.45 $z: M \rightarrow N$ 为紧黎曼面间非平凡全纯映射.

z 重数为 n . 则 $[\mathcal{R}(M): z^* \mathcal{R}(N)] = n$

Def 3.42 K 为域. 若群同态 $v: K^* \rightarrow \mathbb{Z}$ 满

且 $v(f+g) \geq \min\{v(f), v(g)\} \quad \forall f, g \in K^*$. 则称 v 为 K 上一个 **赋值**

Prop. (i) $v(1) = v(-1) = 0 \quad v(f) = v(-f)$

(ii) $v(f) \neq v(g)$ 时. $v(f+g) = \min\{v(f), v(g)\}$

(iii) $\mathbb{C} \subset K$ 则 $v(c) = 0 \quad \forall c \in \mathbb{C}^*$

Prop 3.4.6 M 紧. v 为 $\mathbb{R}(M)$ 上赋值. 则 $\exists! p \in M$ s.t. $v = v_p$

Thm 3.4.7 M, N 紧 $\varphi: \mathbb{R}(N) \rightarrow \mathbb{R}(M)$ 域同态.

且限制在 $\mathbb{C}$ 上为 Id . 则 $\exists!$ 全纯映射 $h: M \rightarrow N$ s.t. $\varphi = h^*$.

Pf. $\mathbb{R}(M)$ 上定义赋值 $v_p(f) = v_p(\varphi(f))$

则 $\exists! h(p) \in N$ s.t. $v_p = v_{h(p)}$ (*)

下证 $(\varphi(f))(p) = f(h(p))$ ($\forall f \in \mathbb{R}(N), p \in M$) (o)

(*) : $v_p(\varphi(f)) = v_{h(p)}(f)$ 则 $h(p)$ 为 f 的零点或极点时 (o) 成立

一般 $c \in \mathbb{C}$ 则 $f(h(p)) = c \Leftrightarrow v_{h(p)}(f-c) > 0$

$\Leftrightarrow v_p(\varphi(f-c)) = v_p(\varphi(f)-c) > 0 \Leftrightarrow (\varphi(f))(p) = c$

可证 h 是全纯的

#

Cor 3.4.8 φ 为域同构 则 h 为黎曼曲面间全纯同构

(4) 椭圆函数

Def 3.4.3 $M = \mathbb{C}/\Lambda$ 为黎曼环面. $\mathbb{R}(M)$ 中函数称为 椭圆函数

由上一节知亚纯函数 f 以 $[0]$ 为唯一极点 重数为 2

看作 $\mathbb{C}$ 上亚纯函数 则 f 以 Λ 为双极点集

在原点附近, $P = a_{-2}z^{-2} + a_{-1}z^{-1} + \dots$

$$\text{则 } 0 = \sum \operatorname{Res}_p (P dz) = a_{-1}$$

$$\text{则 } P \text{ 可化为 } P = z^{-2} + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

$\mathbb{C}$ 上的亚纯函数 $P(z) - P(1-z)$ 无极点, 双周期 $\Rightarrow$ 有界全纯

$$\text{故 } P(z) - P(1-z) = P(0) - P(1) = 0$$

$$\Rightarrow P = z^{-2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots$$

$$\text{可得 } (P')^2 = 4P^3 - 20a_2 P - 28a_4$$

Thm 3.4.9 (Weierstrass) $\mathcal{R}(\mathbb{C}/\Lambda) = \mathbb{C}(P, P')$

Pf. P' 关于 $\mathbb{C}(P)$ 的极小多项式为 $f(y) = y^2 - 4P^3 + 20a_2 P + 28a_4$

$$\text{故 } [\mathbb{C}(P)(P') : \mathbb{C}(P)] = 2$$

$$\text{由 } [\mathcal{R}(\mathbb{C}/\Lambda) : \mathbb{C}(P)] = 2 \text{ 已得}$$

#

记 $g_2 = 20a_2, g_3 = 28a_4$. 则 P 由 g_2, g_3 完全决定

$$\Lambda = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle$$

Lemma 3.4.10 (i) P' 的零点为 $\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ 且为单零点

(ii) $P(\frac{\omega_1}{2}), P(\frac{\omega_2}{2}), P(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2})$ 互不相同

$$\text{则 } 4\omega^3 - g_2\omega - g_3 = 0 \text{ 三个根不同. } \Delta_0 = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0.$$

根据椭圆函数理论, 若 $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0 \exists \mathbb{C}/\Lambda$ s.t. $P = \frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots$
($a_2 = \frac{1}{20}g_2, a_4 = \frac{1}{28}g_3$)

1.5 嵌入定理

Def 3.4.4 复流形

Def 3.4.5 全纯浸入, 全纯嵌入

M 复流形, $f_0, f_1, \dots, f_n$ 非零亚纯, $\nu = \min_{i=0, \dots, n} \nu_p(f_i)$

定义 $(f_0, f_1, \dots, f_n)(p) = [(z^{-\nu} f_0)(p), \dots, (z^{-\nu} f_n)(p)]$

Lemma 3.4.11 $f_0, \dots, f_n$ 为 M 上非零亚纯函数, $p \in M$ 附近全纯.

若 $\exists (f_i)$ s.t. $f_i(p) \neq 0, \nu_p(f_i) = 1$

则 p 为如上映射的非奇异点.

Pf . 不妨 $f_0(p) \neq 0, \nu_p(f_0) = 1$

记 $f = (f_0, f_1, \dots, f_n)$ 则 $f(p) \in U_0$

U_0 上坐标映射 $\phi_0([z_0, \dots, z_n]) = (\frac{z_1}{z_0}, \dots, \frac{z_n}{z_0})$

则 $\phi \circ f(z) = (\frac{f_1(z)}{f_0(z)}, \dots, \frac{f_n(z)}{f_0(z)})$

且 $\frac{\partial}{\partial z} \Big|_{z=0} \frac{f_1}{f_0} = \frac{1}{f_0(p)} \frac{\partial}{\partial z} f_1(p) \neq 0$ 故 p 非奇异 $\square$

Lemma 3.4.12 (i) $f: M \rightarrow N$ 全纯映射, $\phi: N \rightarrow N'$ 全纯嵌入

若 $p, q \in M, f(p) \neq f(q)$, 则 $\phi \circ f(p) \neq \phi \circ f(q)$

若 p 为 f 的非奇异点, 则 p 也为 $\phi \circ f$ 的非奇异点.

(ii) $BC \cap R(M)$ 为子向量空间. $\{g_i\}_{i=0}^n, \{h_i\}_{i=0}^n$ 为 B 的基底

则若 $(g_0, g_1, \dots, g_n)(p) \neq (g_0, g_1, \dots, g_n)(q)$ 时有

$$(h_0, h_1, \dots, h_n)(p) \neq (h_0, h_1, \dots, h_n)(q)$$

且 p 为 $(g_0, g_1, \dots, g_n)$ 非奇异点时 p 为 $(h_0, h_1, \dots, h_n)$ 的非奇异点.

Thm 3.4.23 (嵌入定理) M' 紧. 3 格 g 则 $\exists$ 连续嵌入 $\varphi: M \rightarrow \mathbb{C}P^{g+1}$

pf $\forall p \in M$ 令 $D = (g+1)p$. 则 $\dim \ell(D) = d(D) + 1 - g = g+2$

设 $\{h_0, \dots, h_{g+1}\}$ 为 $\ell(D)$ 的基 定义

$$\varphi = (h_0, \dots, h_{g+1}) : M \rightarrow \mathbb{C}P^{g+1}$$

$g=0$ 时取 $h_0=1$. h_1 为 $\ell(p)$ 中非平凡正线性函数 则 $\varphi=h_1$ 为全纯同胚

$g \geq 1$: $q \neq q' \in M$ 令 $D_1 = D - q$ $D_2 = D - q - q'$

$$\ell(D_2) \subset \ell(D_1) \subset \ell(D) \quad \dim \ell(D_2) = g = \dim \ell(D_1) - 1$$

取 $f_1 \in \ell(D_1) - \ell(D_2)$ 不妨 $q \neq p$ 则 $f_1(q)=0$ $f_1(p) \neq 0$

把 $\{1, f_1\}$ 打成 $\ell(D)$ 的基 $\{f_0=1, f_1, \dots, f_{g+1}\}$

令 $\psi = (1, f_1, \dots, f_{g+1})$ 易证 $\psi(q) \neq \psi(q')$ 则 $\varphi(p) \neq \varphi(q')$

再证 φ 非奇异 $\forall q \in M$ 令 $D_1 = D - q$ $D_2 = D - 2q$

同样 $\exists f_1 \in \ell(D_1) - \ell(D_2)$ 非平凡正线性

打乱为 $\{f_0=1, f_1, \dots, f_{g+1}\}$ 为 $\ell(D)$ 的基

令 $\psi = (1, f_1, \dots, f_{g+1})$ 则点 q 为 ψ 的非奇异点

分 $q=p$, $q \neq p$ 两种情况讨论即可.

#

(b) 平面曲线

Def 3.4.6 P 为 $\mathbb{C}^3$ 中齐次多项式. 则 $\{[z] \in \mathbb{CP}^2 \mid P(z) = 0\}$

为 $\mathbb{CP}^2$ 中良态子集. 称为 **平面曲线**

M^* $z: M \rightarrow S$ 为 n 个极值亚纯函数. 则由前讨论.

$\exists$ 亚纯 f . s.t. $R(M) = \mathbb{C}(z, f)$ 且 f 对 $\mathbb{C}(z)$ 的极小多项式为 n 次

$$\text{即 } Q(f) = f^n + r_1(z)f^{n-1} + \dots + r_n(z) = 0 \quad r_i(z) \in \mathbb{C}(z)$$

通分. 可得互素的多项式 $S_i(z)$. s.t.

$$P(z, f) = S_0(z)f^n + \dots + S_n(z) = 0$$

定义 P 的齐次化 $P_0(w, x, y) = w^n P(\frac{x}{w}, \frac{y}{w})$

$$M^* = \{[w, x, y] \in \mathbb{CP}^2 \mid P_0(w, x, y) = 0\}$$

$$M_0^* = M^* \cap U_0 = \{[1, x, y] \in \mathbb{CP}^2 \mid P(x, y) = 0\}$$

有如下性质.

(i) P_0 在 $\mathbb{CP}^2$ 上无孤立零点. 若 $P_0(w, x, y) = 0$ 则 $x \neq 0$

则 $(\frac{w}{x}, \frac{y}{x})$ 为 $R(w, y) = P_0(w, 1, y)$ 的零点.

又 R 在 $\mathbb{C}^2$ 上无孤立零点. 故得证.

(ii) $M^* - M_0^*$ 有限. 特别地 $\overline{M_0^*} = M^*$ 否则

$P_0(0, x, y)$ 在 $\mathbb{CP}^2$ 中有无穷个解. 则 $P_0(0, x, y)$ 或 $P_0(0, 1, y)$

有无穷个根. 则 $P_0(0, x, y) = 0$. 矛盾!

(iii) $A = \{z, f \text{ 的极点} \} \cup \{dz \text{ 的极点} \}$ P, A 有限.

$\forall p \neq q \in M-A$. 必有 $f(p) \neq f(q)$ 或 $z(p) \neq z(q)$

(iv) $B = Z(A) \subset S$ B 也有有限.

若 $c \in \mathbb{C} - B$ $z^{-1}(c) = \{p_1, \dots, p_n\}$

则 $P(c, f(p_i)) = P(z(p_i), f(p_i)) = P(z, f)(p_i) = 0$

又 $p_i \in M-A$ $z(p_i) = z(p_j)$ 则 $f(p_i) \neq f(p_j)$ 即

$\{f(p_1), \dots, f(p_n)\}$ 为 $P(c, y) = 0$ 的 n 个不同根

Thm 3.4.14 M 紧. 则 $\exists$ 平面曲线 M^* 和全纯映射

$\varphi: M \rightarrow \mathbb{C}P^2$ s.t. $\varphi(M) = M^*$. 且除有限集 A 外,

φ 为全纯嵌入

pf. A 如上 $\varphi: M \rightarrow \mathbb{C}P^2$ $\varphi = (1: z: f)$

$p \in M-A$ 时 $dz(p) \neq 0$ 则为 φ 的非奇异点.

故 φ 在 $M-A$ 上为全纯嵌入

因 $\varphi(M) = M^*$ $\varphi(M-A) \subset M_0^* \subset M^*$

$\varphi(M) = \varphi(\overline{M-A}) \subset \overline{\varphi(M-A)} \subset M_0^*$.

反之 $E = \{[1, x, y] \mid x \in B, P(x, y) = 0\}$ 有限 设 $[1, x_0, y_0] \in M_0^* - E$
 $\mathbb{R} \exists x_0 \in \mathbb{C} - B$

由 (iv) $z^{-1}(x_0) = \{p_1, \dots, p_n\}$ 则 $\{f(p_1), \dots, f(p_n)\}$ 为 $P(x_0, y)$ 所有根

又 $[1, x_0, y_0] \in M_0^*$ 有 $P(x_0, y_0) = 0$ 则 $y_0 = f(p_1)$

$[1, x_0, y_0] = [1, z(p_1), f(p_1)] = \varphi(p_1) \Rightarrow M_0^* - E \subset \varphi(M-A)$

$M^* = \overline{M_0^* - E} \subset \overline{\varphi(M-A)} = \varphi(M)$.

