Kähler-Einstein 度量

该笔记介绍 Kähler 几何中关于 KE 度量问题的研究

基于 Calabi, Aubin, Yau, Ding, Futaki, Tian, Chen, Donaldson, Sun 等人的工作. 基本的复几何知识被默认

一 介绍

回忆在复几何中, 我们已述, 对紧 Kähler 流形 (X, J, g)

$$[Ric(\omega_g)] = 2\pi c_1(K_X^{-1}) = 2\pi c_1(X) \qquad K_X^{-1} = \Lambda^n T^{1,0}X$$

坐标下 $R_{i\bar{j}} = -\partial_i \partial_{\bar{j}} \log \det(g_{p\bar{q}})$

Calabi 在 1954, 1957 提出了如下问题:

1. (指定 Ric) 给定 Kähler 度量 g, 闭 (1,1) 形式 η s.t. $[\eta] = 2\pi c_1(X)$ 是否存在另一 Kähler 度量 g' s.t. $[\omega_{g'}] = [\omega_g]$, $Ric(\omega_{g'}) = \eta$?
2. KE 度量 即 $Ric(\omega_g) = \lambda \omega_g$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ 的度量的存在性

Rmk. 若 (X, J, g) KE, 则 $c_1(X)$ 是定的 即 $c_1(X) > 0$ 或 $c_1(X) < 0$ 或 $c_1(X) = 0$

故在 2 中我们可设 $\lambda = 1, -1, 0$

下面的定理大部分地回答了上面的问题.

Thm 1 (Aubin-Yau, 1976) X紧Kähler $c_1(X)<0$ 则∃! Kähler 度量 g, s.t. $Ric(\omega_g)=-\omega_g$

Thm 2 (Calabi-Yau, 1978) 问题1有解. 特别地, 若$c_1(X)=0$ 则 ∀Kähler类α, α中∃! Ricci平坦的Kähler度量 (亦作 Calabi-Yau度量)

Thm 1和2 解决了问题2中 $c_1(X)<0$ 和 $c_1(X)=0$ 的情形. 然而对于 $c_1(X)>0$ (此时称X为Fano流形), 问题却很复杂.

Thm 3 (Matsushima, 1957) 若X上有正数量曲率 KE度量, 则 X上全纯向量场构成的李代数 $\eta(X)$ 是还原的 (reductive)

Rmk 这说明 $c_1(X)>0$ 不足以保证 KE度量存在. 例如令X为$\mathbb{CP}^2$在一点处的blow-up 则 $\eta(X)$ 非reductive

Thm 4 (Futaki, 1983) 若Fano流形X上有KE度量, 则 Futaki不变量 $f_X=0$.

但在曲面上, 该问题被很好地解决

Thm 5 (Tian, 1989) 对 $c_1(X)>0$ 的复曲面X, X上有KE度量等价于 $\eta(X)$ 为reductive. 特别地, 若X上无非平凡全纯场, 则KE度量存在.

Bando和Mabuchi在80年代引入并研究了"K-能量";

Ding和Tian在Thm4的基础上定义了广义Futaki不变量,并借此定义了K-稳定性.

Thm 6 (Tian, 1997) Fano流形X上有KE度量,则X为弱K-稳定的
进一步若$\eta(X)=0$,则X为K-稳定的.

最终在2012-2013,该问题被完全解决

Thm 7 (Chen-Donaldson-Sun, Tian, 2012-2013) Fano流形X为K稳定的,则有KE度量 #.

回忆数量曲率S_g定义为$S_g=S(\omega_g)=g^{i\bar{j}}R_{i\bar{j}}$,若$S_g$为常值,则称$\omega_g$为cscK度量(constant scalar curvature Kähler度量)

cscK度量是K能量泛函的临界点.

Conj (Yau-Tian-Donaldson) 对极化对(X, L) (即$[\omega_g]=\sqrt{-1}\,\Theta(h)$) 在$[\omega_g]$中cscK度量的存在性等价于(X, L)的K-稳定性

Thm 8 (Chen-Cheng, 2018) 在良好的约束条件下,$[\omega]$同类中cscK度量存在等价于K_ω能量泛函的properness.

二 Aubin-Yau和Calabi-Yau定理

Kähler流形上的整体 $\partial\bar\partial$-引理给出了

$$\{\text{与}\omega\text{属于同一类的Kähler度量}\omega'\}\longleftrightarrow\{\omega_\varphi=\omega+\sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi>0,\ \varphi\in C^\infty(X,\mathbb{R})\}$$

故求解Kähler度量 $\Longleftrightarrow$ 求解 φ

在KE度量问题中，φ满足的方程为Monge-Ampere方程

该类方程解的存在性使用的方法为"连续性方法" 下面以具体例子加以阐释.

1. Aubin-Yau定理

对 X 紧Kähler, $c_1(X)<0$ 取初始Kähler度量 $\overset{\omega}{\underset{\shortparallel}{\omega_g}}\in \overset{-[Ric(\omega_g)]}{\underset{\shortparallel}{-2\pi c_1(X)}}$

则 $\exists h\in C^\infty(X)$ s.t. $Ric(\omega)+\omega=\sqrt{-1}\partial\bar\partial h$ (*)

其中 h 由条件(*) $\int_X(e^h-1)\omega^n=0$ 唯一确定

现欲找 $\varphi\in C^2(X)$ s.t $\omega_\varphi=\omega+\sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi>0$

$$Ric(\omega_\varphi)+\omega_\varphi=0$$

$$\Updownarrow \text{坐标}$$

$$g_{i\bar j}+\varphi_{i\bar j}-\partial_i\partial_{\bar j}\log\det(g_{p\bar q}+\varphi_{p\bar q})=0$$

$((*)\Leftrightarrow -\partial_i\partial_{\bar j}\log\det(g_{p\bar q})+g_{i\bar j}=h_{i\bar j})$ $\Updownarrow$

$$-\partial_i\partial_{\bar j}\left(\log\frac{\det(g_{p\bar q}+\varphi_{p\bar q})}{\det(g_{p\bar q})}-h-\varphi\right)=0$$

$$\Updownarrow$$

$$(\omega+\sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi)^n=e^{h+\varphi}\omega^n \qquad (\triangle)$$

$(\triangle)$: Monge-Ampere方程（称为二阶非线性）

Lemma (Calabi) (△)的解唯一

Pf. 若φ_1, φ_2均为解 令$\psi = \varphi_2 - \varphi_1$. 则 $(\omega + \sqrt{-1}\partial\bar\partial\psi)^n = e^\psi \omega^n$

$\Rightarrow$ 在ψ的最大值点处 $\omega^n \geq e^\psi \omega^n$ $\Rightarrow \psi \leq 0$ 类似地 $\psi \geq 0$ $\Rightarrow \psi \equiv 0$.

则只须证(△)解存在. "连续性方法". 固定$k \geq 2$整数. $\alpha \in (0,1)$

添加参数$t \in [0,1]$: $(\omega + \sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi)^n = e^{th+\varphi}\omega^n$ $\quad (\triangle_t)$

$I = \{t \in [0,1] \mid (\triangle_t)\text{有}C^{k,\alpha}\text{解}\} \Rightarrow 0 \in I$ (因为$\varphi=0$为解)

由$[0,1]$的连通性, 只须证I既开又闭 (则$I=[0,1]$. $1 \in I$)

①开性: $\Phi: [0,1] \times C^{k,\alpha}(X) \to C^{k-2,\alpha}(X)$

$$(t,\varphi) \mapsto \log \frac{(\omega+\sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi)^n}{\omega^n} - \varphi - th$$

$\Rightarrow D_\varphi\Phi(\psi) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \Phi(t, \varphi+s\psi) = (\Delta_\varphi - 1)\psi \xrightarrow{\text{Fredholm}} D_\varphi\Phi$ invertible

$\left(\log \frac{(\omega+\sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi)^n}{\omega^n} = \log\det(g_{i\bar j} + \varphi_{i\bar j}) - \log\det(g_{i\bar j})\right.$

$\Rightarrow d\log \frac{(\omega+\sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi)^n}{\omega^n} \overset{(*)}{=} g_\varphi^{i\bar j} d\varphi_{i\bar j} = \Delta_\varphi(d\varphi)$ $\quad \left.(*): d|A| = |A|\operatorname{tr}(A^{-1}dA)\right)$

$\Rightarrow$ 隐函数定理 (IFT): I开

②闭性: 对$t_i \in I \leadsto \varphi_i$为解 $\quad t_i \to t_0 \in [0,1]$

若能证 $\|\varphi_i\|_{C^{k,\alpha}} \leq C$ 则由Arzela-Ascoli定理.

有子列 $\varphi_{i_j} \xrightarrow{C^{k,\alpha}} \varphi_0$. φ_0给出$(\triangle_{t_0})$的解.

故只须证$C^{k,\alpha}$有界.

"Elliptic Bootrapping": $C^0 \to C^2 \xrightarrow{\text{Evans-Krylov}} C^{2,\alpha} \xrightarrow{\text{Schauder}} C^{k,\alpha}$

故只须证：(i) C^0估计　　(ii) C^0估计 $\to C^2$估计

(i) 设 φ 在 x_0 处取最大值，则 $e^{th(x_0)+\max\varphi}\omega^n(x_0) \le \omega^n(x_0)$

$$\Rightarrow \varphi \le -th(x_0) \le \|h\|_\infty$$

同理 $\varphi \ge -\|h\|_\infty$ $\Rightarrow \|\varphi\|_\infty \le \|h\|_\infty$

(ii) 首先 $0 < g^{i\bar{j}}(g_{i\bar{j}} + \varphi_{i\bar{j}}) \triangleq tr_\omega \omega_\varphi = n + \Delta\varphi$

在一点 p 处，取 normal coordinate (关于 g)　　则 $R_{i\bar{j}k\bar{l}} = -\partial_i\partial_{\bar{j}} g_{k\bar{l}}$ $\Rightarrow$

$$\Delta_\varphi tr_\omega \omega_\varphi = g_\varphi^{i\bar{j}} \partial_i \partial_{\bar{j}} (g^{k\bar{l}} g_{\varphi,k\bar{l}})$$

$(A^{-1})' = -A^{-1}A'A^{-1}$

$$= g_\varphi^{i\bar{j}} \partial_i \left(g^{k\bar{l}} \frac{\partial g_{\varphi,k\bar{l}}}{\partial \bar{z}_j} - g^{p\bar{l}} g^{\bar{q}k} \frac{\partial g_{p\bar{q}}}{\partial \bar{z}_j} g_{\varphi,k\bar{l}} \right)$$

$$= g_\varphi^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}} \frac{\partial^2 g_{\varphi,k\bar{l}}}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} + g_\varphi^{i\bar{j}} g^{p\bar{l}} g^{\bar{q}k} R_{i\bar{j}p\bar{q}} g_{\varphi,k\bar{l}}$$

$$= g_\varphi^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}} \left(-R(g_\varphi)_{i\bar{j}k\bar{l}} + g_\varphi^{p\bar{q}} \varphi_{p\bar{l}\bar{j}} \varphi_{k\bar{q}i} \right) + \cdots$$

$$= -tr_\omega Ric(\omega_\varphi) + g_\varphi^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}} g_\varphi^{p\bar{q}} \varphi_{p\bar{l}\bar{j}} \varphi_{k\bar{q}i} + \cdots$$

$$\Rightarrow \Delta_\varphi \log tr_\omega \omega_\varphi = g_\varphi^{i\bar{j}} \partial_i \frac{\partial_{\bar{j}} tr_\omega \omega_\varphi}{tr_\omega \omega_\varphi} = \frac{\Delta_\varphi tr_\omega \omega_\varphi}{tr_\omega \omega_\varphi} - \frac{|\partial tr_\omega \omega_\varphi|_\varphi^2}{(tr_\omega \omega_\varphi)^2}$$

$$= \frac{1}{tr_\omega \omega_\varphi} \left(-tr_\omega Ric(\omega_\varphi) + g_\varphi^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}} g_\varphi^{p\bar{q}} \varphi_{p\bar{l}\bar{j}} \varphi_{k\bar{q}i} \right)$$

$$+ \frac{1}{(tr_\omega \omega_\varphi)^2} \left((tr_\omega \omega_\varphi) g_\varphi^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}} g_\varphi^{p\bar{q}} \varphi_{p\bar{l}\bar{j}} \varphi_{k\bar{q}i} - |\partial tr_\omega \omega_\varphi|_\varphi^2 \right)$$

$$\triangleq A + B$$

处理B：在1点处，不妨设 $\varphi_{i\bar j}=\lambda_i\delta_{ij}$，$\lambda_i>-1$，则

$$g_{\varphi i\bar j}=(1+\lambda_i)\delta_{ij} \qquad g_\varphi^{i\bar j}=\frac{\delta_{ij}}{1+\lambda_i} \Rightarrow \mathrm{tr}_\omega\omega_\varphi=\sum_i(1+\lambda_i)$$

$$g_\varphi^{i\bar j}g^{k\bar l}g_\varphi^{p\bar q}\varphi_{p\bar l\bar j}\varphi_{k\bar q i}=\sum_{i,p,k}\frac{1}{1+\lambda_i}\frac{1}{1+\lambda_p}|\varphi_{i\bar p k}|^2$$

则 $$|\partial\,\mathrm{tr}_\omega\omega_\varphi|^2=\sum_i\frac{1}{1+\lambda_i}|\partial_i(g^{k\bar l}g_{\varphi k\bar l})|^2=\sum_i\frac{1}{1+\lambda_i}\Big|\sum_k\varphi_{k\bar k i}\Big|^2$$

$$\le\sum_i\frac{1}{1+\lambda_i}\Big(\sum_k 1+\lambda_k\Big)\Big(\sum_p\frac{|\varphi_{p\bar p i}|^2}{1+\lambda_p}\Big)\le(\mathrm{tr}_\omega\omega_\varphi)\sum_{i,p,k}\frac{1}{1+\lambda_i}\frac{1}{1+\lambda_p}|\varphi_{i\bar p k}|^2$$

故 $B\ge 0$！

$$\Rightarrow\Delta_\varphi\log\mathrm{tr}_\omega\omega_\varphi\ge A=\frac{-\mathrm{tr}_\omega Ric(\omega_\varphi)}{\mathrm{tr}_\omega\omega_\varphi}+\frac{1}{\mathrm{tr}_\omega\omega_\varphi}\sum_{i,k}\frac{1+\lambda_k}{1+\lambda_i}R_{i\bar i k\bar k}$$

$$\ge\frac{-\mathrm{tr}_\omega Ric(\omega_\varphi)}{\mathrm{tr}_\omega\omega_\varphi}+\underbrace{\inf_{i,k}R_{i\bar i k\bar k}}_{\ge -C}\,\mathrm{tr}_{\omega_\varphi}\omega$$

另一方面 $(*_t)\Rightarrow Ric(\omega_\varphi)=Ric(\omega)-t\sqrt{-1}\partial\bar\partial h-\sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi$

$$=(1-t)(Ric(\omega)+\omega)-\omega_\varphi$$

$$\Rightarrow -\mathrm{tr}_\omega Ric(\omega_\varphi)\ge\mathrm{tr}_\omega\omega_\varphi-C'$$

故 $\Delta_\varphi\log\mathrm{tr}_\omega\omega_\varphi\ge 1-C'\,\mathrm{tr}_{\omega_\varphi}\omega$ （用到 $\frac{1}{\mathrm{tr}_\omega\omega_\varphi}\le\mathrm{tr}_{\omega_\varphi}\omega$）

$$\Delta_\varphi F\triangleq\Delta_\varphi(\log\mathrm{tr}_\omega\omega_\varphi-(C'+1)\varphi)\ge -C''+\mathrm{tr}_{\omega_\varphi}\omega$$

在F的最大值点处，有 $\mathrm{tr}_{\omega_\varphi}\omega\le C''$ $\Rightarrow\sum_i\frac{1}{1+\lambda_i}\le C''$