Lemma 3.4.15 $\{P_1, \dots, P_n\}$ 为紧黎曼面上 n 个点, 则 $\exists$ 亚纯 h .

s.t. (i) $i \neq j$ 时 $h(P_i) \neq h(P_j)$ (ii) h 在 P_i 附近全纯

(iii) $d h(P_i) \neq 0 \quad \forall i$

Pf. $\forall q \in M - \{P_1, \dots, P_n\} \quad \exists D_1 = (2g+2n)q - 2(P_1 + \dots + P_n) + 3P_i$
 $D_2 = (2g+2n)q - 2(P_1 + \dots + P_n) + 2P_i$

$\ell(D_2) < \ell(D_1) \quad \dim \ell(D_1) = 1 + \dim \ell(D_2) = g+4$

取 $f_i \in \ell(D_1) - \ell(D_2)$. 则 f_i 以 P_i 为单极点, $P_j (j \neq i)$ 为零点, 重数 $= 2$

令 $h_i = \frac{f_i}{1+f_i}$. 则 $h_i(P_j) = \delta_{ij}$ $dh_i(P_i) \neq 0$ $dh_i(P_j) = 0 (i \neq j)$

则取不同的 $C_i \in \mathbb{C}^*$, $h = \sum C_i h_i \in \mathbb{C}^*$ #

Thm 3.4.16 M 为紧黎曼面, 则 $\exists$ 全纯嵌入 $\varphi: M \rightarrow \mathbb{C}P^S$

Pf. 取 Thm 3.4.14 中的 φ 与 A . 令 $A_0 = \varphi^{-1}(\varphi(A))$. A_0 有有限

点 $A_0 = \{P_0, \dots, P_n\}$ 再取 Lemma 3.4.15 中的 h

定义 $\{ : M \rightarrow \mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^1$ 则只需证 $\{$ 为全纯嵌入
 $P \mapsto (\varphi(P), h(P))$

$\{$ 为单的. 若 $P \neq q \in M - A_0$. 则 $\varphi(P) \neq \varphi(q)$

$P \in A_0, q \in M - A_0$ 则 $\varphi(P) \neq \varphi(q)$

$P, q \in A_0$ 则 $h(P) \neq h(q)$

$\{$ 非退化. 若 $P \in M - A_0$ 则 P 为 φ 的非奇点.

$P \in A_0$ 则由 (iii) 条件为 h 的非奇点.

#

(7) Riemann-Hurwitz 定理

$f: M \rightarrow N$ 为黎曼面间非常值全纯映射 R 为分歧覆盖

$\forall p \in M$ 取局部坐标, f 局部表示为 $f(z) = z^{v_p}$. v_p 为 f 在 p 的重数

$b_p(f) = v_p - 1$ 称为 f 在 p 的 分歧数

$B_f = \sum_p b_p(f)$ 为总分歧数

Thm 3.4.17 (Riemann-Hurwitz) f 如上, 则

$$B_f = 2(g_M - 1) - 2n(g_N - 1) \quad n \text{ 为 } f \text{ 的重数}$$

$P \in f^{-1}(A)$ 若 $A = S$ 不妨设 A 不为分歧值. 考虑亚纯微分 $\omega = dz$

则 $f^*\omega = df$ 为 M 上亚纯微分

$P \in f^{-1}(A)$ 时, P 为 $f^*\omega$ 的极点, 重数为 2

$f(P) \in \mathbb{C}$ 时且 P 不为分歧点, 则 $f^*\omega$ 在 P 全纯, P 为零点

为 ... 重数为 $b_p(f)$

$$\Rightarrow d(f^*\omega) = \sum_p b_p(f) P - \sum_{P \in f^{-1}(A)} 2P$$

$$\text{则 } 2g_M - 2 = \sum_p b_p(f) - 2n = B_f - 2n$$

若 $g_N \geq 1$ 取非常值全纯微分 ω . A 为 ω 零点集 B 为 ω 极点集

$P \in B - f^{-1}(A)$ 时, P 为 $f^*\omega$ 极点, 重数 $b_p(f)$

$P \in f^{-1}(A) - B$ 时, P 为 $f^*\omega$ 的 $n_{f,p}$ 重零点

$P \in B \cap f^{-1}(A)$ 时, P 为 $f^*\omega$ 的 $b_p(f) + [b_p(f) + 1]n_{f,p}$ 重零点

$$2g_M - 2 = d(f^*\omega) = \sum_{P \in B - f^{-1}(A)} b_p(f) + \sum_{P \in f^{-1}(A) - B} n_{f,p} + \sum_{P \in B \cap f^{-1}(A)} [b_p(f) + [b_p(f) + 1]n_{f,p}]$$

$$= \sum_{P \in B} b_p(f) + \sum_{P \in f^{-1}(A)} [b_p(f) + 1]n_{f,p} = B_f + \sum_{q \in A} n_q \sum_{P \in f^{-1}(q)} [b_p(f) + 1]$$

$$= B_f + n \sum_{q \in A} n_q = B_f + n(2g_N - 2)$$

47

#

Cor 3.4.18 $f: M \rightarrow N$ 为紧黎曼面间非常值全纯映射时, 则 $g_M \geq g_N$

Cor 3.4.19 $f: M \rightarrow S$ 为紧黎曼面上非常值亚纯函数
若 f 无分枝点, 则 f 为全纯同构

代数曲线 $\Leftrightarrow$ 黎曼曲面. 故可计算代数曲线的亏格

e.g. $p(z_0, z_1, z_2) = z_0^n + z_1^n + z_2^n$

定义 $f: M = \{[z_0, z_1, z_2] \in \mathbb{CP}^2 \mid p(z) = 0\} \rightarrow \mathbb{CP}^1$
 $[z_0, z_1, z_2] \mapsto [z_0, z_1]$

$f^{-1}([0, 1]) = \{[0, 1, z_2] \mid z_2^n = -1\}$ 则 f 的重数为 n

f 有 n 个分枝点, 每个为 n 重. 则 $R_f = n(n-1)$

$$g_M = \frac{R_f}{2} + 1 - n = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

(8) 典范映射及应用

Def 3.4.7 M 为亏格大于 1 的紧黎曼面. 若 M 上存在重数为 2 的亚纯函数, 则称 M 为 双有理圆型的

典范映射

ω 的基 $\{\omega_1, \dots, \omega_g\}$ 定义

$$\varphi: M \rightarrow \mathbb{CP}^{g-1}$$

$$\omega_i = f_i(z)dz$$

$$p_i \mapsto [\omega_1(p), \dots, \omega_g(p)] = [f_1(p), \dots, f_g(p)]$$

Prop 3.4.20 若 φ 不为单射, 则 M 为超椭圆型

Pf. $p \neq q \in M, \varphi(p) = \varphi(q) \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ s.t. } f_i(p) = \lambda g_i(q)$

任取 $w \in \mathcal{H}(M) \mid w = \sum C_i w_i$

$$w(p) = 0 \Leftrightarrow \sum C_i f_i(p) = 0 \Leftrightarrow \sum C_i g_i(q) = 0 \Leftrightarrow w(q) = 0$$

$$i(p+q) = \{(w) - p - q \geq 0\} = i(p) \quad \dim i(p) = g-1$$

$$\text{R} \mid \dim t(p+q) = \dim i(p+q) + d(p+q) + 1 - g = 2$$

#

Cor 3.4.21 亏格为 2 的紧黎曼面是超椭圆型的

Prop 3.4.22 若 M 非超椭圆型, 则 φ 为全纯嵌入

Pf. 即 $i \nsubseteq \varphi$ 非退化 $\forall p \in M, \dim i(p) = g, \dim i(\varphi(p)) = g-1$

$$\dim i(\varphi(p)) \leq \dim i(p) \leq \dim i(\varphi(p)) + 1$$

$$\dim t(p) = \dim i(p) + 3 - g \neq 2 \quad \text{R} \mid \dim i(\varphi(p)) = g-2$$

M 上存在以 p 为单零点的全体微分 则取 $\mathcal{H}$ 的基

s.t. $w_i(p) \neq 0, w_i$ 以 p 为单零点 由 (5) 中引理即 $i \nsubseteq \varphi$

#

Cor 3.4.23 亏格为 3 的非超椭圆型 可全纯嵌入到 $\mathbb{CP}^2$

Thm 3.4.24 设 C 为 g 的超椭圆曲线 π 表为次数为 $2g+2$ 的平面曲线

pf. 设 $\pi: M \rightarrow \mathbb{CP}^1$ 重数为 2.

$$\text{则分支数 } B_\pi = (2g+2) - 2(0+2) = 2g+2$$

χ 重数为 2. 则分支点必为 2 重. 故有 $2g+2$ 个分支点 $P_1, \dots, P_{2g+2}$

$q_1 \neq q_2$ 为极点. $\pi(P_i) = a_i$

定义 $j: M \rightarrow M$. 若 $P = P_i$, $\pi(j(P)) = P$
 若 $P \neq P_i$, $\exists! P' \neq P$ s.t. $\pi(P') = \pi(P)$ 令 $j(P) = P'$

$$\text{则 } j \text{ 全纯. } j^2 = 1, \quad j^* \pi = \pi \circ j = \pi$$

$j^* \circ j^* = 1$ 则 j^* 在 H 上特征值为 ± 1 若为 1. 则 $j^* \omega = \omega$
 ω 为 $\mathbb{CP}^1$ 上全纯微分 $\omega=0$

$$\text{故 } j^* \omega = -\omega \quad (\omega \in H)$$

$$\text{令 } D = (g+1)(q_1+q_2) \quad \text{则 } \dim l(D) = d(D) + 1 - g = g+3$$

j^* 视作 $l(D)$ 上线性变换 按特征值分解为 $l(D) = l^+(D) \oplus l^-(D)$

$$l^+(D) = \text{span}\{1, x, \dots, x^{g+1}\} \quad \dim l^+(D) = g+2, \quad \dim l^-(D) = 1$$

$$\text{故 } \exists y \in l(D) \quad \text{s.t. } j^* y = -y \quad \text{则 } y(P_i) = 0$$

$$y \in l(D) \Rightarrow \text{极点} \leq 2g+2 \Rightarrow \deg y \leq 2g+2. \quad \text{故 } (y) = P_1 + \dots + P_{2g+2} - (g+1)(q_1+q_2)$$

$$\text{令 } g = (x-a_1) \dots (x-a_{g+2}). \quad \text{则 } (y^2) = (g)$$

$$\text{故 } \exists c \in \mathbb{C}^* \quad \text{s.t. } y^2 = cg. \quad \text{定义 } f: M \rightarrow \mathbb{CP}^2 \quad f = (1: x: y)$$

则 $f(M)$ 为 $P(x, y) = y^2 - c g(x)$ 定义的平面曲线 $\#$

Prop 3.4.25. M 是树有图. x, y 如上. 则

$\omega_1 = \frac{dx}{y}, \omega_2 = \frac{x dx}{y}, \dots, \omega_g = \frac{x^{g-1} dx}{y}$ 为 H 的一组基

Cor 3.4.26 M 是树有图 $f: M \rightarrow S$ 亚纯. 若 f 的重数不超过 g

则为偶数

§3.5 Abel-Jacobi 定理

Prop 3.5.1 ω 为 M 上闭 1-形式. 若任意闭曲线 γ .

有 $\int_{\gamma} \omega = 0$ 则 ω 恰当

Pf. 固定 $p_0 \in M$ $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ 由积分定义 $df = \omega$ #
 $p \mapsto \int_{\gamma_{p_0, p}} \omega$

Prop 3.5.2 γ 为紧黎曼面上闭曲线. 则 $\exists!$ 同余闭形式

ω_{γ} , s.t. $\forall$ 闭 1-形式 η . 有 $\int_{\gamma} \eta = \int_M \omega_{\gamma} \wedge \eta$

Pf. 取 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ s.t.

对 $j=1, \dots, n$ $\gamma([t_{j-1}, t_j])$ 包含于 M 的一个坐标图 D^j 中
 对任意坐标函数 z_j

进一步可取 $0 < r < 1$ s.t. $\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subset D_r^j = \{p \in D^j \mid |z_j(p)| < r\}$

考虑 D_r^j 中亚纯函数 $\frac{z - z(\gamma(t_j))}{z - z(\gamma(t_{j-1}))}$ 单零点 $\gamma(t_j)$
 单极点 $\gamma(t_{j-1})$

取 $r' > r$ $\psi_j \in C^{\infty}(M)$ s.t. $\begin{cases} \psi_j(p) = 1 & \forall p \in D_r^j \\ \psi_j(p) = 0 & \forall p \in M - D_{r'}^j \end{cases}$

定义 $f_j: M - \gamma(t_{j-1}) \rightarrow \mathbb{C}$ $\psi_j \log \frac{z - z(\gamma(t_j))}{z - z(\gamma(t_{j-1}))}$ $p \in M - D_r^j$
 $p \mapsto \begin{cases} e^{\psi_j \log \frac{z - z(\gamma(t_j))}{z - z(\gamma(t_{j-1}))}} & p \in M - D_r^j \\ \frac{z - z(\gamma(t_j))}{z - z(\gamma(t_{j-1}))} & p \in D_r^j \end{cases}$

令 $f = f_1 \cdot f_n$ 则 f 在 M 上定义

令 $\omega' = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{df}{f}$ 则 ω' 为 M 上光滑 1-形式

设 η 为闭 1-形式 取以 $\sigma(t_j)$ 为中心的坐标圆盘 B^j
 B^j 内 $\eta = dg_j$

$$\begin{aligned} \int_M \omega' \wedge \eta &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{M - \bigcup_j B_\epsilon^j} \omega' \wedge \eta \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{M - \bigcup_j B_\epsilon^j} \frac{df_j}{f_j} \wedge \eta \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{D^j - B_\epsilon^{j-1} - B_\epsilon^j} \frac{df_j}{f_j} \wedge dg_j \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{D^j - B_\epsilon^{j-1} - B_\epsilon^j} d\left(g_j \frac{df_j}{f_j}\right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left(\int_{B_\epsilon^{j-1}} + \int_{B_\epsilon^j} \right) g_j \frac{df_j}{f_j} \\ &= \sum_{j=1}^n g_j (\sigma(t_j) - g_j(\sigma(t_{j-1}))) = \int_G \eta. \end{aligned}$$

由 Hodge 分解, $\exists$ 闭 1-形式 ω_G , s.t. $\omega' = \omega_G + dg$

则 ω_G 为闭 1-形式且唯一.

称 ω_G 为 G 的对偶形式

Prop 3.5.3 G 闭曲线 f 为 G 附近定义的非零光滑复函数

$$\text{则 } \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_G \frac{df}{f} \in \mathbb{Z}$$

(可由前一半题方法证明)

设 G, γ 的对偶形式为 ω_G, ω_γ . 则

$$\int_M \omega_G \wedge \omega_\gamma = \int_G \omega_\gamma \in \mathbb{Z} \text{ 称为 } G, \gamma \text{ 的 } \boxed{\text{相交数}}$$

可证: 存在 g 的闭曲面上, 存在经过给定点的 $2g$ 条闭曲线 $G_1, \dots, G_{2g}$

且 G_i 与 G_{g+i} 相交数为 1, 其它相交数为 0

$G_1, \dots, G_{2g}$ 交于一个公共点

Thm 3.5.4 η 为 M 上有单极点 $\{P_1, \dots, P_k\}$ 的亚纯微分

ω 为 M 上全纯微分 取 $G_1, \dots, G_{2g}$ 如上.

$$\text{记 } \pi_i = \int_{G_i} \omega, \quad N_i = \int_{G_i} \eta$$

$$\text{则: } \sum_{i=1}^g (\pi_i \mu_{g+i} - \pi_{g+i} N_i) = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}_{P_j}(\eta) \int_{P_0}^{P_j} \omega$$

其中 P_0 为 $M_0 = M - \{G_1, \dots, G_{2g}\}$ 中一点

Rmk ω, η 任意闭 1-形式. 则

$$\int_M \omega \wedge \eta = \sum_{i=1}^g \left(\int_{G_i} \omega \int_{G_{g+i}} \eta - \int_{G_{g+i}} \omega \int_{G_i} \eta \right)$$

Prop 3.5.5 $\{G_i\}$ 如上. 若全纯微分 ω s.t. $\int_{G_i} \omega = 0 \ (\forall i)$. 则 $\omega = 0$

Pf. 由条件亦有 $\int_{G_i} \bar{\omega} = 0$

$$\text{则 } \|\omega\|^2 = \int_M \omega \wedge \ast \bar{\omega} = \int_M \omega \wedge \bar{\omega} \stackrel{\text{双线性关系}}{=} 0$$

$$\text{则 } \omega = 0$$

#

Cor 3.5.6 $\exists \mathcal{H}$ 的基 $\{\omega_i\}_{i=1}^g$ s.t. $\int_{G_i} \omega_j = \delta_{ij}$.

Pf. 任取一组基 $\{\omega_i\}$. 只要证 $(\int_{G_i} \omega_j)_{g \times g}$ 非退化.

$$\text{若 } \sum_{j=1}^g c_j \int_{G_i} \omega_j = 0 \quad i=1, \dots, g$$

$$\text{则 } \int_{G_i} \sum_{j=1}^g c_j \omega_j = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^g c_j \omega_j = 0 \Rightarrow c_j = 0 \quad \#$$

符合条件的基称为 **正则基** 记 $Z = (\int_{G_{g+i}} \omega_j)_{g \times g}$

Prop 3.5.7 Z 对称, 且 $\operatorname{Re} Z$ 正实对称.

Pf. 由双线性关系.

$$\begin{aligned} 0 = \int_M \omega_i \wedge \omega_j &= \sum_{k=1}^g [\delta_{ki} \int_{G_{g+k}} \omega_j - \delta_{kj} \int_{G_{g+k}} \omega_i] \\ &= \int_{G_{g+i}} \omega_j - \int_{G_{g+j}} \omega_i \quad \text{故 } Z \text{ 对称} \end{aligned}$$

$$\text{同理 } \int_M \omega_i \wedge \bar{\omega}_j = -\sqrt{-1} \operatorname{Im}(\int_{G_{g+i}} \omega_j)$$

$$\forall c_i \in \mathbb{R} \quad \text{令 } \omega = \sum_{i=1}^g c_i \omega_i \quad \text{则}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\omega\|^2 &= \sqrt{-1} \int_M \omega \wedge \bar{\omega} \\ &= \sqrt{-1} \sum_{j,k=1}^g c_j c_k \int_M \omega_j \wedge \bar{\omega}_k \\ &= \sum_{j,k=1}^g \operatorname{Im}(\int_{G_{g+j}} \omega_k) c_j c_k \quad \text{故 } \operatorname{Im} Z \text{ 正定} \end{aligned}$$

#

Prop 3.5.8. $\{G_i\}$ 如上. 对(3.5.7)式 ω_{G_i} . 则

(1) $\{\omega_{G_i}\}$ 为 H^1 的一组基

(2) 若 G 为闭曲线. 则

$$\omega_G = \sum_{i=1}^g n_{g+i} \omega_{G_i} - n_i \omega_{G_{g+i}} \quad n_i \text{ 为 } G, G_i \text{ 相交数}$$

pf. (i) 若 $\sum_{i=1}^{2g} C_i \omega_{G_i} = 0$. 则 $0 = \int_M (\sum_{i=1}^{2g} C_i \omega_{G_i} \wedge \omega_{G_j})$

$1 \leq j \leq g$. 则 $0 = -C_{g+j}$ $g+1 \leq j \leq 2g$ 时, $0 = C_{j-g}$

(ii) 由(同和开)式的唯一性. 2.3.12 如题定义 ω_G

$$\text{s.t. } \int_M \omega_G \wedge \omega_{G_{i_0}} = \int_G \omega_{G_{i_0}} \quad (\forall i_0 = 1, \dots, 2g)$$

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \int_M \sum_{i=1}^g n_{g+i} \omega_{G_i} \wedge \omega_{G_{i_0}} - \sum_{i=1}^g n_i \omega_{G_{g+i}} \wedge \omega_{G_{i_0}} \\ &= \begin{cases} n_{g+i_0} & i_0 = 1, \dots, g \\ -n_{i_0-g} & i_0 = g+1, \dots, 2g \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{RHS} = \int_G \omega_{G_{i_0}} = n_{i_0}$$

#

任意闭曲线 G 定义泛函 $\phi(G): H^1 \rightarrow \mathbb{C}$
 $\omega \mapsto \int_G \omega$

所有闭曲线生成的泛函群体记作 $\text{Im } \phi$

则记商群 $H^1 / \text{Im } \phi$ 为 M 的 Jacobian 簇 (记 $J(M)$)

固定 $p_0 \in M$. ω_i 为 $\mathcal{H}$ 的一组典则基

对 $p \in M$ 选择一条 $p_0 \rightarrow p$ 的曲线

令 $\mu(p) \in \mathcal{H}^*$ 为 $\mu(p)(\omega) = \int_{p_0}^p \omega$

$\mu(p)$ 在 $J(M)$ 中的像与曲线选取无关. 故定义了

$\mu: M \rightarrow J(M)$. 称为 Abel-Jacobi 映射.

若 $D = \sum \eta_k P_k$ 为一个因子. 定义

$$\mu(D) = \sum \eta_k \mu(P_k) \in J(M)$$

Thm 3.5.9 M 为 g 亏格 g 的黎曼面. 则 D 为主要因子 $\Leftrightarrow d(D)=0$
 $\mu(D)=0 \in J(M)$

Lemma 3.5.10 $p \neq q \in M$. 则 $\exists!$ 非平凡的 ω_{pq} . s.t.

(i) ω_{pq} 仅有 p, q 两个极点且为单极点. p 处留数为 1 q 处留数为 -1

(ii) $\int_{\gamma_i} \omega_{pq} = 0$ ($\forall i=1, \dots, g$)

Pf. $\ell(-p-q) = \phi$ 则 $0 = \dim \mathcal{L}(-p-q) + d(-p-q) + 1 - g \Rightarrow \dim \mathcal{L}(-p-q) = g+1$

故 $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}(-p-q)$ $\exists$ 非平凡的 ω_{pq} 以 p, q 为单极点.

归一化不为 p 处留数为 1 则 q 处留数为 -1. 易证 (ii) #.

Lemma 3.5.11 ω_i 为 $\mathcal{H}$ 的典则基. 则 ω_{pq} 还是 $\int_{\gamma_{g+1}} \omega_{pq} = 2\pi\sqrt{-1} \int_p^q \omega_i$

Pf. $\sum_{i=1}^g (\int_{\gamma_i} \omega_i \int_{\gamma_{g+1}} \omega_{pq} - 0) = 2\pi\sqrt{-1} (\int_{p_0}^p \omega_i - \int_{p_0}^q \omega_i)$

#

回到 Abel (及上节的证明)

$d(D)=0$. 则把 D 写作 $D = \sum_{j=1}^k (P_j - q_j)$ $P_i \neq q_j$

若 $D=(f)$. 则 $\int_{G_i} \frac{df}{f} = 2\pi\sqrt{-1} \alpha_i$ $\alpha_i \in \mathbb{Z}$

且 $\frac{df}{f} - \sum_{j=1}^k \omega_{P_j q_j} = \sum_{i=1}^g c_i \omega_i$ 为全微分

则 $c_i = \int_{G_i} \sum_{j=1}^g c_j \omega_j = \int_{G_i} \frac{df}{f} = 2\pi\sqrt{-1} \alpha_i$

另令 $\int_{G_{g+i}} \frac{df}{f} - \sum_{j=1}^k \int_{G_{g+i}} \omega_{P_j q_j} = \sum_{j=1}^g 2\pi\sqrt{-1} \alpha_j \int_{G_{g+i}} \omega_j$

$\Rightarrow \alpha_{g+i} - \sum_{j=1}^k \int_{G_j}^{P_j} \omega_i = \sum_{j=1}^g \alpha_j \int_{G_{g+j}} \omega_i$

则 $\mu(D)(\omega_i) = \alpha_{g+i} - \sum_{j=1}^g \alpha_j \int_{G_{g+j}} \omega_i$

$= \sum_{j=1}^g (\alpha_{g+j} \int_{G_j} - \alpha_j \int_{G_{g+j}}) \omega_i$

故 $\mu(D)(\omega) = \sum_{j=1}^g (\alpha_{g+j} \int_{G_j} - \alpha_j \int_{G_{g+j}}) \omega$

则 $\mu(D) \in \text{Im } \phi$. 且 $\mu(D)=0 \in J(M)$

反之, 若 $\mu(D)=0 \in J(M)$ 则 $\exists \beta_i \in \mathbb{Z}$ s.t. $\mu(D)(\omega) = \sum_{j=1}^{2g} \beta_j \int_{G_j} \omega$

令 $\gamma = \sum_{j=1}^k \omega_{P_j q_j} - 2\pi\sqrt{-1} \sum_{j=1}^g \beta_{g+j} \omega_j$

则 $\int_{G_i} \gamma = -2\pi\sqrt{-1} \beta_{g+i}$

同理可计算 $\int_{\gamma_{j+1}} \gamma = 2\pi\sqrt{-1}\beta_j$

则任一不经过 D 的闭曲线 γ . $\int_{\gamma} \gamma \in 2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z}$.

故定义 $f: M \rightarrow S$ $P \mapsto e^{\int_{P_0}^P \gamma}$ 则 $f(D) = D$ #

称 $\text{Ker } d/P$ 为 M 的 Picard 群 记为 $\text{Pic}_0(M)$

故有单同构 $j: \text{Pic}_0(M) \rightarrow J(M)$ $j([D]) = \mu(D)$

Lemma 3.5.12 M 足够紧则是 $\mathbb{C}$ (u, z) 为局部坐标系

则 $\exists U$ 中 g 个不同的点 $P_1, \dots, P_g$ 及 $\mathcal{H}$ 的基 $\varphi_1, \dots, \varphi_g$

s.t. $(f_i(P_j))_{g \times g}$ 非退化 $\varphi_i = f_i dz$ 为局部表示

令 $\Psi: M^g \rightarrow \text{Pic}_0(M)$ $(x_1, \dots, x_g) \mapsto \sum_{i=1}^g (x_i - P_i) \bmod \mathcal{P}$

记 $j \circ \Psi = J$

Thm 3.5.13 $\Psi: M^g \rightarrow \text{Pic}_0(M)$ 为满射 j 为同构

故 $J: M^g \rightarrow J(M)$ 也为满射

Thm 3.5.14 $g=1$ 时 $\mu: M \rightarrow J(M)$ 均为全纯同构
 $J: M \rightarrow J(M)$

第四章 曲面与上同调

§4.1 全纯线丛的定义

$$T_p(M) = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}|_p, \frac{\partial}{\partial y}|_p \right\}$$

$$\text{复化 } T_p(M) \otimes \mathbb{C} = T_{ph}M \oplus \overline{T_{ph}M}$$

$$T_{ph}M = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial z}|_p \right\}$$

$$\overline{T_{ph}M} = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{z}}|_p \right\}$$

$$T_h M = \bigcup_{p \in M} T_{ph}M$$

U 为局部坐标邻域 定义

$$\psi: \bigcup_{p \in U} T_{ph}M \rightarrow U \times \mathbb{C}$$

$$a \frac{\partial}{\partial z}|_p = x_p \mapsto (p, a)$$

定义 $T_h M$ 的拓扑由 $\{ \bigcup_{p \in U} T_{ph}M \mid U \subset M \}$ 生成

此时 ψ 为同胚 且 $\pi: T_h M \rightarrow M$ 为连续开映射
 $x_p \mapsto p$

$T_h M$ 为 2 维复流形

Def 4.1.1 M 为黎曼曲面, L 为 2 维复流形 $\pi: L \rightarrow M$ 全纯满射

若 $\exists M$ 的开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 及双全纯映射 $\psi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}$

s.t. (1) $\psi_\alpha(\pi^{-1}(p)) = \{p\} \times \mathbb{C} \quad \forall p \in U_\alpha$