由 $\prod_i(1+\lambda_i)=e^{th+\varphi}\le C_0$ $\Rightarrow\sum_i 1+\lambda_i\le C_0(C'')^{n-1}$

$$\Rightarrow\log\mathrm{tr}_\omega\omega_\varphi\le\log(nC_0(C'')^{n-1})$$

则F有一致上界 $\Rightarrow$ $\mathrm{tr}_\omega\omega_\varphi$ 有一致上界

C^2估计 ✓ 闭性得证！

2. Calabi-Yau定理

$[\eta]=2\pi c_1(X)=[Ric(\omega)] \Rightarrow \exists!\ h$ s.t. $\begin{cases} Ric(\omega)-\eta=\sqrt{-1}\partial\bar\partial h \\ \int_X e^h\omega^n=\int_X \omega^n \end{cases}$

找φ s.t. $\omega+\sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi>0$

$Ric(\omega_\varphi)=\eta \Rightarrow -\partial_i\bar\partial_j \log\det(g_{p\bar q}+\varphi_{p\bar q})=-\partial_i\bar\partial_j\log\det(g_{p\bar q})-h_{i\bar j}$

$$\Rightarrow (\omega+\sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi)^n=e^h\omega^n \qquad (\Delta')$$

唯一性同前. 求解存在性. 仍用连续性论证.

$$(\omega+\sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi)^n=e^{th+c_t}\omega^n \quad (\Delta'_t)$$

c_t由$\int_X e^{th+c_t}\omega^n=\int_X\omega^n$决定 $\quad C_0^{k,\alpha}=\{\varphi\in C^{k,\alpha}(X) \mid \int_X\varphi\omega^n=0\}$

$I'=\{t\in[0,1] \mid (\Delta'_t)有C_0^{k,\alpha}解\}$ 则$c_0=0$ $0\in I'$

①开性: $\Phi: C_0^{k,\alpha}\to C_v^{k-2,\alpha}=\{f\in C^{k-2,\alpha}(X) \mid \int_X f\omega^n=\int_X\omega^n\}$

$$\varphi\mapsto \frac{(\omega+\sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi)^n}{\omega^n}$$

$D\Phi_\varphi(\psi)=\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\Phi(\varphi+s\psi)=\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\frac{\det(g_{i\bar j}+\varphi_{i\bar j}+s\psi_{i\bar j})}{\det(g_{i\bar j})}$

$(D\Phi_\varphi: C_0^{k,\alpha}\to C_0^{k-2,\alpha})$ $\quad =\frac{\omega_\varphi^n}{\omega^n}g_\varphi^{i\bar j}\psi_{i\bar j}=\frac{\omega_\varphi^n}{\omega^n}\Delta_\varphi\psi$

则$D\Phi_\varphi$可逆 $\overset{IFT}{\Rightarrow}$ 开性!

②闭性: $C^0\to C^2$部分同Aubin-Yau

只须给出C^0估计

$(\omega+\sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi)^n = F\omega^n \quad F=e^{th+C_t}$ 则F一致有界

$\Downarrow$

$(F-1)\omega^n = (\omega+\sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi)^n-\omega^n = \sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi\wedge\sum_{j=0}^{n-1}\omega_\varphi^{n-j-1}\wedge\omega^j$

令 $\psi=\sup_X\varphi-\varphi+1\geq 1 \quad \alpha\geq 0$ 则

$$\int_X \psi^{\alpha+1}(F-1)\omega^n = (\alpha+1)\sum_{j=0}^{n-1}\int_X\psi^\alpha\sqrt{-1}\partial\psi\wedge\bar\partial\psi\wedge\omega_\varphi^{n-j-1}\wedge\omega^j$$

只留 $j=n-1$

$$\geq(\alpha+1)\int_X\psi^\alpha\sqrt{-1}\partial\psi\wedge\bar\partial\psi\wedge\omega^{n-1}$$

$$=\frac{(\alpha+1)}{(\frac{\alpha}{2}+1)^2}\int_X\sqrt{-1}\,\partial\psi^{\frac{\alpha}{2}+1}\wedge\bar\partial\psi^{\frac{\alpha}{2}+1}\wedge\omega^{n-1}$$

$$=\frac{\alpha+1}{(\frac{\alpha}{2}+1)^2}\int_X\|\nabla\psi^{\frac{\alpha}{2}+1}\|^2$$

$$\Rightarrow\|\nabla\psi^{\frac{\alpha}{2}+1}\|_2^2\leq C_1(\alpha+2)^2\int_X\psi^{\alpha+2}\omega^n$$

由Sobolev不等式，对 $\beta=\frac{n}{n-1}>1$

$$\|\psi\|_{\beta p}^p\leq C_2(\|\nabla\psi^{\frac{p}{2}}\|_2^2+\|\psi\|_p^p)$$

取 $p=\alpha+2\geq 2$ 则

$$\|\psi\|_{\beta p}\leq C_2^{\frac{1}{p}}\left(C_1p^2\int_X\psi^p\omega_n+\int_X\psi^p\omega^n\right)^{\frac{1}{p}}\leq(C_3p^2)^{\frac{1}{p}}\|\psi\|_p$$

由经典Moser迭代过程 $p\to p\beta\to p\beta^2\cdots$ 故 $L^2\to L^\infty$ 估计

则只须做 L^2 估计，通过取坐标卡只须在 $B(y.R)\subseteq\mathbb{C}^n$ 中处理

则 $\psi(x)\geq(\mathrm{Vol}(B(x.2R))^{-1}\int_{B(x.2R)}\psi\geq(\mathrm{Vol}(B(y.2R))^{-1}\int_{B(y.R)}\psi$

$$\Rightarrow\|\psi\|_{L^1(B(y.R))}\leq\mathrm{Vol}(B(y.2R))$$

$$\Rightarrow\|\psi\|_{L^2(B(y.R))}\leq C(n.R)\|\psi\|_{L^1(B(y.R))}$$

#

三. Fano流形上的KE度量(I)

Fano流形X上初始度量ω_g $\quad \omega \in 2\pi C_1(X) = [Ric(\omega)]$

$$Ric(\omega) - \omega = \partial\bar\partial h_\omega \qquad \int_X e^{h_\omega}\omega^n = \int_X \omega^n$$

须找$\varphi \in C^2(X)$ 对$\omega_\varphi = \omega + \partial\bar\partial\varphi$ $\begin{cases} \omega + \partial\bar\partial\varphi > 0 \\ Ric(\omega_\varphi) = \omega_\varphi \end{cases}$

$$\Rightarrow -\partial_i\bar\partial_j \log\det(g_{p\bar q} + \varphi_{p\bar q}) = -\partial_i\bar\partial_j \log\det(g_{p\bar q}) - h_{\omega, i\bar j} + \varphi_{i\bar j}$$

$$\Rightarrow (\omega + \partial\bar\partial\varphi)^n = e^{h_\omega - \varphi}\omega^n \qquad (\triangle)$$

连续性方法: $(\omega + \partial\bar\partial\varphi)^n = e^{h_\omega - t\varphi}\omega^n \qquad (\triangle_t)$

由之前的讨论 $(\triangle_t)$的C^0估计 $\Rightarrow$ KE度量的存在性

然而仅$C_1(X)>0$不能保证C^0估计成立!

1 $\eta(M)$与Futaki不变量

对Kähler流形(M, g, J). 定义$\eta(M)$为M上全纯向量场的李代数.

则$\eta(M) \cong Lie(Aut(M))$ $\quad Aut(M)$为M上全纯自同胚群

在Fano流形上KE度量的障碍研究中. $\eta(M)$是主要对象

Thm (Matsushima, 1958) 若M为紧Einstein-Kähler流形. 则

$\eta = \mathfrak{g} + J\mathfrak{g}$ 进而$\eta(M)$为reductive的 这里$\mathfrak{g}$为Killing场李代数.