(2) $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 时, $\exists$ 全纯函数 $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathbb{C}^*$

s.t. $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(p, a) = (p, g_{\alpha\beta}(p) \cdot a) \quad \forall p \in U_\alpha \cap U_\beta, a \in \mathbb{C}$

则称 L 为 M 上 全纯线丛 π 为 丛投影

$g_{\alpha\beta}$ 为 过渡函数, $\pi^{-1}(p)$ 为 纤维

U_α 为 局部平凡化

连接函数的性质:

$$(i) g_{\alpha\alpha} = 1 \quad (ii) g_{\beta\alpha} \cdot g_{\alpha\gamma} \cdot g_{\gamma\beta} = 1 \quad (*)$$

若一族函数 $\{g_{\alpha\beta}\}$ 符合 $(*)$ 则定义

$$L = \bigsqcup_{\alpha} (U_{\alpha} \times \mathbb{C}) / \sim$$

$$(p, a) \in U_{\alpha} \times \mathbb{C}, (q, b) \in U_{\beta} \times \mathbb{C} \quad (p, a) \sim (q, b) \Leftrightarrow p = q, b = g_{\beta\alpha}^{(p)} a$$

$$\pi: L \rightarrow M \\ (p, a) \mapsto p$$

则 L 为 M 上主丛 (线丛).

e.g. (i) 平凡线丛 $L = M \times \mathbb{C}$ π 为第一分量投影 $\psi_{\alpha} = \text{Id}$
 $g_{\alpha\beta} = 1$

(ii) 复平面上的全纯线丛 $T_{\mathbb{P}^1}^* M \otimes \mathbb{C} = T_{\mathbb{P}^1}^* M \oplus \overline{T_{\mathbb{P}^1}^* M}$ $T_{\mathbb{P}^1}^* M = \bigcup_{p \in M} T_{\mathbb{P}^1}^* M$

$$\pi: T_{\mathbb{P}^1}^* M \rightarrow M \\ \omega_p \mapsto p$$

$$\psi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C} \\ \text{ad } z|_p = \omega_p \mapsto (p, a)$$

$$\psi_{\beta} \circ \psi_{\alpha}^{-1}(p, a) = (p, \left(\frac{\partial}{\partial z_{\beta}}|_p z_{\alpha}\right) a) \Rightarrow h_{\beta\alpha}(p) = \frac{\partial}{\partial z_{\beta}}|_p z_{\alpha}$$

(iii) $\mathbb{CP}^1$ 上全纯线丛

$$E = \{([z], \omega) \in \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{C}^* \mid \exists \lambda \in \mathbb{C} \text{ s.t. } \omega = \lambda z\}$$

$$\pi: E \rightarrow \mathbb{CP}^1 \\ ([z], \omega) \mapsto [z]$$

$$\mathbb{CP}^1 = U_0 \cup U_1 \quad \psi_0 \circ \psi_0^{-1}([z], a) = ([z], \frac{z_1}{z_0} a)$$

$$\psi_0: \pi^{-1}(U_0) \rightarrow U_0 \times \mathbb{C}$$

$$\psi_1: \pi^{-1}(U_1) \rightarrow U_1 \times \mathbb{C}$$

$$([z], \omega_0, \omega_1) \mapsto ([z], \omega_0)$$

$$([z], \omega_0, \omega_1) \mapsto ([z], \omega_1)$$

Def 4.1.2 L 为 M 上全纯线丛

若连续映射 $s: M \rightarrow L$ s.t. $\pi \circ s = \text{Id}$. 则称 s 为一个 **截面**

全纯截面全体记为 $\Gamma(L)$ 为复向量空间

e.g. (i) 平凡线丛的截面

$s: M \rightarrow M \times \mathbb{C}$ 为截面

$\Leftrightarrow s = (\text{Id}, f)$ 符号会对应条件

(ii) 全纯 (余) 切丛的截面为 (余) 切向量场

平凡截面 $\Leftrightarrow$ 函数

线丛局部平凡

$s \mapsto$ 局部函数

U_α 为 M 开覆盖 ψ_α 局部平凡化. 则

$$\psi_\alpha(s(p)) = (p, s_\alpha(p))$$

$$\text{则 } s_\beta(p) = g_{\alpha\beta}(p) s_\alpha(p) \quad \forall p \in U_\alpha \cap U_\beta \quad (**)$$

Def 4.1.3 一组亚纯函数 $s_\alpha: U_\alpha \rightarrow S$ 若满足 (**) 则称为 L 上一个 **亚纯截面** 记为 $S = \{s_\alpha\}$

亚纯截面全体用 $\mathcal{R}(L)$ 表示

Rmk. 亚纯微分 $\Leftrightarrow$ 全纯余切丛的亚纯截面

Def 4.1.4 L, L_2 为 M, N 上主丛线丛 π, π_2 为投影

若主丛映射对 $(F, f): (L, M) \rightarrow (L_2, N)$ s.t. $\pi_2 \circ F = f \circ \pi$.

且 $F|_{\pi^{-1}(p)}$ 上为线性同构. 则称 (F, f) 为 丛同构.

Def 4.1.5 丛同构

e.g. 拉回丛

$f: M \rightarrow N$ 为主丛映射 L 为 N 上丛线丛.

$f^*L = \{(m, l) \in M \times L \mid f(m) = \pi(l)\}$ 是一个丛:

$$\pi_f: f^*L \rightarrow M$$

U 为 N 中开集.

$$(m, l) \mapsto m$$

$$\text{则 } \psi_f: \pi_f^{-1}(f^{-1}(U)) \rightarrow f^{-1}(U) \times \mathbb{R}^n$$

$$(m, l) \mapsto (m, \pi_L(\psi(l)))$$

π_L = 分量投影

$$\psi_{\beta_f} \circ \psi_{\alpha_f}^{-1}(m, a) = (m, g_{\beta\alpha}(f(m)) a)$$

$$F: f^*L \rightarrow L$$

则 (F, f) 为 $f^*L \rightarrow L$ 的丛同构.

$$(m, l) \mapsto l$$

L, L_2 为 M 上两个可积丛线丛 $F: L_1 \rightarrow L_2$ 为丛同构

通过加总即可假设 L, L_2 以 $\{U_\alpha\}$ 同时为平凡化开覆盖.

$\varphi_\alpha, \psi_\alpha$ 为 L_1, L_2 的平凡化 $g_{\beta\alpha}, h_{\beta\alpha}$ 为 L_1, L_2 的连接函数为

$$T_\alpha = \varphi_\alpha \circ T \circ \varphi_\alpha^{-1} : U_\alpha \times \mathbb{C} \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}$$

$$(p, u) \mapsto (p, f_\alpha(p) \cdot u)$$

$$f_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^* \text{ 全纯. 则 } g_{\beta\alpha} = f_\beta^{-1} h_{\beta\alpha} f_\alpha \quad (\Delta)$$

L_1, L_2 同构 $\Leftrightarrow \exists$ 满足 (Δ) 的一族 $\{f_\alpha\}$

Cor 4.1.1 L 同构于平凡丛 $\Leftrightarrow \exists$ 平凡化开覆盖 U_α 及全纯 $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^*$
s.t. $g_{\beta\alpha} = f_\beta^{-1} f_\alpha$

M 上全纯丛在同构下等价类全体记为 $\mathcal{L}(M)$

若 L 由连接函数 $g_{\beta\alpha}$ 决定. 则 $h_{\beta\alpha} = (g_{\beta\alpha})^{-1}$ 仍满足

连接函数条件. 决定线丛记为 $-L$ 或 L^* . 称为 **对偶丛**

L_1, L_2 两个线丛. 连接函数 $g_{\beta\alpha}^1$ 和 $g_{\beta\alpha}^2$ 则 $g_{\beta\alpha} = g_{\beta\alpha}^1 g_{\beta\alpha}^2$ 也符

合连接函数条件. 决定线丛称为 L_1, L_2 的张量积.

记为 $L_1 + L_2$ 或 $L_1 \otimes L_2$

在上述运算下 $\mathcal{L}(M)$ 成为交换群 称为 **线丛类群**

§4.2 因子与线丛

$D = \sum n_i p_i$ 取 M 的局部坐标邻域覆盖 $\{U_\alpha\}$

U_α 内取亚纯函数 f_α s.t. 在 U_α 内 $(f_\alpha) = D \cap U_\alpha$

若 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 则 $f_\beta = \frac{f_\beta}{f_\alpha}$ 在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上既无极点, 也无零点,

$\{f_\beta\}$ 决定 M 上全纯线丛, 记为 $\lambda(D)$

Prop (i) $\lambda(D)$ 同构于平凡丛 $\Leftrightarrow D$ 为主要因子

若 $D = (f)$, 则 $f_\alpha = f|_{U_\alpha}$, $f_\beta = 1$ $\lambda(D)$ 平凡

反之 则 $\exists$ 全纯簇 $\{\phi_\alpha\}: U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^*$ s.t. $f_\beta = \phi_\beta^{-1} \phi_\alpha$

故 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上 $f_\beta \phi_\beta = f_\alpha \phi_\alpha$

故 $\{f_\alpha \phi_\alpha\}$ 定义了 M 上整体亚纯函数 f

且 U_α 上 $(f_\alpha \phi_\alpha) = (f_\alpha) + (\phi_\alpha) = D \cap U_\alpha$ 故 $D = (f)$

(ii) $\lambda(-D) = -\lambda(D)$, $\lambda(D_1 + D_2) = \lambda(D_1) + \lambda(D_2)$

Lemma 4.2.1 $\ell(D) \subseteq \Gamma_h(\lambda(D))$

Pf. $\forall s \in \Gamma_h(\lambda(D))$ 局部表示 $\{s_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}\}$ $s_\beta = f_\beta s_\alpha = \frac{f_\beta}{f_\alpha} s_\alpha$

故 $\frac{s_\alpha}{f_\alpha}$ 决定整体亚纯函数 $i(s)$

$(i(s) + D) \cap U_\alpha = (s_\alpha) - (f_\alpha) + D \cap U_\alpha = (s_\alpha) \geq 0 \Rightarrow i(s) \in \ell(D)$

$\forall f \in \ell(D)$ 令 $s_\alpha = f \cdot f_\alpha$ $(s_\alpha) = [(f) + D] \cap U_\alpha \geq 0$

故 $\{s_\alpha\}$ 定义了 $j(s) \in \Gamma_h(\lambda(D))$

#

S 为 L 的亚纯截面. 局部表示为 $\{S_\alpha\}$

$U_\alpha \perp S_\alpha$ (诱导因子 (S_α)) 则 $(S_\beta) = (g_{\beta\alpha} S_\alpha) = (S_\alpha)$

故 M 上有整体因子 D s.t. $D \cap U_\alpha = (S_\alpha)$

D 为 S 诱导因子 (记为 (S)). S 全纯 $\Leftrightarrow (S) \geq 0$

Lemma 4.2.2 有线性同构 $\Gamma_h(L - \lambda(D)) \cong \{S \in \Gamma(R(M)) \mid (S) - D \geq 0\}$

特别地. $z(D) \cong \Gamma_h(T_h^*M - \lambda(D))$

Pf. L 连接系数 $g_{\beta\alpha}$

$\forall S \in \Gamma_h(L - \lambda(D))$ 局部表示 $\{S_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}\}$ $S_\beta = g_{\beta\alpha} \frac{f_\alpha}{f_\beta} S_\alpha$

则 $\{h_\alpha = f_\alpha S_\alpha\}$ 为亚纯截面 $T(S)$ 的局部表示

$((T(S)) - D) \cap U_\alpha = (S_\alpha) \geq 0$

$\forall S \in \Gamma(R(M))$ 且 $(S) - D \geq 0$ 局部表示 $\{S_\alpha: U_\alpha \rightarrow S\}$

则 $S_\beta = g_{\beta\alpha} S_\alpha$

由 $((S) - D) \cap U_\alpha = (S_\alpha) - (f_\beta) = (\frac{S_\beta}{f_\beta}) \geq 0$

又 $\frac{S_\beta}{f_\beta} = g_{\beta\alpha} \frac{f_\alpha}{f_\beta} \frac{S_\alpha}{f_\alpha}$ 故 $\{\frac{S_\alpha}{f_\alpha}: U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}\}$ 为 $L - \lambda(D)$ 的亚纯截面 #

Lemma 4.2.3 S 为非零亚纯截面 则 $L = \lambda((S))$

反之 $\forall D \exists S \in \Gamma(R(\lambda(D)))$ s.t. $D = (S)$

e.g. ω 为 M 上非零全纯微分 $K=(\omega)$

$$R_j T_h^* M = \lambda(K) \quad R_j i(D) \subseteq \Gamma_h(\lambda(K-D))$$

Cor 4.2.4 L 为全纯线丛. 则

(i) 若 $\dim \Gamma_h(L) > 0$. 则 $\exists$ 有效因子 D s.t. $L = \lambda(D)$

(ii) 若 $\exists D_1$ s.t. $\dim \Gamma_h(L - \lambda(D_1)) > 0$ 则 $\exists D$ s.t. $L = \lambda(D)$

Pf. (i) $\dim \Gamma_h(L) > 0$ 则 $\exists$ 全纯截面 s . 则 $L = \lambda(s)$

(ii) 由 (i) $\exists D_2$ s.t. $L - \lambda(D_1) = \lambda(D_2)$ 故 $L = \lambda(D_1 + D_2)$ #