(该Thm证明不困难. 只须考虑η与$\mathfrak{g}$的对偶. 并利用Bochner和Lichnerowicz对Kähler流形上Killing-form的刻画即可)

Rmk 对Fano曲面，田在 Invent. 1990 证明了这是充分条件！

Fano曲面均形如 $\begin{cases} \mathbb{CP}^1\times\mathbb{CP}^1 \\ \mathbb{CP}^2 \# n\overline{\mathbb{CP}^2} \ (0\le n\le 8) \end{cases}$

Tian: $\forall 3\le n\le 8$. $\exists M$ 形如 $\mathbb{CP}^2\# n\overline{\mathbb{CP}^2}$ 有正KE度量.

(证明: 利用前面介绍的 $\alpha(M)$)

$\mathbb{CP}^1\times\mathbb{CP}^1$. $\mathbb{CP}^2$: symmetric. 有KE度量

$n=1.2$: $\eta(M)$ not reductive. $n=3.4$: Fano 复结构唯一 ✓

$n=5\sim 8$: 建立 strong partial C^0-估计   #.

Futaki 在1983给出了 $\eta(M)$ 的一个特征:

对 ω 为代表 $c_1(M)$ 的正 (1.1) 形式   则设 $Ric(\omega)-\omega=\frac{i}{2\pi}\partial\bar\partial F$

定义 $f: \eta(M)\to\mathbb{C}$ $\eta_0(M)=\ker f$

$X\mapsto\int_M XF\omega^m$

Thm (Futaki) f 与 ω 的选取无关. 故 $\delta_M=\dim\eta(M)/\eta_0(M)$

只与 M 的复结构有关   若 M 上有KE度量则 $\delta_M=0$

Pf. 对光滑族 ω_t，f_t 为对应的泛函

由于 ω_t 均属于 $[C_1(M)]$ 故设 $\frac{\partial\omega}{\partial t}=\frac{i}{2\pi}\partial\bar\partial\phi_t$

$$\Rightarrow \frac{\partial(\omega^m)}{\partial t}=m\frac{\partial\omega}{\partial t}\wedge\omega^{m-1}=\Delta_t\phi\,\omega^m$$

$$\frac{\partial Ric(\omega)}{\partial t}=-\frac{i}{2\pi}\partial\bar\partial\Delta_t\phi \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\partial\bar\partial F_t)=-\partial\bar\partial(\Delta_t\phi+\phi)$$

故不妨取 F_t s.t. $\frac{\partial F}{\partial t}=-\Delta_t\phi-\phi$

则对 $X\in\eta(M)$. $\frac{df_t(X)}{dt}=\int_M\left(X\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)+(XF)\Delta_t\phi\right)\omega^m$

被积项 $=X(-\Delta_t\phi-\phi)+(XF)\Delta_t\phi$

(normal coord) $=X^\alpha(-g_t^{\lambda\bar\mu}\phi_{\lambda\bar\mu\alpha}-\phi_\alpha+F_\alpha g_t^{\lambda\bar\mu}\phi_{\lambda\bar\mu})$

X 全纯 $\quad=g_t^{\lambda\bar\mu}(-X^\alpha\phi_{\lambda\alpha}+X^\alpha\phi_\lambda F_\alpha)_{\bar\mu}$ $\Rightarrow$ 由散度定理得证

Prop f 还是 $Aut(M)$-不变的

Pf. 对 $a\in Aut(M)$ $X\in\eta(M)$ 设 X 生成 $h_t\in Aut(M)$

则 $\int_M(a\circ h_t\circ a^{-1})^*F\,\omega^m=\int_M F((a\circ h_t\circ a^{-1})^{-1})^*\omega^m$

$$=\int_M(a\circ h_t)^*F(a^*\omega)^m$$

$$=\int_M(h_t^*(a^*F))(a^*\omega)^m$$

对 t 求导 $\Rightarrow\int_M(ad_aX)F\,\omega^m=\int_M(X(a^*F))(a^*\omega)^m$

由 $Ric(a^*\omega)-(a^*\omega)=a^*F$. 由前 Thm 有 $f(ad_aX)=f(X)$ ✓

Cor. ① f 为 Lie 代数同态

② 若 $\mathfrak{g}(M)$ 半单，则 $\delta_M=0$. 若 $\delta_M=1$ 则 $\mathfrak{g}(M)$ 含一个 $\mathrm{Aut}(M)$-不变的超平面

③ 令 H_m 为 $\mathbb{CP}^m$ 上超平面丛. $E=\pi_1^*H_1\oplus\pi_2^*H_2$ 为 $\mathbb{CP}^1\times\mathbb{CP}^2$ 上的丛

则 $P(E)$ 的全空间 M 满足 $\mathfrak{g}(M)$ reductive 但 $\delta_M=1$ $\Rightarrow$ 无 KE 度量!

2 泛函 I, J, F

对 ω_0, $\omega=\omega_0+\partial\bar\partial\phi$, $\phi\in P(M,g)=\{\phi\in C^2(M) \mid \omega+\sqrt{-1}\partial\bar\partial\phi\geq 0,\ \sup_M\phi=0\}$

定义 I, J 为 $P(M,g)$ 上的泛函

$$I(\phi)=\frac{(\sqrt{-1})^m}{V}\int_M\phi(\omega_0^m-\omega^m)$$

$$J(\phi)=\int_0^1\frac{I(s\phi)}{s}ds \qquad \text{其中 } V=(\sqrt{-1})^m\int_M\omega_0^m$$

则
$$J(\phi)=\frac{(\sqrt{-1})^m}{V}\int_0^1 ds\int_M\phi\left(\omega_0^m-(\omega_0+s\partial\bar\partial\phi)^m\right)$$

$$=\frac{(\sqrt{-1})^m}{V}\int_0^1 s\,ds\int_M\partial\phi\wedge\bar\partial\phi\wedge\sum_{k=0}^{m-1}\omega_0^{m-k-1}\wedge\omega^k\left(\sum_{j=0}^{m-1}C_j^k(1-s)^{j-k}s^k\right)$$

$$=\frac{(\sqrt{-1})^m}{V}\int_M\partial\phi\wedge\bar\partial\phi\wedge\sum_{k=0}^{m-1}\omega_0^{m-k-1}\wedge\omega^k\left(\sum_{j=k}^{m-1}\frac{k+1}{(j+2)(j+1)}\right)$$

$$=\frac{(\sqrt{-1})^m}{V}\int_M\partial\phi\wedge\bar\partial\phi\wedge\left(\sum_{k=0}^{m-1}\frac{m-k}{m+1}\omega_0^{m-k-1}\wedge\omega^k\right)$$

$$I(\phi)=\frac{(\sqrt{-1})^m}{V}\int_M\partial\phi\wedge\bar\partial\phi\wedge\sum_{k=0}^{m-1}\omega_0^{m-k-1}\wedge\omega^k$$

$$\Rightarrow\ \frac{m+1}{m}J(\phi)\leq I(\phi)\leq(m+1)J(\phi)$$

下面的关于 I, J 的结果非常重要

Prop⑩ $t\to\varphi_t$ 为 $\mathring{P}(M,g)$ 中的一族函数 则

$$\frac{d}{dt}\left(I(\varphi_t)-J(\varphi_t)\right)=-\frac{(\sqrt{-1})^m}{V}\int_M \varphi_t\,(\Delta_{\varphi_t}\dot{\varphi}_t)(\omega_0+\sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi_t)^m$$

pf. $t=t_0$处，记 $\varphi=\varphi_{t_0}$, $\dot\varphi=\dot\varphi_{t_0}$ $\Rightarrow \varphi_t=\varphi+(t-t_0)\dot\varphi+o(|t-t_0|)$

$$\Rightarrow I(\varphi_t)-J(\varphi_t)=\frac{(\sqrt{-1})^m}{V}\int_M \partial\varphi_t\wedge\bar\partial\varphi_t\wedge\sum_{k=0}^{m-1}\frac{k+1}{m+1}\omega_0^{m-k-1}\wedge\omega_t^k$$

$$=I(\varphi)-J(\varphi)+(t-t_0)\frac{(\sqrt{-1})^m}{V}\Big[\int_M\partial\dot\varphi\wedge\bar\partial\varphi\wedge\sum_{k=0}^{m-1}\frac{k+1}{m+1}\omega_0^{m-k-1}\wedge\omega^k$$