Cor 4.2.5 L 为紧黎曼面上全纯线丛 则 $\dim \Gamma_h(L) < \infty$

pf. $\dim \Gamma_h(L) = 0$ 且为得证

否则 由 Cor 4.2.4 $\exists D$ s.t. $L = \lambda(D)$

则 $\dim \Gamma_h(L) = \dim \Gamma_h(\lambda(D)) = \dim i(D) < \infty$. #

§4.3 层与预层

U 为 M 上开集 $A^0(U) = \{U \text{ 上光滑函数全体}\}$

$$\text{则 } C^\infty(p) = \bigcup_{U \ni p} A^0(U)/\sim$$

$$f \in A^0(U) \sim g \in A^0(V) \Leftrightarrow \exists W \subset U \cap V \text{ s.t. } f|_W = g|_W$$

$$\text{定义 } S^0 = \bigcup_{p \in M} C^\infty(p).$$

$$\forall \text{ 开集 } U \subset M, f \in A^0(U) \quad \text{令 } O_f = \{[f]_p \mid p \in U\} \subset S^0$$

$$\{O_f\}_{f \in A^0(U)} \text{ 定义了 } S^0 \text{ 的拓扑}$$

$$\text{令 } \pi: S^0 \rightarrow M \\ [f]_p \mapsto p.$$

Remark. (i) π 为连续满射 局部同胚.

$$(ii) \pi^{-1}(p) = C^\infty(p) \text{ 为交换群}$$

$$(iii) S^0 \rightarrow S^0 \quad [f]_p \mapsto [-f]_p \text{ 为自同胚}$$

$$(iv) S^0 \circ S^0 \subseteq \{(s_1, s_2) \mid \pi(s_1) = \pi(s_2)\}$$

$$S^0 \circ S^0 \rightarrow S^0 \text{ 连续} \\ (s_1, s_2) \mapsto s_1 + s_2$$

S^0 为 M 上光滑函数芽层 $C^\infty(p)$ 为 p 处光滑函数芽

Def 4.3.1 $\pi: S \rightarrow M$ 为拓扑空间到黎曼曲面 M 的连续满射.

$$(i) \pi \text{ 为局部同胚}$$

$$(ii) \forall p \in M \quad \pi^{-1}(p) \text{ 为交换群}$$

$$(iii) S \rightarrow S \text{ 和 } S \circ S \rightarrow S \text{ 均连续} \quad \text{则 } S \text{ 为 } M \text{ 上的层}$$

$$s \mapsto -s \quad (s_1, s_2) \mapsto s_1 + s_2.$$

$$\Sigma_m = \pi^{-1}(m) \text{ 为 } m \text{ 上的 } \Sigma$$

e.g. (i) 平凡层: $S = M \times G$

π 为第一分量投影

(ii) 摩天大厦层

$$S_p = M \sqcup G/p \times 0$$

开集要么是 M 中不含 p 的开集. 要么是 $M \cap p$ 开集去掉 p 后与 G 中若干元素之并

$$\pi: S_p \rightarrow M$$

$$m \mapsto m \quad (m \in M)$$

$$g \mapsto p \quad (g \in G)$$

(iii) 主丛总教条层 P 形式层 S^P (P, q 形式层 $S^{P,q}$)

Def 4.3.2 S 为 M 上的层 U 为 M 开集

若连续映射 $f: U \rightarrow S$ s.t. $\pi \circ f = \text{Id}_U$ 则称 f 为 S 在 U 上的 截面

U 上截面全体记为 $\Gamma(S, U)$. $\Gamma(S, M)$ 记为 $\Gamma(S)$

e.g. S^0 的截面

U 为 M 中开集 $f: U \rightarrow S^0$ 为截面

$\forall p \in U$ 设 $f(p) = [g_p]_p$ 由 f 连续 $\exists V_p \subset U$ s.t. $f(V_p) \subset O_{g_p}$

则 $f(q) = [g_p]_q \quad (\forall q \in V_p)$ 则 $g_p \in O(V_p)$

$V_p \cap V_q \neq \emptyset$ 时, 任取 $r \in V_p \cap V_q$ 则 $[g_p]_r = f(r) = [g_q]_r \Rightarrow g_p(r) = g_q(r)$

故 $\exists i(f)$ s.t. $i(f)|_{V_p} = g_p$ 则定义 $i: \Gamma(S, U) \rightarrow O(U)$

反之 $\forall g \in O(U)$ 令 $j(g): U \rightarrow S^0$ 则 $j: O(U) \rightarrow \Gamma(S, U)$

Def 4.3.3 M 为黎曼曲面 若任意开集 $u \subset M$ 对应交换群 $S(u)$

$u \subset v$ 时有群同态 $\rho_{v,u} : S(v) \rightarrow S(u)$

且 $u \subset v \subset w$ 时 $\rho_{w,u} = \rho_{w,v} \circ \rho_{v,u}$. 则 $\{S(u), \rho_{u,v}\}$ 称为 **预层**

若 S 为层 则令 $S(u) = \Gamma(S, u)$ $\rho_{v,u}$ 为限制同态. 则为 **预层**.

这个预层还满足:

(i) $u = \bigcup_i u_i$ u_i 开. 对 $s_i \in S(u_i)$

若 $u_i \cap u_j$ 上有 $\rho_{u_i \cap u_j, u_i}(s_i) = \rho_{u_j \cap u_i, u_j}(s_j)$. 则 $\exists s \in S(u)$ s.t. $\rho_{u, u_i}(s) = s_i$

(ii) 若 $\forall u_i$ 均有 $\rho_{u, u_i}(s) = 0$ 则 $s = 0$.

(i)(ii) 的预层称为 **完备预层**

对预层 $\{S(u), \rho_{u,v}\}$. $\forall m \in M$ 令 $S_m = \bigcup_{u \ni m} S(u) / \sim$

$f \in S(u) \sim g \in S(v) \iff \exists w \subset u \cap v$ s.t.
 $\rho_{u,w}(f) = \rho_{v,w}(g)$

令 $S = \bigcup_{m \in M} S_m$ 则为层

若 $\{S(u), \rho_{u,v}\}$ 完备. 则还有 $\Gamma(S, u) \supset S(u)$

Def 4.3.4 层同态. 层同构

Def 4.3.5 子层. 商层

eg (i) 全纯截面层 L 为全纯线丛. $\Omega(L|_U) = \{L \text{ 在 } U \text{ 上全纯截面}\}$

则 $\{\Omega(L|_U), \rho_U\}$ 诱导层 $\Omega(L)$

(ii) 理想层 $\forall p \in M$ 对包含 p 的开集 U 令

$\mathcal{I}_p(U) = \{f \in \mathcal{O}(U) \mid f(p) = 0\}$ $p \in U$ 诱导层称为理想层. 记 $\mathcal{I}_p$ 为全纯函数层的子层

$m \neq p$ 时. 理想层在 m 处的基 = 全纯函数层在 m 处的基
 $m = p$ 时 = 常数项为 0 的幂级数

故 $\mathcal{O}/\mathcal{I}_p$ 同构于基为 $\mathbb{C}$ 的极大理想层 $\mathcal{S}_p$

即 $0 \rightarrow \mathcal{I}_p \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{S}_p \rightarrow 0$ 正合

Lemma 4.3.1 L 为 M 上全纯线丛 D 有效 则存在正合列

$$0 \rightarrow \Omega(L - \lambda(D)) \rightarrow \Omega(L) \rightarrow \mathcal{S}_D \rightarrow 0$$

pf. 不妨设 $D = p$ (一般情形类似).

定义 $\Omega_p(L|_U) = \begin{cases} \{s \in \Omega(L|_U) \mid s(p) = 0\} & p \in U \\ \Omega(L|_U) & p \notin U \end{cases}$

则诱导层 $\Omega_p(L)$ 为 $\Omega(L)$ 的子层

且有短正合列 $0 \rightarrow \Omega_p(L) \rightarrow \Omega(L) \rightarrow \mathcal{S}_p \rightarrow 0$

又 $\Omega(L - \lambda(p))|_U \cong \{s \text{ 为 } L \text{ 在 } U \text{ 上全纯截面} \mid (s) - p|_U \geq 0\}$

$= \Omega_p(L|_U)$ 故 $\Omega(L - \lambda(p)) \cong \Omega_p(L)$

#

§4.4 层的上同调

$\varphi: S \rightarrow T$ 为层同态. 则 φ 诱导 $\varphi^*: \Gamma(S) \rightarrow \Gamma(T)$
 $S \mapsto \varphi_0 S$

短正合列 $0 \rightarrow R \xrightarrow{i} S \xrightarrow{j} T \rightarrow 0$

则有 $0 \rightarrow \Gamma(R) \xrightarrow{i^*} \Gamma(S) \xrightarrow{j^*} \Gamma(T)$

$\text{Im } i^* = \text{Ker } j^*$: 即 $i^* \text{Ker } j^* \subset \text{Im } i^*$ 取 $g \in \text{Ker } j^*$

则 $j \circ g(m) = 0$ 则 $g: M \rightarrow S$ 可分解为

$g: M \xrightarrow{g'} \text{Ker } j \xrightarrow{k} S$ (k 为包含映射)

又 $i: R \rightarrow S$ 可分解为 $i: R \xrightarrow{i'} \text{Im } i = \text{Ker } j \xrightarrow{k} S$

令 $f = (i')^{-1} \circ g': M \rightarrow R$ 则 $f \in \Gamma(R)$ 且 $i^* f = g \checkmark$

但 j^* 一般不是满的. 但 j^* 是“局部”满的:

$\forall f \in \Gamma(T)$ 由 j 满 $\exists s \in S_m$ s.t. $j(s) = f(m)$

取 m 的邻域 U_m 及 $f_m \in \Gamma(S, U_m)$ s.t. $j \circ f_m = f|_{U_m}$

若 $U_m \cap U_n \neq \emptyset$ 则 $j \circ f_m|_{U_m \cap U_n} = j \circ f_n|_{U_m \cap U_n}$

故 $\exists g_{mn} \in \Gamma(R, U_m \cap U_n)$ s.t. $i^* g_{mn} = (f_m - f_n)|_{U_m \cap U_n}$

$\Rightarrow g_m + g_n + g_{mn} = 0$ (*)

若 $g_{mn} = g_m - g_n$ (**) 则 $\exists s \in \Gamma(S)$ s.t. $s|_{U_m} = i^* g_m - f_m$

(*) : $i: R \rightarrow S$ 上链复 (**) : $i: R$ 上边链复 则 $j^* s = f$.

Def 4.4.1 S 为 M 上的 $\mathbb{R}$ 层 $U = \{U_\alpha\}$ 为开覆盖

对 $q \geq 0$, f 将 U 中 $q+1$ 个有序开集 $U_0, \dots, U_q$ 映到

$$\prod (S, U_0 \cap \dots \cap U_q) \text{ 上的 } f(U_0, \dots, U_q)$$

且 (1) $U_0 \cap \dots \cap U_q = \emptyset$ 时 $f(U_0, \dots, U_q) = 0$

$$(2) f(\dots U_i, U_j) = -f(\dots U_j, \dots U_i)$$

这样一个映射 f 称为关于 U 的 q -次上链。 q -次上链全体为 $C^q(U; S)$

$$\delta: C^q(U; S) \rightarrow C^{q+1}(U; S)$$

$$\delta f(U_0, \dots, U_{q+1}) = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i f(U_0, \dots, \hat{U}_i, \dots, U_{q+1})$$

Lemma 4.4.1 $\delta^2 = 0$.

Def 4.4.2 $\delta f = 0$ 则称 f 为 q -次闭链 q -次闭链全体记 $Z^q(U; S)$

$f = \delta g$ 则称 f 为 q -次上链边界。其全体记为 $B^q(U; S)$

$$\text{上同调群} \text{ 为 } H^q(U; S) = Z^q(U; S) / B^q(U; S)$$

$$\text{Rmk (i) } H^0(U; S) = \Gamma(S)$$

(ii) $\varphi: S \rightarrow T$ 是同态, 诱导上同调群同态

$$\varphi^*: H^q(U; S) \rightarrow H^q(U; T)$$

$H^q(U; S)$ 与 U 有关 若 U, V 为两个开覆盖, U 为 V 的加细
 即 $\exists T: U \rightarrow V$ s.t. $U_\alpha \subset T(U_\alpha)$
 则有 $H^q(V; S) \xrightarrow{T^*} H^q(U; S)$

可验证 T^* 与 T 无关, 为单同态.

S 为 M 上的层, 考虑 M 的所有开覆盖

$$H^q(M; S) = \bigcup_U H^q(U; S) / \sim$$

$$[f] \in H^q(U; S) \sim [g] \in H^q(V; S) \Leftrightarrow$$

$$\exists U, V \text{ 的公共加细 } W, \text{ s.t. } T_1^*[f] = T_2^*[g] \quad \begin{matrix} T_1: W \rightarrow U \\ T_2: W \rightarrow V \end{matrix}$$

Remark (i) $H^0(M; S) = \Gamma(S)$

(ii) 若 $H^1(M; \mathcal{R}) = 0$, 则正合列 $0 \rightarrow \mathcal{R} \xrightarrow{i} S \xrightarrow{j} T \rightarrow 0$
 诱导正合列 $0 \rightarrow \Gamma(\mathcal{R}) \xrightarrow{i^*} \Gamma(S) \xrightarrow{j^*} \Gamma(T) \rightarrow 0$

$\exists$ 连接同态 $\delta^*: H^q(M; T) \rightarrow H^{q+1}(M; \mathcal{R})$

给出长正合列 $0 \rightarrow \Gamma(\mathcal{R}) \xrightarrow{i^*} \Gamma(S) \xrightarrow{j^*} \Gamma(T) \xrightarrow{\delta^*} H^1(M; \mathcal{R})$
 $\xrightarrow{i^*} H^1(M; S) \xrightarrow{j^*} H^1(M; T) \dots$

δ^* 的构造在这里略去

Lemma 4.4.2 L 为全纯线丛 若 $H^1(M; \mathcal{L}(L)) = 0$.