$$+\int_M\partial\varphi\wedge\bar\partial\dot\varphi\wedge\sum_{k=0}^{m-1}\frac{k+1}{m+1}\omega_0^{m-k-1}\wedge\omega^k+\int_M\partial\varphi\wedge\bar\partial\varphi\wedge\sum_{k=1}^{m-1}\frac{k(k+1)}{m+1}\omega_0^{m-k-1}\wedge\partial\bar\partial\dot\varphi\wedge\omega^{k-1}\Big]$$

$$+o(|t-t_0|)$$

$$\text{故}\ \frac{d}{dt}(I(\varphi_t)-J(\varphi_t))=\frac{(\sqrt{-1})^m}{V}\Big[-\int_M\varphi\partial\bar\partial\dot\varphi\wedge\sum_{k=0}^{m-1}\frac{2(k+1)}{m+1}\omega_0^{m-k-1}\wedge\omega^k$$

$$-\int_M\varphi\partial\bar\partial\varphi\wedge\sum_{k=1}^{m-1}\frac{k(k+1)}{m+1}\omega_0^{m-k-1}\wedge\partial\bar\partial\dot\varphi\wedge\omega^{k-1}\Big]$$

$$=-\frac{(\sqrt{-1})^m}{V}\int_M\varphi\partial\bar\partial\dot\varphi\wedge\Big[2\sum_{k=0}^{m-1}\frac{k+1}{m+1}\omega_0^{m-k-1}\wedge\omega^k+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{k(k+1)}{m+1}(\omega_0^{m-k-1}\wedge\omega^k-\omega_0^{m-k}\wedge\omega^{k-1})\Big)$$

$$=-\frac{(\sqrt{-1})^m}{V}\int_M\varphi\partial\bar\partial\dot\varphi\wedge\Big[2\sum_{k=0}^{m-1}\frac{k+1}{m+1}\omega_0^{m-k-1}\wedge\omega^k+\sum_{k=1}^{m-2}\frac{k(k+1)-(k+1)(k+2)}{m+1}\omega_0^{m-k-1}\wedge\omega^k$$

$$+\frac{m(m-1)}{m+1}\omega^{m-1}-\frac{2}{m+1}\omega_0^{m-1}\Big]$$

$$=-\frac{m(\sqrt{-1})^m}{V}\int_M\varphi\partial\bar\partial\dot\varphi\wedge\omega^{m-1}=-\frac{(\sqrt{-1})^m}{V}\int_M\varphi\Delta_\varphi\dot\varphi\,\omega^m \qquad \#$$

Cor. 若 φ_t 为 $(\ast_t)$ 的解，则 $I(\varphi_t)-J(\varphi_t)$ 单增

pf. φ_t为解 $\Rightarrow \det(g_{i\bar j}+\varphi_{i\bar j})=\det(g_{i\bar j})e^{h_{\omega_0}-t\varphi_t}$

$$\xRightarrow{\text{对}t\text{求导}}\ \Delta_{\varphi_t}\dot\varphi_t=-t\dot\varphi_t-\varphi_t$$

又 $\mathrm{Ric}(\omega_t)=t\omega_t+(1-t)\omega_0>t\omega_t \xRightarrow{\text{Bochner}} \Delta_{\varphi_t}-t>0$

由上面Prop得证

Prop② 对 $(\triangle_t)$ 的解 有 $t\left(J(\varphi_t)-\frac{1}{V}\int_M \varphi_t\omega_0^m\right)=-\left(I(\varphi_t)-J(\varphi_t)\right)$
(直接计算验证)

再定义 $P(M,g)$ 上泛函 $F(\varphi)=J(\varphi)-\frac{1}{V}\int_M \varphi\omega_0^m-\log\left(\frac{1}{V}\int_M e^{h_{\omega_0}-\varphi}\omega_0^m\right)$

记 $P(M,g)_C=\{\varphi\in P(M,g)\mid \operatorname{osc}_M\varphi\le C(1+J(\varphi))\}$

称 F 是 proper 的. 若 $\forall C>0$. $\{\varphi_i\}\subset P(M,g)_C$

只要 $\varliminf_{i\to\infty} J(\varphi_i)=\infty$ 就有 $\varliminf_{i\to\infty} F(\varphi_i)=\infty$

Rmk. 上述语言可用于定义 CM 稳定性

Thm (田, 1997) 对 Fano 流形 M 且 $\eta(M)=0$. 则 M 上有 KE 度量 当且仅当 F 是 proper 的.

pf of "当": 对 $(\omega_0+\partial\bar\partial\varphi)^m=e^{h_{\omega_0}-t\varphi_t}\omega_0^m$. 只须证 $J(\varphi_t)$ 有界

由 Cor $\Rightarrow I(\varphi_t)-J(\varphi_t)\ge 0 \xRightarrow{\text{Prop②}} J(\varphi_t)-\frac{1}{V}\int_M\varphi_t\omega_0^m\ge 0$

故 $F(\varphi)\le -\log\left(\frac{1}{V}\int_M e^{h_{\omega_0}-t\varphi_t}\omega_0^m\right)$

$\overset{\log凹}{\le}\frac{1-t}{V}\int_M\varphi_t(\omega_0+\partial\bar\partial\varphi_t)^m$

见下一节 Lemma(1) $\le(1-t)C(1+\inf_M\varphi_t)\le C$

Lemma(2) 又 $\sup_M\varphi_t\le C\left(1+\frac{1}{V}\int_M\varphi_t\omega_0^m\right)\Rightarrow\varphi_t\in P(M,g)_C$

由 F 的 proper 性 $J(\varphi_t)$ 有界

Pf of "仅当" → "smoothing" of Kähler metric

Lemma. 对 ω 为 $c_1(M)>0$ 中 Kähler 度量 $Ric(\omega)\geq(1-\varepsilon)\omega$ 则∃另一个 Kähler 度量 $\omega'=\omega+\partial\bar\partial\varphi$ s.t. (1) $\|\varphi\|_{C^0}\leq e\|h_\omega\|_{C^0}$

(2) $\|h_{\omega'}\|_{C^{\frac12}}\leq C\left(1+\|h_\omega\|_{C^0}^2\right)^{n+1}\varepsilon^\beta$ $\quad \beta=\frac14 e^{-n}$

设 $Ric(\omega_{KE})=\omega_{KE}$. ω 如上. $\Rightarrow \omega_{KE}=\omega+\partial\bar\partial\varphi_1$ $\quad \omega_{KE}^n=e^{h_\omega-\varphi_1}\omega^n$

则 (Δ_t) 在 $t=1$ 处有解 $\Rightarrow [0,1]$ 有解! (因为 $I(\varphi_t)-J(\varphi_t)\uparrow$ $\|\varphi_t\|_{C^3}$ 一致有界)

$h_{\omega_t}=-(1-t)\varphi_t+c_t$ $\quad$ c_t 由 $\int_M e^{-(1-t)\varphi_t+c_t}\omega_t^n=\int_M\omega_t^n$ 决定

$Ric(\omega_t)=t\omega_t+(1-t)\omega$ $\quad$ 则 $|c_t|\leq(1-t)\|\varphi_t\|_{C^0}$ $\quad$ (i)

由Lemma. $\exists\,\omega_t'=\omega_t+\partial\bar\partial u_t$ s.t. $\begin{cases}\|u_t\|_{C^0}\leq e(1-t)\|\varphi_t\|_{C^0}\\ \|h_{\omega_t'}\|_{C^{\frac12}}\leq C(1-t)^\beta\left(1+(1-t)^2\|\varphi_t\|_{C^0}^2\right)^{n+1}\end{cases}$

取 $\int_M e^{h_{\omega_t}-u_t+\mu_t}\omega_t'^n=V$ $\Rightarrow |\mu_t|\leq e(1-t)\|\varphi_t\|_{C^0}$ $\quad$ (ii)

再取 ψ_t s.t. $\omega_{KE}=e^{h_{\omega_t'}-\psi_t}\omega_t'^n$. $\quad \omega_{KE}=\omega_t'+\partial\bar\partial\psi_t$

$\Rightarrow \varphi_t=\varphi_1-\psi_t-u_t+\mu_t+c_t \overset{(i)(ii)}{\Longrightarrow}$ 还须控制 $\|\psi_t\|$

对 $\forall\ \frac12\omega_{KE}\leq\omega'\leq2\omega_{KE}$. Lemma(2)中有统一的 C

定义 $\Phi_t: C^{2,\frac{1}{2}}(M)\to C^{\frac{1}{2}}(M)$ $\qquad D\Phi_t(0) = -\Delta_1 - 1 \Rightarrow$ 可逆

$$\psi \mapsto \log\frac{(\omega_1-\partial\bar\partial\psi)^n}{\omega_1^n} - h_{\omega_t'} - \psi$$

$\overset{IFT}{\Rightarrow} \exists\,\delta>0$ (不妨设 $C\delta<\frac{1}{4}$) s.t. $\forall\ \|h_{\omega_t'}\|_{C^{\frac{1}{2}}(\omega_1)}<\delta.$ $\exists!\,\psi$ s.t. $\Phi_t(\psi)=0$

$\|\psi\|_{C^{2,\frac{1}{2}}(\omega_1)}\le C\delta$

取 t_0 s.t. $(1-t_0)^\beta\left(1+(1-t_0)^2\|\varphi_{t_0}\|_{C^0}\right)^{n+1} = \sup\limits_{t_0\le t\le 1}\cdots = \frac{\delta}{4C}$

Claim: $\forall t\in[t_0,1]$. s.t. $\|\psi_t\|_{C^{2,\frac{1}{2}}(\omega_1)}<\frac{1}{4}$

否则若 $t\in[t_0,1]$ $\|\psi_t\|_{C^{2,\frac{1}{2}}}=\frac{1}{4}$. 则 $\frac{1}{2}\omega_{KE}\le\omega_t'\le 2\omega_{KE}$

由Lemma(2)和t_0的选取. $\|\psi_t\|_{C^{2,\frac{1}{2}}}\le C\delta<\frac{1}{4}$ 矛盾!

故 $\forall\, t\ge\max\{t_0,\ 1-\frac{1}{4e}\}$ $\|\varphi_t\|_{C^0}\ge(1-3e(1-t))\|\varphi_1\|_{C^0}-1$ $\qquad(*)$

由 $I_\omega(\varphi_t)-J_\omega(\varphi_t)$ 单增 有

$$F_{\omega_{KE}}(-\varphi_1) = -F_\omega(\varphi_1) = \int_0^1 I_\omega(\varphi_t)-J_\omega(\varphi_t)\,dt$$

$$\ge \min\{1-t_0,\tfrac{1}{4e}\}\left[I_\omega(\varphi_{t_0})-J_\omega(\varphi_{t_0})\right]$$

$$\ge \min\{1-t_0,\tfrac{1}{4e}\}\left[I_\omega(\varphi_1)-J_\omega(\varphi_1)\right]-2-2C(1-t_0)^2\|\varphi_{t_0}\|_{C^0}$$

$$\overset{(*)}{\ge} \min\{1-t_0,\tfrac{1}{4e}\}\,J_{\omega_{KE}}(-\varphi_1)-C$$

$\Rightarrow F_{\omega_{KE}}$ proper $\qquad$ #

3. 全纯不变量 $\alpha(M)$

田在1987年引入了如下的全纯不变量 $\alpha(M)$ 来得到KE度量 其思路来源于Moser-Trudinger不等式: $\exists \alpha, \gamma$ 只依赖于 M, s.t

$\forall \phi \in C^2(M)$ 且 $\int_M |\nabla\phi|^2 \le 1$, $\int_M \phi = 0$ 则 $\int_M e^{\alpha\phi^2} \le \gamma$

特别地. 若 $M = S^2$ 则 $\alpha = 4\pi$ 为最佳常数

在Kähler流形 (M, g) 上. 同样考虑最佳常数

$$\alpha(M) = \sup\{\alpha > 0 \mid \exists C > 0 \ \text{s.t.} \int_M e^{-\alpha\phi} \le C \quad \forall \phi \in P(M, g)\}$$

其中 g s.t. $[\frac{1}{2\pi}\omega_g] = c_1(M)$

Ex. $(M, g) = (\mathbb{C}P^m, (m+1)\omega_{FS})$ 则 $\alpha(M) = \frac{1}{m+1}$

Thm (田, 1987) 若 $\alpha(M) > \frac{m}{m+1}$ 则 M 上有KE度量

为了证明之. 只须对 ϕ_t 作 C^0 估计 利用上面的 I, J 的有关结果

田将 C^0 估计转化为积分值估计.

Lemma (1) $\frac{(\sqrt{-1})^m}{V}\int_M (-\phi_t)\omega_t^m \le m \sup_M \phi_t + C$. $C = C(M, g)$

(2) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists C_\varepsilon$ s.t. $\sup_M \phi_t \le (m+\varepsilon)\frac{(\sqrt{-1})^m}{V}\int_M (-\phi_t)\omega_t^m + C_\varepsilon$

(3) For $t \ge \varepsilon \ge 0$ $\exists C_1, C_2$ depending on ε, V s.t. $\forall f \in C^1(M)$

$$C_1\left(\int_M |f|^{\frac{2m}{m-1}} dV_t\right)^{\frac{m-1}{m}} \le C_2 \int_M |f|^2 dV_t + \int_M |\nabla^t f|^2 dV_t$$

Pf of Thm 不妨设 $t_i \to \bar{t}$, $t_i \geq \varepsilon > 0$. 由定义 $\exists \alpha \in (\frac{m}{m+1}, \alpha(M))$

$$\text{s.t.} \int_M e^{-\alpha(\varphi_i - \sup_M \varphi_i)} dV_M \leq C \Rightarrow \int_M e^{(1-\alpha)\varphi_i - \alpha \sup_M \varphi_i - h_\omega} dV_t \leq C$$

由log的凹性 $\int_M (1-\alpha)\varphi_i - \alpha \sup_M \varphi_i - h_\omega \frac{(\sqrt{-1}\omega_i)^m}{V} \leq \log C$

$$\Rightarrow \sup_M \varphi_i \leq \frac{1-\alpha}{\alpha} \int_M (-\varphi_i) \frac{\omega_i^m}{V} + C$$

由Lemma (1) $\int_M (-\varphi_i) \frac{(\sqrt{-1}\omega_i)^m}{V} \leq m \sup_M \varphi_i + C$

$$\leq m \frac{1-\alpha}{\alpha} \int_M (-\varphi_i) \frac{\omega_i^m}{V} + C$$

由 $\alpha > \frac{m}{m+1} \Rightarrow \int_M (-\varphi_i) \frac{dV_i}{V} \leq C \overset{\text{Lemma}(2)}{\Longrightarrow} \sup_M \varphi_i \leq C$

另一方面 令 $\psi = \max\{-\varphi_t, 0\}$ 由 $\Delta_t \varphi_t \leq m$. 有

$$\frac{4p}{(p+1)^2} \int_M |\nabla^t \psi^{\frac{p+1}{2}}|^2 dV_i \leq m \int_M \psi^p dV_i$$

$$\overset{\text{Lemma}(3)}{\Longrightarrow} C_1 \left(\int_M \psi^{(p+1)\frac{m}{m-1}} dV_i\right)^{\frac{m-1}{m}} \leq \frac{m(p+1)^2}{4p} \int_M \psi^p dV_i + C_2 \int_M \psi^{p+1} dV_i$$

再次由经典的Moser迭代. 有

$$\sup_M \psi \leq C \max\{(\int_M \psi^2 dV_i)^{\frac{1}{2}}, 1\}$$

又由于 $\int_M |\nabla^t \psi|^2 dV_i \leq m \int_M \psi dV_i$ $\Delta_t - \varepsilon > 0$. 有

$$\int_M \psi^2 dV_i \leq (\int_M \psi dV_i)^2 + \frac{m}{\varepsilon} \int_M \psi dV_i \leq C$$