则 $\exists D$ s.t. $L = \mathcal{L}(D)$

pf 有正合列 $0 \rightarrow \mathcal{L}(L) \rightarrow \mathcal{L}(L + \mathcal{L}(P)) \rightarrow \mathcal{S}_P \rightarrow 0$

则有 $0 \rightarrow \Gamma_h(L) \rightarrow \Gamma_h(L + \mathcal{L}(P)) \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow 0$

则 $\dim \Gamma_h(L + \mathcal{L}(P)) \geq \dim \mathbb{C} = 1$ 故由 Cor. 4.2.4 即得 $\#$

e.g. L 为 M 上全纯线丛 $\{U_\alpha\}$ 平凡化覆盖 f_α 为连接态

把 f_α 看成 $\mathcal{O}^*$ 在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上的截面

则 f_α 定义了 $\mathcal{O}^*$ 关于 $\{U_\alpha\}$ 的 1-2 闭包.

若 $H^1(M; \mathcal{O}^*) = 0$ 则存在 U_α 上全纯 f_α s.t. $f_\alpha = \frac{f_\alpha}{f_\beta}$

故 L 同构于平凡丛.

§4.5 上同调群的计算

Def 4.5.1 S 为 M 上的层 W 为局部有限开覆盖.

$\phi: S \rightarrow S$ 为自同态. 且

(i) $\forall \exists$ 开集 $K_\alpha \subset U_\alpha$, s.t. $m \notin K_\alpha$ 时 $\phi|_{S_m} = 0$

(ii) $\sum \phi_\alpha = \text{Id}$

则 $\{\phi_\alpha\}$ 为从层 W 的 单位分解

若对每个局部有限开覆盖 W 均有单位分解. 则称 S 为强层

e.g. 光滑函数层 P 形式层 L (直 $(P, \wedge)$ 形式层) 等为强层
 全纯函数层 全纯线丛 L 的全纯截面层 等不为强层

Thm 4.5.1 S 为强层. 则 $H^q(M, S) = 0$ ($q \geq 1$)

Pf 以 $q=1$ 为例 任取局部有限开覆盖 $\{U_\alpha\}$

设 $f \in Z^1(U, S)$ $\{\phi_\alpha\}$ 为单位分解

定义 $g \in C^0(U, S)$ $g(U_\alpha) = \sum \phi_\gamma \circ (f(U_\gamma, U_\alpha))$

$$\text{则 } dg(U_\alpha, U_\beta) = g(U_\beta) - g(U_\alpha)$$

$$= \sum \gamma [\phi_\gamma \circ (f(U_\gamma, U_\beta)) - \phi_\gamma \circ (f(U_\gamma, U_\alpha))] \\ \stackrel{f \in Z^1(U, S)}{=} \sum \phi_\gamma (f(U_\alpha, U_\beta) - f(U_\alpha, U_\gamma))$$

$$= \sum \phi_\gamma (f(U_\alpha, U_\beta) - f(U_\alpha, U_\gamma))$$

$$\text{故 } H^1(U, S) = 0 \text{ 则 } H^1(M, S) = 0$$

#

Def 4.5.2 S 为 M 上的层 若存在强层 $\{S_i\}$ 以及层同态映射序列

$$0 \rightarrow S \rightarrow S_0 \xrightarrow{d_0} S_1 \xrightarrow{d_1} S_2 \rightarrow \dots$$

则称 S 存在 强层分解

Thm 4.5.2 若 S 有强层分解 $0 \rightarrow S \rightarrow S_0 \xrightarrow{d_0} S_1 \rightarrow \dots$

诱导同态序列为 $0 \rightarrow \Gamma(S) \rightarrow \Gamma(S_0) \xrightarrow{d_0^*} \Gamma(S_1) \rightarrow \dots$

则有同构 $H^q(M; S) \cong \text{Ker } d_q^* / \text{Im } d_{q-1}^*$

Cor 4.5.3 $H^q(M; \mathbb{C}) \cong H_{dR}^q(M; \mathbb{C})$

Pf d 为外微分算子 则诱导群同态序列

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow S^0 \xrightarrow{d} S^1 \xrightarrow{d} S^2 \rightarrow 0$$

由 Poincaré 引理 这是强层分解. 则由 Thm 4.5.2 即得 $\#$

定义 $H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M) = \{ \omega \in A^{p,q} / \bar{\partial}\omega = 0 \} / \{ \bar{\partial}\eta / \eta \in A^{p,q-1} \}$

为 (p,q) -次 Dolbeault 上同调

(Dolbeault)
Lemma 4.5.4 f 为 $\mathbb{C}$ 上复变光滑函数 则 $\exists \mathbb{C}$ 上光滑函数 g st. $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} g = f$

Pf 取 $g(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{f(z)}{z-w} dz \wedge d\bar{z}$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{f(z)}{w-z} dx dy. \text{ 验证 } g \text{ 符合 } \#$$

Lemma 4.5.5 ω 为开集 $u \perp (p, q)$ 形式 $\Rightarrow \forall m \in u, \exists mby \text{ 或 } v \subset u$

以及 $v \perp (p, q-1)$ 形式 η s.t. $\omega = \bar{\partial} \eta$

则有层正合列 $0 \rightarrow 0 \rightarrow S^0 \xrightarrow{\bar{\partial}} S^{0,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} 0$

$0 \rightarrow \Omega^1 \rightarrow S^{1,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} S^{1,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} 0$

Thm 4.5.6 $H^1(M; \mathbb{C}) \cong H_{\bar{\partial}}^{0,1}(M)$ $H^1(M; \mathbb{R}) \cong H_{\bar{\partial}}^{1,1}(M)$

(Runge) Thm 4.5.7 K 为 $\mathbb{C}$ 中紧集, $U \supset K$ 开 $\Rightarrow$ (1)(2) 等价

(1) 每个在 K 的一个邻域内全纯的函数可用 U 上全纯函数在 K 上一致逼近

(2) $U-K$ 的每个连通分支在 U 的闭包内非紧

Thm 4.5.8 M 为 $\mathbb{C}$ 中开域, 则 $H^1(M; \mathbb{C}) = 0$

Pf. 只需证任给 M 上光滑函数 f $\exists$ 光滑函数 g s.t. $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} g = f$

找到紧集 $\{K_i\}$ s.t. $\begin{cases} M = \bigcup_i K_i \\ K_i \subset K_{i+1} \\ M-K_i \text{ 的连通分支在 } M \text{ 内的闭包非紧} \end{cases}$

取 M 上一列光滑函数 ψ_i s.t. $\psi_i|_{K_{i+1}} = 1$

令 $\varphi_i = \begin{cases} \psi_i, & i=1 \\ \psi_i - \psi_{i-1}, & i \geq 2 \end{cases}$ 则 $\varphi_i|_{K_i} = 0$ $\sum \varphi_i = 1$

又 $\exists \mathbb{C}$ 上光滑函数 g_i s.t. $\frac{\partial g_i}{\partial \bar{z}} = \varphi_i \cdot f$ 则 g_i 在 K_{i+1} 的一个邻域内全纯

则由Runge定理 $\exists M$ 上全纯 h_i s.t. $k_{i-1} \perp |g_i - h_i| < 2^{-i}$.

$$\text{定义 } g = \sum_{i=1}^{\infty} g_i - h_i$$

则在 k_i 上 $g = \sum_{j=1}^i g_j - h_j + \underbrace{\sum_{j=i+1}^{\infty} g_j - h_j}_{=0}$ 无碍

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \sum_j \varphi_j f = f \quad \text{故 } \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = f \quad \#$$

推广到 L 值微分形式上.

$m \in M$ m 附近的 L 值 (p, q) 形式为 $\sum_L \omega_i s_i$

ω_i 为局部 (p, q) 形式. s_i 为 L 的局部截面

取 m 处全纯截面 s 则 $s_i = f_i s$

$$\sum \omega_i s_i = \sum f_i \omega_i s = \omega s$$

$$\text{定义 } \bar{\partial}(\sum \omega_i s_i) = (\bar{\partial} \omega) s$$

$$\text{同样有 } 0 \rightarrow \Omega^0(L) \rightarrow S^0(L) \xrightarrow{\bar{\partial}} S^{0,1}(L) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \Omega^1(L) \rightarrow S^{1,0}(L) \xrightarrow{\bar{\partial}} S^{1,1}(L) \rightarrow 0$$

Thm 4.59 L 为 M 的全纯线丛. 则

$$H^q(M, \Omega^p(L)) \cong \{ \bar{\partial} \text{ 闭 } L \text{ 值 } (p, q) \text{ 形式} \} / \{ \bar{\partial} \text{ 恰当 } L \text{ 值 } (p, q) \text{ 形式} \}$$

§4.6 欧拉数

闭形式全体 $\subset A_c^p(\mathbb{C})$ $H_c^p(\mathbb{C})$ 为闭形式 de Rham 上同调

Lemma 4.6.1 $H_c^2(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$.

Pf. $\phi: A_c^2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ 若 $\omega = \omega' + d\eta$ 则 $\int_{\mathbb{C}} \omega = \int_{\mathbb{C}} \omega'$
 $\omega \mapsto \int_{\mathbb{C}} \omega$ 故诱导 $\phi^*: H_c^2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$

显然 ϕ^* 满 若 $\int_{\mathbb{C}} \omega = 0$ $\omega = f(x, y) dx dy$

则 f 闭 且 $\int_{\mathbb{C}} f dx dy = 0$

取 $\mathbb{R}$ 上闭的 ψ 且 $\int_{\mathbb{R}} \psi = 1$ 令

$$\eta = \left(\int_{-\infty}^x f(s, y) ds \right) dy - \left(\int_{-\infty}^y f(s, y) ds \right) \left(\int_{-\infty}^x \psi(u) du \right) dy - \psi(x) \left(\int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^u f(s, t) ds dt \right) dx$$

则 η 闭 且 $\omega = d\eta$ #

Cor 4.6.2 连通紧致复流形 M , 则 $H_{dR}^2(M; \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$

设 S 为 $M \times \mathbb{C}^*$ 层 基均为复线性空间 且充分高阶上同调群为 0

定义 欧拉数 $\chi(S) = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \dim H^q(M; S)$

L 值全闭 p -形式层 $\mathcal{L}^p(L)$ 欧拉数记为 $\chi^p(L)$

$p=0$ 时 $\chi(L) = \chi^0(L)$

e.g (i) $\chi(C) = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \dim H^q(M; \mathbb{C})$
 $= \sum_{q=0}^2 (-1)^q \dim H_{dR}^q(M; \mathbb{C}) = 2 - 2g$

(ii) $\forall (0,1)$ 形式 ω $\omega = \omega_h + df + *dg$
 $= \omega'_h + \bar{\partial}(f + \bar{\partial}^{-1}g)$ ($\omega'_h \in \mathcal{H}(C)$)

故 $\dim H^1(M; \mathbb{C}) = \dim H_{\bar{\partial}}^{0,1}(M) = \dim \mathcal{H} = g$

故 $\chi(C) = 1 - g$

(iii) $\chi(S_D) \stackrel{\text{Serre}}{=} \dim H^0(M; S_D) = \dim \Gamma(S_D) = d(D)$

Lemma 4.6.3 $0 \rightarrow S_1 \xrightarrow{\alpha} S_2 \xrightarrow{\beta} S_3 \rightarrow 0$ 为短正合列

则 $\chi(S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_3)$

Lemma 4.6.4 若 $\dim H^1(M; \Omega(L)) < \infty$. 则 $\exists D$ s.t. $L = \lambda(D)$

Pf $\dim H^0(M; \Omega(L)) = \dim \Gamma_h(L) < \infty$

考虑 $0 \rightarrow \Omega(L) \rightarrow \Omega(L + \lambda(np)) \rightarrow S_{np} \rightarrow 0$

故 $\chi(L + \lambda(np)) = \chi(L) + n$

则 n 充分大时 $\dim \Gamma_h(L + \lambda(D)) \geq \chi(L + \lambda(np)) \stackrel{n \text{ 充分大}}{> 0}$

由 Cor 4.2.4 即证

#

我们其实证明了 $\chi(\lambda(D)) = 1 - g + d(D)$

第五章 曲面的复几何

§5.1 Hermite 度量

Def 5.1.1 在每个 $T_p M$ 上指定一个 Hermite 内积

$h(p) = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$ 且任给单纯切丛上的两个光滑截面 X, X_2 ,

有 $h(X_1, X_2) \quad p \mapsto \langle X_1(p), X_2(p) \rangle_p$ 光滑, 则称 h 为 **Hermite 度量**

记 $h_\alpha = h(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha})$ 为 U_α 上光滑函数, 则 h 可写为 $h_\alpha dz_\alpha \otimes d\bar{z}_\alpha$ ⁽¹⁾

X, Y 局部表示 $X = a_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \quad Y = b_\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha}$, 则 $h(X, Y) = a_\alpha h_\alpha \bar{b}_\alpha$

$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $h_\beta = h(\frac{\partial}{\partial z_\beta}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta}) = h(\frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\beta} \frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial \bar{z}_\alpha}{\partial \bar{z}_\beta} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha})$
 $= |\frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\beta}|^2 h_\alpha \quad (*)$

反之若一族 $\{h_\alpha\}$ 满足 $(*)$, 则由 (1) 可定义一个 Hermite 度量

在 U_α 定义 (1.1) 形式

$$\Omega_\alpha = \frac{\sqrt{-1}}{2} h_\alpha dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\alpha = h_\alpha dx_\alpha \wedge dy_\alpha$$

$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset \quad \Omega_\alpha = \Omega_\beta$ 故定义了整体 (1.1) 形式 Ω

称为体积形式

$$\text{再令 } \Theta_\alpha = \bar{\partial} \partial \log h_\alpha$$

$$\begin{aligned} U_\alpha \cap U_\beta &: \Theta_\beta = \bar{\partial} \partial \log \left(\left| \frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\beta} \right|^2 h_\alpha \right) \\ &= \bar{\partial} \partial \log h_\alpha + \bar{\partial} \partial \log \frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\beta} + \bar{\partial} \partial \log \overline{\frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\beta}} \\ &= \bar{\partial} \partial \log h_\alpha \end{aligned}$$

故 $\{\Theta_\alpha\}$ 也定义了整体 $(1,1)$ 形式, 记为 Θ , 称为曲率形式

$$\Theta = \frac{k}{2\pi} \Omega, \quad \text{则 } k \text{ 称为 Gauss 曲率}$$

$$k = -\frac{2}{h_\alpha} \frac{\partial^2 \log h_\alpha}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\alpha}$$

Thm 5.11 (Gauss-Bonnet) h 为紧黎曼面 M 上 $(1,1)$ -Hermite 度量

$$\text{则 } \frac{1}{2\pi} \int_M k \Omega = \chi(M)$$

pf. M 上任取正则曲线 γ 为 ω 零点 极点全体为 $\{p_i\}$

$$\omega \text{ 局部表示 } \omega = f d\bar{z} \quad \text{则 } f_\beta = f_\alpha \frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\beta}$$

$$\text{结合 (*) 可知 } |f_\beta|^2 h_\beta = |f_\alpha|^2 h_\alpha$$

则 $M - \{p_i\}$ 上有光滑函数 f 且 $|f_\alpha|^2 = f \cdot h_\alpha$

每个 p_i 处取坐标圆盘 D_i, ϕ_i . $D_i(r) = \{p \in D_i \mid |\phi_i(p)| < r\}$

$$\frac{1}{2\pi} \int_M k \Omega = \frac{F-1}{2\pi} \int_M \Theta = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{F-1}{2\pi} \int_{M - \bigcup_i D_i(r)} \bar{\partial} \partial \log h_\alpha$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{F-1}{2\pi} \int_{M - \bigcup_i D_i(r)} -\bar{\partial} \partial \log f = \sum_i \lim_{r \rightarrow 0} \frac{F-1}{2\pi} \int_{\partial D_i(r)} \partial \log f$$

$$= \sum_i \lim_{r \rightarrow 0} \frac{F-1}{2\pi} \int_{\partial D_i(r)} \partial (\log f_i + \log \bar{f}_i - \log h_i) = \sum_i \lim_{r \rightarrow 0} \frac{F-1}{2\pi} \int_{\partial D_i(r)} \partial \log f_i$$

f_i 在 D_i 中表示为 $f_i = z^{n_i} g_i$, g_i 为 P_i 附近非零全纯

$$\text{则原式} = \sum_i \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r-1}{2\pi} \int_{\partial D_i(r)} \partial \log z_i^{n_i} = -\sum_i n_i$$

$$= -d(\log) = 2-2g = \chi(M) \quad \#$$

$\phi: M \rightarrow N$ 为非退化全纯映射 h 为 N 上 Hermitian 度量

$$M \text{ 上定义 Hermitian 度量 } \phi^* h \quad \phi^* h(X, Y) = h(\phi_* X, \phi_* Y)$$

若 h 为 M 上 Hermitian 度量 ϕ 为全纯, $h' = \phi^* h$ 则称 ϕ 为全纯等距

给定 h 在 $T_p M$ 上有一个诱导内积 g_p :

$$g_p\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right) = 0 \quad g_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right) = g_p\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}, \frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right) = h_\alpha$$

记为 $g_\alpha = h_\alpha(d x_\alpha \otimes d x_\alpha + d y_\alpha \otimes d y_\alpha)$ 称作 Riemann 度量

Γ 为 M 上曲线 定义 $L(\Gamma) = \int_I \sqrt{g(\dot{\Gamma}, \dot{\Gamma})} ds$ 为 Γ 的长度

$d(p, q) = \inf\{L(\Gamma) \mid \Gamma \text{ 为连接 } p, q \text{ 的曲线}\}$ 称为 p, q 的距离

若 $L(\Gamma) = d(p, q)$ 称 Γ 为最短测地线 若一条曲线在

每一点附近均为最短测地线 则称为测地线

e.g. (i) $\mathbb{C}$ 上 $h = dz \otimes d\bar{z}$ $k=0$

且诱导 Riemann 度量 即欧氏度量

(ii) $\mathbb{C}$ 上 $h = \frac{4}{(1+|z|^2)^2} dz \otimes d\bar{z}$

$z = \frac{1}{w} \Rightarrow h = \frac{4}{(1+|w|^2)^2} dw \otimes d\bar{w}$ 为 S 上 Hermite 度量

$\Theta = \partial\bar{\partial} \log \frac{4}{(1+|z|^2)^2} = \frac{2}{(1+|z|^2)^2} dz \wedge d\bar{z} \Rightarrow k=1$

(iii) M 紧致为 1 且紧 M 上取非零全纯 1-形式 ω

$h = \omega \otimes \bar{\omega}$ $\omega = f dz$ 则 $h = |f|^2 dz \otimes d\bar{z}$

$\Theta = \partial\bar{\partial} \log |f|^2 = 0 \Rightarrow k=0$

$\pi: \bar{M} \rightarrow M$ 为万有覆盖 则 π^*h 完备平坦 则 $\bar{M} \simeq \mathbb{C}$

故 $M \simeq \mathbb{C}/\Gamma$ 即同构于环面或不空

(iv) $\mathbb{D}$ 上 $h = \frac{4}{(1-|z|^2)^2} dz \otimes d\bar{z}$ 计算得 $k=-1$

$H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ 上 $g = \frac{dz \otimes d\bar{z}}{(\operatorname{Im} z)^2}$ 则 $(\mathbb{D}, h)$ 全纯等距于 (H, g)

Thm 5.12 (Schwarz-Pick) $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ 全纯

则 $d(f(z_1), f(z_2)) \leq d(z_1, z_2)$ d 为双曲距离

若 $\exists z_1 \neq z_2$ 取等 则 f 为全纯等距

p.f. ϕ, ψ 为把 z_1 和 $f(z_1)$ 映为 0 的全纯自同构

并令 $F = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$

由 Schwarz 不等式 $|F(w)| \leq |w|$

$$\text{即 } d(0, F(w)) \leq d(0, w)$$

$$\text{取 } w = \phi(z_2), \text{ 则 } d(f(z_1), f(z_2)) = d(\psi \circ f(z_1), \psi \circ f(z_2))$$

$$= d(0, F(\phi(z_2))) \leq d(0, \phi(z_2)) = d(\phi(z_1), \phi(z_2)) = d(z_1, z_2) \quad \#$$

M^n 上 h 为 Hermite 度量 之前, $A^*(M)$ 上定义了 Hermite 内积.

现在讨论 $A(M) = A^0(M) \oplus A^1(M) \oplus A^2(M)$ 上

i) 规定不同次微分形式上

$$\text{ii) } f, g \in A^q(M) \quad \text{令 } (f, g) = \int_M f \bar{g} \, \Omega \quad \Omega \text{ 为体积形式}$$

$$\text{若 } \omega_1 = f_1 \Omega, \omega_2 = f_2 \Omega \in A^2(M) \quad \text{令 } (\omega_1, \omega_2) = (f_1, f_2)$$

$$\text{或者 把 } *: A^q(M) \rightarrow A^p(M) \text{ 推广到 } *: A^{p,q} \rightarrow A^{p-q, 1-p} \\ *: 1 = \Omega, \quad * \Omega = 1$$

$$A^p(M) \text{ 上 } (\gamma_1, \gamma_2) = \int_M \gamma_1 \wedge \overline{* \gamma_2}$$

$$\text{Remark: } *^2 = (-1)^{p+q} \quad (*\gamma_1, *\gamma_2) = (\gamma_1, \gamma_2)$$

$$\text{再定义 } \delta: A^p(M) \rightarrow A^{p-1}(M)$$

$$\delta = -*d*$$

$$\partial: A^{p,q}(M) \rightarrow A^{p,q-1}(M)$$

$$\partial = -*\partial*$$

Lemma 5.13 紧黎曼面上, $(dw, \eta) = (w, \delta\eta)$ $(\bar{\partial}w, \eta) = (w, \bar{\partial}\eta)$

$$\Delta = d\delta + \delta d, \quad \square = \bar{\partial}\partial + \partial\bar{\partial}$$

性质: (i) $\Delta w = 0 \Leftrightarrow dw = \delta w = 0$
 $\square w = 0 \Leftrightarrow \bar{\partial}w = \partial w = 0$

$$(ii) \square = \frac{1}{2} \Delta$$

$$(iii) *\Delta = \Delta*, \quad *\square = \square*$$

(iv) $\square w = 0$ 等价于 $w|_{\partial M} = 0$ 这与之前定义一致

§5.2 线上的几何

Def 5.2.1 L 为单纯线丛. 若在每个纤维 L_p 上定义

Hermite 内积 $g(p) = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$, 且令 L 的两个光滑截面 s_1, s_2 ,

M 上的函数 $g(s_1, s_2) : p \mapsto \langle s_1(p), s_2(p) \rangle_p$ 光滑. 则称 g 为

L 上之 Hermite 度量

L 局部平凡化 ψ_α U_α 上截面 s_α $s_\alpha(x) = \psi_\alpha^{-1}(x, 1)$

$\langle s_\alpha, s_\alpha \rangle = g(s_\alpha, s_\alpha)$ $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 时 $s_\alpha = f_{\beta\alpha} s_\beta$

$$(\text{R}) \quad g_\alpha = |f_{\beta\alpha}|^2 g_\beta \quad (*)$$

(*) 定义 Hermite 度量

U_α 上定义 (1,0)-形式 $\theta_\alpha = \partial \log g_\alpha$

$$\begin{aligned} U_\alpha \cap U_\beta \quad \theta_\alpha &= \partial \log f_{\beta\alpha} + \partial \log \overline{f_{\beta\alpha}} + \partial \log g_\beta \\ &= f_{\beta\alpha}^{-1} \partial f_{\beta\alpha} + \theta_\beta \end{aligned}$$

令 L 的光滑截面 s . $U_\alpha \subset s = f_\alpha s_\alpha$

$$\text{令 } Ds = (df_\alpha + f_\alpha \theta_\alpha) s_\alpha$$

$$\begin{aligned} (\text{R}) \quad (df_\alpha + f_\alpha \theta_\alpha) s_\alpha &= (f_{\beta\alpha} df_\alpha + f_{\beta\alpha} f_\alpha \theta_\alpha) s_\beta \\ &= (df_\beta - f_\alpha df_{\beta\alpha} + f_{\beta\alpha} f_\alpha (f_{\beta\alpha}^{-1} \partial f_{\beta\alpha} + \theta_\beta)) s_\beta \\ &= (df_\beta + f_{\beta\alpha} \theta_\beta) s_\beta \end{aligned}$$

故有良导算子 $D: A^0(L) \rightarrow A^1(L)$

性质: (i) $D(S_1 + S_2) = DS_1 + DS_2$

$$(ii) D(fs) = (df)s + f(Ds)$$

$$(iii) d\langle S_1, S_2 \rangle = \langle DS_1, S_2 \rangle + \langle S_1, DS_2 \rangle$$

(iv) D 为 $(1,0)$ 型的.

满足 (i)(ii) 的线性算子 D 称为 L 上的一个 **联络**
且 (iii) (iv) 称为与 Hermit 度量相容的联络

扩充到 P 形式上: ω 为 L 值 P 形式 $\omega = \omega_\alpha S_\alpha$ ω_α 为 M 上 P 形式

$$\text{令 } D\omega = (d\omega_\alpha + (-1)^p \omega_\alpha \wedge \theta_\alpha) S_\alpha$$

则定义了算子 $D: A^p(L) \rightarrow A^{p+1}(L)$

$$\underline{\text{且}} \quad D(\omega_1 + \omega_2) = D(\omega_1) + D(\omega_2)$$

$$P(f\omega) = df \wedge \omega + f D\omega \quad (\forall f \in A^0(M))$$

Ω 由上给出. 令 $\Theta_\alpha = d\theta_\alpha = \bar{\partial} \log g_\alpha$

验证 $\Theta_\alpha = \Theta_\beta$ 故有 M 上整体 $(1,1)$ 形式

称为 L 关于 g 的曲率形式

Thm 5.2.1 (Gauss-Bonnet) D 为紧黎曼面上因子.

g 为 $L = \lambda(D)$ 上的 Hermitian 度量. 则

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \int_M \Theta = d(D) = \chi(M) - \frac{1}{2} \chi(M)$$

p.f. $D = \sum_i n_i p_i$ g 局部表示为 $\{g_\alpha\}$

$$\text{则 } g_\alpha = g_\beta |f_{\beta\alpha}|^2 \Rightarrow g_\alpha |f_\alpha|^2 = g_\beta |f_\beta|^2$$

故 $\{g_\alpha |f_\alpha|^2\}$ 在 $M - \{p_i\}$ 上定义了光滑函数 f

$$\begin{aligned} \text{同前} \text{ 有 } \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \int_M \Theta &= - \sum_i \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \int_{\partial D_{r,p_i}} \partial \log f_i \\ &= \sum_i n_i = d(D) \end{aligned}$$

#

§5.3 复流形的 Hodge 定理

同前. 可以把 $*$ 推广到 L 值形式上 $\text{即 } *: A^{p,q}(L) \rightarrow A^{n-p, n-q}(L)$

T_M 和 L 上有度量 h 和 g

设 G_1, G_2 为 L 值 (p,q) 形式. 令

$$(G_1, G_2) = \int_M \langle G_1, G_2 \rangle \omega, \wedge * \bar{\omega}_2$$

$\mathbb{R}$ 在 $A(L)$ 上定义了 $*$ -不变的 Hermitian 内积

$$D: A^{p,q}(L) \rightarrow A^{p+1,q}(L) \oplus A^{p,q+1}(L)$$

$$(p+1, q) \text{ 部分: } D': A^{p,q}(L) \rightarrow A^{p+1,q}(L)$$

$$G = \omega S_\alpha \mapsto D'G = (\partial\omega + (-1)^{p+q} \omega \wedge \partial_\alpha) S_\alpha$$

$$\mathbb{R} \setminus D = D' + \bar{\partial}$$

$$\frac{1}{2} \bar{\partial} \quad \bar{\partial}: A^{p,q}(L) \rightarrow A^{p,q+1}(L) \quad \bar{\partial} = - * D' *$$