故 $-\inf_M \varphi_i = \sup_M \psi \leq C$. #

关于Futaki不变量与K-稳定性

Ding和Tian对更一般的almost Fano簇定义了Futaki不变量

almost Fano簇：不可约，normal，对某个m $K_{Y_{reg}}^{-m}$ 可延拓为Y上的ample线丛L

则对充分大的l，$H^0(Y,L^l)$ 给出嵌入 $\phi: Y\to \mathbb{C}P^N$

$\longrightarrow$ 给出Y上度量 $\omega=\frac{1}{ml}\phi^*\omega_{FS}$

设 $Ric(\omega)-\omega=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}h_\omega$ on Y

记 $\eta(Y)$ 为Y上 $\underbrace{\text{admissible}}_{\text{生成}\ \phi_v(t)\in Aut(Y)\ s.t.\ \phi_v(t)^*L=L}$ 全纯切场的李代数

$\longrightarrow$ 定义Futaki $f_Y: \eta(Y)\to\mathbb{C}$ （同样与ω选取无关）

$v\longmapsto\int_Y v(h_\omega)\omega^n$

对Kähler流形M　M的一个退化指fibration $\pi: W\to\Delta$ 单位圆盘

s.t. M与某个fiber $\pi^{-1}(z)=W_z$ 双全纯

称其为特殊的，若 $W_0=\pi^{-1}(0)$ normal 且 $K_{W_0}^{-m}$ 延拓为W上ample丛

且 $z\mapsto\lambda z$ 提升为 $\sigma(\lambda)\in Aut(W)$

此时记 $v_W=-\sigma'(1)$，W_0为almost Fano簇

称M为K-稳定的，若 $\eta(M)=0$ 且对任何特殊退化W $Re(f_{W_0}(v_W))>0$

现在来证明.

Thm(田,1997) M上有正数量曲率的KE度量 且$\eta(M)=0$. 则M为K-稳定的

1. 广义Futaki不变量的计算, K-能量

对特殊退化$W\to\Delta$ 不妨$W\subset \mathbb{CP}^N\times\Delta$. 向量场$v_W$生成单参子群

$G=\{G(t)\}_{t\in\mathbb{C}^*}\subset SL(N+1,\mathbb{C})$ $\quad G(t)(M)=W_t$. $\quad G(t)(Y)=Y$

$\Rightarrow v=-G'(1)\in\eta(\mathbb{CP}^N)$ $\quad v|_Y=v_W$. $\quad$ 取$\bar\partial\theta_v=\frac{1}{m}i_v\,\omega_{FS}$

令$\omega_t=\frac{1}{m}\omega_{FS}|_{W_t}$. ∇_t'为对应的(1,0)联络 (即$g_t(\nabla_t\psi,w)=\bar\partial\psi(w)$)

Prop(J.田;1992) $f_{W_0}(v_W)=\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{V}\int_{W_t}(\nabla_t'\theta_v)(h_{\omega_t})\omega_t^n$ $\qquad(*)$

Now let $P(M,\omega,\varepsilon)=\{\varphi\in P(M,\omega)\mid \underset{\text{sobolev constant}}{\sigma_\varphi}\le\frac{1}{\varepsilon}\}$

Mabuchi定义了$P(M,\omega)$上的K-能量ν_ω: 对$\{\varphi_t\}\subset P(M,\omega)$.

$\varphi_0=0,\ \varphi_1=\varphi$ 则

$$\nu_\omega(\varphi)=-\frac{1}{V}\int_0^1\int_M\dot\varphi_t\,(Ric(\omega_t)-\omega_t)\wedge\omega_t^{n-1}\,dt$$

ν_ω与$\{\varphi_t\}$选取无关. 且是Aut(M)-不变的

非平凡全纯场
$\updownarrow$ 对应

Thm (Bando. Mabuchi) (M,ω_{KE}). Λ_1: 第一特征函数空间

则 $\forall \varphi \in P(M,\omega_{KE},\varepsilon)$ 且 $P \perp \Lambda_1$ 有

$$V_{\omega_{KE}}(\varphi) \geq a_{1,\varepsilon}\, J_{\omega_{KE}}(\varphi)^{\frac{\beta}{n+2+\beta}} - a_{2,\varepsilon}.$$

其中 $a_{1,\varepsilon}, a_{2,\varepsilon}$ 只与 $n, \varepsilon, \lambda_1$ 有关

$(\varphi_t \perp \Lambda_1)$

则回到 $\mathbb{CP}^N$ 中的setting. $\exists \varphi_t \in C^\infty(M)$. $\pi(t) \in Aut(M)$. s.t.

$$\pi(t)^*\sigma(t)^*\omega_t = \omega_{KE} + \partial\bar\partial\varphi_t. \qquad \omega_{KE}^n = e^{h_{\pi(t)^*\sigma(t)^*\omega_t} - \varphi_t}\, \pi(t)^*\sigma(t)^*\omega_t^n$$

令 $t = e^{-s}$ 定义 $\sigma(t)^*\omega_t = \omega_{KE} + \partial\bar\partial\psi_s$. $\omega_{KE}^n = e^{h_{\sigma(t)^*\omega_t} - \psi_s}\, \sigma(t)^*\omega_t^n$

$$\Rightarrow V_{\omega_{KE}}(\varphi_t) = V_{\omega_{KE}}(\psi_s) = -\frac{1}{V}\int_0^s du \int_M \dot\psi\,(Ric(\tilde\omega_u) - \tilde\omega_u)\wedge \tilde\omega_u^{n-1}$$

其中 $\tilde\omega_u = \sigma(e^{-u})^*\omega_{e^{-u}}$

由 ψ_s 的定义 $\dot\psi = \sigma(t)^* Re(\theta_v) + c$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds}\left(V_{\omega_{KE}}(\psi_s)\right) = Re\left(\frac{1}{V}\int_{W_t} \nabla_t^i \theta_v (h_{\omega_t})\, \omega_t^n\right)$$

(*) $\Rightarrow Re(f_{\omega_0}(v_W)) = \lim_{t\to\infty}\frac{d}{dt}\left(V_{\omega_{KE}}(\varphi_t)\right) \geq 0$

2 Pf of Thm.

只须证 $Re(f_{w_0}(v_w))>0$. 下面给出 (*) 的收敛速度

Prop. $\exists C,\ \gamma>0$ s.t. $\left|\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{V}\int_{W_t}(\nabla'_t\theta_v)(h_{w_t})\,\omega_t^n - f_{w_0}(v_w)\right| \le C|t|^\gamma$

则若 $Re(f_{w_0}(v_w))=0$ $\quad \left|\frac{d}{ds}V_{w_{KE}}(\varphi_s)\right| \le Ce^{-\gamma s}$

则 $V_{w_{KE}}(\varphi_{e^{-s}})$ 有界 $(s\to\infty)$. 即 $V_{w_{KE}}(\varphi_t)$ $(t\to 0)$ 有界

又 $J_{w_{KE}}(\varphi_t)$ 控制 $\|\varphi_t\|_{C^0}$ 和 Thm by Bando-Mabuchi.

只能 $\|\varphi_t\|_{C^0}$ 一致有界

另一方面. 若 $\|\varphi_t\|_{C^0}$ 有界. 则 $G(t)\cdot J(t): M\to W_t$ 收敛到 $\Phi: M\to W_0$

可以验证 Φ 为双全纯映射. 则退化 W 是平凡的 矛盾!

故 $Re(f_{w_0}(v_w))>0$ #

五 Fano流形上的KE度量(III)

Fano流形上KE度量问题在2012-2013完全解决

Thm(Chen-Donaldson-Sun, Tian) 对Fano流形M $\gamma(M)=0$. M为K-稳定的

则M上存在KE度量

下面对田的证明的梗概加以陈述

1 锥KE度量与连续性方法

对D 代表$\lambda C_1(M)$的对偶的divisor 称ω为沿D的角度为$2\pi\beta$的锥KE度量

若$[\omega]=2\pi C_1(M)$ $\quad Ric(\omega)=\mu\omega+2\pi(1-\beta)[D]$ $\quad \mu>0\ (\Rightarrow \beta>1-\frac{1}{\lambda})$

$I=\{\beta\in(1-\frac{1}{\lambda},1]\mid$ 上述锥KE度量存在$\}$ 只须证 $1\in I$

Jeffres-Mazzeo-Rubinstein: $I\neq\phi$

Donaldson: I开.