Lemma 5.3.1 $(\bar{\partial} G_1, G_2) = (G_1, \bar{\partial} G_2) \quad \forall G_1 \in A^{p,q+1}(L), G_2 \in A^{p,q}(L)$

$$\square: A^{p,q}(L) \rightarrow A^{p,q}(L) \quad \square = \bar{\partial}\bar{\partial} + \bar{\partial}\bar{\partial} \text{ 称为 } \bar{\partial}\text{-Laplace 算子.}$$

性质: (i) $\square = (\bar{\partial} + \bar{\partial})^2$ 则可知其自伴

$$(ii) \square G = 0 \Leftrightarrow \bar{\partial} G = 0, \bar{\partial} G = 0$$

下面计算 $\square$ 的局部表达式

$$\square_0 = -\frac{2}{h_\alpha} \left(\frac{\partial^2}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\alpha} + \frac{2 \log f_\alpha}{\partial z_\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha} \right)$$

$$G = G_\alpha S_\alpha \in A^0(L) \text{ 时 } \square G = (\square_0 G_\alpha) S_\alpha$$

$$G = G_\alpha d\bar{z}_\alpha S_\alpha \in A^1(L) \text{ 时 } \square G = \left[\square_0 - 2 \frac{\partial h_\alpha^{-1}}{\partial \bar{z}_\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha} \right] G_\alpha d\bar{z}_\alpha S_\alpha$$

$$G = G_\alpha d\bar{z}_\alpha S_\alpha \in A^0(L) \text{ 时 } \square G = \left[\square_0 - 2 \frac{\partial h_\alpha^{-1}}{\partial \bar{z}_\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha} + k - 2 \frac{\partial h_\alpha^{-1}}{\partial \bar{z}_\alpha} \frac{\partial \log f_\alpha}{\partial \bar{z}_\alpha} \right] G_\alpha d\bar{z}_\alpha S_\alpha$$

$$G = G_\alpha \lrcorner S_\alpha \in A^1(L) \text{ 时 } \square G = [(\square_0 + k) G_\alpha] \lrcorner S_\alpha$$

$$\text{其中 } k = -\frac{2}{h_\alpha} \frac{\partial^2 \log f_\alpha}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\alpha} \text{ 为 1 曲率.}$$

$\mathcal{H}^{p,q}(L) = \{ G \in A^{p,q}(L) \mid \square G = 0 \}$ 为 L 上的调和 (p,q) 形式全体

$$\mathcal{H}(L) = \bigoplus_{p,q} \mathcal{H}^{p,q}(L)$$

若 $G \in \mathcal{H}^{p,q}(L)$, 则 $\forall T \in A^{p,q-1}(L)$

$$\begin{aligned} (G + \bar{\partial} T, G + \bar{\partial} T) &= (G, G) + (G, \bar{\partial} T) + (\bar{\partial} T, G) + (\bar{\partial} T, \bar{\partial} T) \\ &= (G, G) + \underbrace{(G, \bar{\partial} T)}_0 + \underbrace{(\bar{\partial} T, G)}_0 + (\bar{\partial} T, \bar{\partial} T) \\ &= (G, G) + (\bar{\partial} T, \bar{\partial} T) \geq (G, G) \end{aligned}$$

故 Dolbeault 上同调中一个代表类中最多一个调和形式

下面 Hodge 定理说明调和代表元必存在

Thm 5.3.2 (Hodge) L 为紧黎曼面上全纯线丛

$T_h M \rightarrow L$ 上有 Hermitian 度量, 则

$$(i) \dim \mathcal{H}(L) < +\infty.$$

$$(ii) \exists \text{ 算子 } G: A(L) \rightarrow A(L) \text{ s.t. } \begin{aligned} \ker G &= \mathcal{H}(L) \\ G(A^{p,q}(L)) &\subset A^{p,q}(L) \\ G\bar{\partial} &= \bar{\partial}G \quad G\partial = \partial G \end{aligned}$$

$$\text{且 } A(L) = \mathcal{H}(L) \oplus \text{Im } G = \mathcal{H}(L) \oplus G \cap A(L)$$

应用:

$$\forall \phi \in A(L) \quad \phi - G \cap \phi \in \mathcal{H}(L) \quad \text{且 } H\phi = \phi - G \cap \phi$$

$$\text{若 } \bar{\partial}\phi = 0, \text{ 则 } \phi = \psi + G(\partial\bar{\psi} + \bar{\partial}\psi)\phi \\ = H\phi + \bar{\partial}(G\partial)\phi$$

故 Dolbeault 上同调类 $[\phi]$ 中找到调和代表元 $[H\phi]$

$$\text{Cor 5.3.3 } \forall p, q \geq 0, \quad H^q(M; \Omega^p(L)) \subseteq \mathcal{H}(\bar{\partial}^q(M)) \subseteq \mathcal{H}(\Omega^p(L))$$

$$\text{由 Hodge 定理 (i) 可知 } \dim H^q(M; \Omega^p(L)) < +\infty$$

这也说明任何全纯线丛可由因子生成 (紧黎曼面)

也即 $\lambda: D \rightarrow L$ 为同构

§5.4 对偶定理

$$L = \{f\beta\alpha\} \{0\alpha\} \{S\alpha\} \xrightarrow{\text{对偶}} L^* = \{f\bar{\beta}\} \{-0\alpha\} \{\bar{S}\}$$

定义 $\eta: A^{p,q}(L) \rightarrow A^{q,p}(L)$ $\eta^2 = \text{Id}$

$$\zeta = \omega S\alpha \mapsto \bar{\zeta} = \bar{\omega} \bar{S}\bar{\alpha}$$

$$\tilde{*}: A^{p,q}(L) \rightarrow A^{p+q-p-1-q}(L)$$

$$\tilde{*} \circ \eta = \eta \circ \tilde{*}$$

$-L$ 的联络为 $\bar{\partial}$. 令

$$\bar{\partial}: A^{p,q}(-L) \rightarrow A^{p,q+1}(-L) \quad \tilde{\bar{\partial}} = -\tilde{*} \bar{\partial} \tilde{*}$$

$$\bar{\square}: A^{p,q}(-L) \rightarrow A^{p,q}(-L) \quad \bar{\square} = \bar{\partial} \bar{\partial} + \bar{\partial} \bar{\partial}$$

Lemma 5.4.1 $\tilde{*} \bar{\partial} \zeta = (-1)^{p+q} \bar{\partial} \tilde{*} \zeta, \quad \zeta \in A^{p,q}(L)$

$$\tilde{*} \bar{\partial} \zeta = (-1)^{p+q+1} \bar{\partial} \tilde{*} \zeta$$

$$\bar{\square} \circ \tilde{*} = \tilde{*} \circ \bar{\square}$$

则 $\tilde{*}$ 把调和形式映为调和形式.

且 $\tilde{*}: \mathcal{H}^{p,q}(L) \rightarrow \mathcal{H}^{p+q-p-1-q}(L)$ 为双线性同构

Thm 5.4.2 L 为紧黎曼面 M 上全纯线丛. 则 $\dim \mathcal{H}(L) < +\infty$

pf. $\zeta \in A^0(L)$ 则 $\square \zeta = 0 \Leftrightarrow \bar{\partial} \zeta = 0, \partial \zeta = 0 \Leftrightarrow \bar{\partial} \zeta = 0 \Leftrightarrow \zeta \in \mathcal{H}(L)$

$$\text{则 } \dim \mathcal{H}^{0,0}(L) = \dim \mathcal{H}(L) < \infty$$

$$\dim \mathcal{H}^{1,1}(L) = \dim \mathcal{H}^{0,0}(-L) < \infty$$

$$\dim \mathcal{H}^{1,0}(L) \leq \dim H^{1,0}_{\bar{\partial}} = \dim H^0(M, \mathcal{L}^1(L)) = \dim \mathcal{H}(L + T_h^* M) < \infty$$

$$\dim \mathcal{H}^{0,1}(L) < \infty. \quad \text{故得证.}$$

#

Thm 5.4.3 (Serre 对偶) L 为紧黎曼曲面上的线丛.

$$H^q(M, \mathcal{L}^P(L)) \cong H^{n-q}(M, \mathcal{L}^{1-P}(-L))$$

特别地, $L = \mathcal{O}(D)$, 则 $H^0(M, \mathcal{L}^1(\lambda(-D))) \cong H^1(M, \mathcal{L}^0(\lambda(D)))$

Rmk 可以由此证明 Riemann-Roch 式

§5.5 三叉定理

Def 5.5.1 若 L 上 G 在 Hermite 度量 h st. $k > 0$. 则称

L 为 M 上的 正线丛. 记为 $L > 0$ 若 $-L > 0$ 则称为负线丛. 记 $L < 0$

Lemma 5.1 若 G 为 L (直 (2.1) 形式). 则

$$\square G = (\square * G) \wedge + \nabla \cdot (1 * G) \odot$$

Thm 5.2 L 为紧黎曼 M 上的正线丛. 则

$$(i) L > 0 \Rightarrow H^1(M; \Omega^1(L)) = 0$$

$$(ii) L - T_h^* M > 0 \Rightarrow H^1(M; \Omega^1(L)) = 0$$

Pf. (i) 取 h st. $k > 0$

$$\text{若 } G \in \mathcal{H}^1(L) \text{ 则 } \square G = (\square * G + k * G, G)$$

$$= (\bar{\partial} * G, \bar{\partial} * G) + (\partial * G, \partial * G) + (\nabla k * G, \nabla k * G)$$

$$\geq 0 \Rightarrow \nabla k * G = 0 \text{ 故 } G = 0$$

$$\text{则 } H^1(M; \Omega^1(L)) = \mathcal{H}^1(L) = 0$$

$$(ii) L - T_h^* M > 0 \text{ 则 } H^1(M; \Omega^1(L - T_h^* M)) = 0.$$

$$\text{则 } H^1(M; \Omega^1(L)) = H^1(M; \Omega^1(L - T_h^* M)) = 0.$$

$$\text{其中 } \Omega^1(L - T_h^* M) \cong \Omega^1(L - T_h^* M + T_h^* M) = \Omega^1(L)$$

#

Lemma 5.5.3 紧致黎曼面 M 上任意线丛 L 为正的 $(\Rightarrow d(L) > 0)$

pf. 取 g s.t. $k > 0$ 由 Gauss-Bonnet 式

$$d(L) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \int_M \Theta = \frac{1}{2\pi} \int_M K \Omega > 0.$$

反之 若 $d(L) > 0$ 先任取一个 Hermite 度量 g_0 曲率为 K_0 .

$$\sqrt{-1}\omega = K_0 \Omega - 2\pi d(L) \text{Vol}(M, h)^{-1} \Omega$$

$$\text{R} \int_M \omega = \int_M K_0 \Omega - \int_M 2\pi d(L) \text{Vol}(M, h)^{-1} \Omega$$

$$= 2\pi d(L) - 2\pi d(L) = 0$$

$$\text{R} \exists \eta \text{ s.t. } \omega = d\eta \quad \eta = \eta_1 + df_1 + i * df_2$$

$$\text{故 } K_0 \Omega - 2\pi d(L) \text{Vol}(M, h)^{-1} \Omega = d * df_2 = -2\sqrt{-1} \bar{\partial} \partial f_2$$

$$\sqrt{-1}g = g_0 e^{2f_1} \quad \text{R} \int K \Omega = \sqrt{-1} \Theta$$

$$= \sqrt{-1} \Theta_0 + 2\sqrt{-1} \bar{\partial} \partial f_2$$

$$= 2\pi d(L) \text{Vol}(M, h)^{-1} \Omega$$

$$\text{故 } K = 2\pi d(L) \text{Vol}(M, h)^{-1} > 0 \Rightarrow L > 0.$$

#.

§5.6 线丛的阿美

$\int_M \frac{F-1}{2\pi} \Theta = d(L)$ 即 $\frac{F-1}{2\pi} \Theta$ 作为实(1,1)形式代表

$$H_{dR}^2(M, \mathbb{C}) = H_{\bar{\partial}}^{1,1}(M) \rightarrow \text{100-个元素}$$

该元素与 g 选取无关. 称为 L 的 第一陈类 $c_1(L)$

若另一个度量 g' 对应点 $\{g_\alpha\}, \{g'_\alpha\}$

$$g_\alpha = |f_\alpha|^2 g_\beta \quad g'_\alpha = |f'_\alpha|^2 g_\beta$$

则 $\frac{g'_\alpha}{g_\alpha}$ 定义整体光滑函数, 记为 f

$$\text{则 } \Theta' - \Theta = \bar{\partial} \partial \log \frac{g'_\alpha}{g_\alpha} = \bar{\partial} \partial \log f = d \partial \log f \quad \checkmark$$

Lemma 5.6.1 (i) M 为紧黎曼面. 则 c_1 可看作同态

$$c_1: \mathcal{L} \rightarrow H_{dR}^2(M)$$

若 M 上实(1,1)形式 ω 的积分为整数. 则

$$\exists \text{ 全纯线丛 } L, \text{ s.t. } c_1(L) = [\omega]$$

(ii) $\phi: M \rightarrow N$ 为紧黎曼面间全纯映射

$$L \text{ 为 } M \text{ 上全纯线丛, 则 } c_1(\phi^* L) = \phi^* c_1(L)$$