$\Rightarrow$ 只须证I闭

仍然化为Monge-Ampere方程 $(\omega_\beta+\sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi)^n=e^{h_\beta-\mu\varphi}\omega_\beta^n$ $\quad (*)$

ω_β为锥Kähler度量. 角度$2\pi\beta$. $[\omega_\beta]=2\pi C_1(M)$. h_β由

$Ric(\omega_\beta)=\mu\omega_\beta+2\pi(1-\beta)[D]+\sqrt{-1}\partial\bar\partial h_\beta$. $\int_M e^{h_\beta}\omega_\beta^n=\int_M\omega_\beta^n$ 决定

同前，C^0估计 $\longrightarrow$ (*)的解，但 C^0估计不一定成立

只证明了偏 C^0估计 $\longrightarrow$ “CM稳定 $\to$ KE度量”

（与⑬中Thm类似）

且 K稳定 $\to$ CM稳定，故只须建立偏 C^0估计即可

$\mathcal{E}(\lambda,\beta)=\{(M,D,\omega)\mid M$ Fano流形 $D\leftrightarrow\lambda C_1(M)$，$\omega$为$2\pi\beta$-锥KE度量$\}$

取Hermitian度量 h s.t $\omega=\Theta(h)$，则可定义 $H^0(M,K_M^{-\ell})$上内积

$$\langle S,S'\rangle=\int_M h^{\ell}(S,S')\,\omega^n$$

取 $\{S_i\}_{0\le i\le N}$ 为如上标正基，则可定义 $\rho_{\omega,\ell}(x)=\sum_{i=0}^{N}\|S_i\|_h^2(x)$

Thm（偏 C^0-估计）固定 λ，$\beta_0>1-\frac{1}{\lambda}$，则 $\exists\, C_k=C(k,n,\lambda,\beta_0)>0$ 和 $k\ge1$

$l_i\to\infty$ s.t. $\forall\beta\ge\beta_0$，$\omega\in\mathcal{E}(\lambda,\beta)$ 有 $\rho_{\omega,l_i}\ge C_{l_i}>0$

2. 锥KE度量的光滑逼近

对 $\omega\in\mathcal{E}(\lambda,\beta)$，我们可以用一列 Ricci有下界的光滑 Kähler度量逼近

任给 $[\omega_0]=2\pi C_1(M)$，设 $\omega=\omega_0+\sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi$，则有

$$Ric(\omega_0)-\omega_0=\sqrt{-1}\partial\bar\partial h_0 \qquad \int_M e^{h_0}\omega_0^n=\int_M\omega_0^n$$

$$\Downarrow$$

$$Ric(\omega_0)=\mu\omega_0+2\pi(1-\beta)[D]+\sqrt{-1}\partial\bar\partial\left(h_0-(1-\beta)\log\|S\|_0^2\right)$$

S：D的defining section in $K_M^{-\lambda}$　　$\|\cdot\|_0$：$K_M^{-\lambda}$上度量 s.t $\Theta=\lambda\omega_0$

结合(*)可化为 $(\omega_0+\sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi)^n = e^{h_0-(1-\beta)\log\|S\|_0^2+a_\beta-\mu\varphi}\omega_0^n$

其中 a_β 选取 s.t. $\int_M e^{h_0-(1-\beta)\log\|S\|_0^2+a_\beta}\omega_0^n = \int_M \omega_0^n$

进而考虑 $(\omega_0+\sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi)^n = e^{h_\delta-\mu\varphi}\omega_0^n$ $\quad h_\delta = h_0-(1-\beta)\log(\|S\|_0^2+\delta)+c_\delta$ $\quad (*_\delta')$

其中 c_δ 选取 s.t. $\int_M e^{h_\delta}\omega_0^n = \int_M \omega_0^n$

利用 P15 Thm 同样方法可证 $(*_\delta')$ 有唯一解 $\rightsquigarrow \omega_\delta$ $\quad (\forall\delta>0)$

且 $Ric(\omega_\delta) \geq \mu\omega_\delta$

Fact. $\omega_\delta \to \omega$ in Gromov-Hausdorff topology outside D

3 收敛性处理化简偏 C^0 估计

对 $\beta_i\to\beta_\infty$. 对应 $\mu_i\to\mu_\infty$. 设 ω_i 为 2π β_i-锥 KE 度量

由上. ∃光滑 Kähler 度量 $\tilde\omega_i$ s.t. $[\tilde\omega_i] = 2\pi c_1(M)$

$Ric(\tilde\omega_i) \geq \mu_i\tilde\omega_i$

$d_{GH}(\omega_i, \tilde\omega_i) < \frac{1}{i}$

由 Gromov 紧性 Thm. 不妨 $(M, \tilde\omega_i) \xrightarrow{GH} (M_\infty, d_\infty)$

则 $(M, \omega_i) \xrightarrow{GH} (M_\infty, d_\infty)$

Thm(田,张) ∃闭集 $S \subset M_\infty$ (Hausdorff余维 ≥ 2) s.t

$M_\infty \setminus S$ 为光滑Kähler流形，且 d_∞ 由KE度量诱导 即 $Ric(\omega_\infty) = \mu_\infty \omega_\infty$ (on $M_\infty \setminus S$)

若 $\beta_\infty < 1$ 则 $\omega_i \xrightarrow{C^\infty} \omega_\infty$ on $M_\infty \setminus S$

$\beta_\infty = 1$ 则 S 余维 ≥ 4. ω_∞ 为光滑的

可进一步得到光滑收敛

Thm. 记号如上. 则 $(M, \omega_i) \xrightarrow{C^\infty} (M_\infty, \omega_\infty)$ outside $\bar{S} \cup D_\infty$

其中 $\bar{S}$ 余维 ≥ 4. 若 $\beta_\infty < 1$. 则 $S = \bar{S} \cup D_\infty$.

若 $\beta_\infty = 1$. 则 $S = \bar{S}$. D_∞ 为 M_∞ 上的除子

在上面的定理下. 可将偏 C^0 估计约化成如下形式

Thm. 对 $\omega_i \in \mathcal{E}(\lambda, \beta_i)$. $\beta_i \to \beta_\infty > 0$. $\mu_i \to \mu_\infty$.

若 $(M, \omega_i) \to$ 锥KE流形 $(M_\infty, \omega_\infty)$ 则 $\exists\, C_k = c(k, n, \lambda, \beta_\infty) > 0$

和 $t_j \to \infty$ s.t. $\rho_{\omega_i, t_j} \geq C_{t_j} > 0$

光滑化后的偏 C^0 估计可以借助Hömander的 L^2 方法证明

4. CM稳定性与K稳定性

利用之前的F泛函与K能量可定义CM稳定性.

设 $M \subset \mathbb{CP}^N$ 由 K_M^{-l} 给出嵌入. $G = SL(N+1, \mathbb{C})$

令 $\sigma^* \omega_{FS} = \omega_0 + \sqrt{-1}\partial\bar\partial \varphi_\sigma$

则定义 $F(\sigma) = \nu_{\omega_0}(\varphi_\sigma)$ $J(\sigma) = J_{\omega_0}(\varphi_\sigma)$

Def M 称为CM稳定的. 若 F proper. 即若 $J(\sigma) \to \infty$ 则 $F(\sigma) \to \infty$

K稳定 $\to$ CM稳定

Thm ① 设 T 为 G 的最大algebraic torus. $F|_T$ proper. 则 M 为CM稳定

② 若Fano流形 M 是K稳定的. 则 $F|_T$ proper.

故最终只须证:

Thm. Fano流形 M 是CM稳定的. 则 M 上存在KE度量

pf. 对方程 $(\omega_\beta + \sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi)^n = e^{h_\beta - \mu\varphi}\omega_\beta^n$. h_β 选取同前

若无解. 则 $\exists \beta_i \to \bar\beta \le 1$ s.t. $\|\varphi_i\|_{C^0} \triangleq \|\varphi_{\beta_i}\|_{C^0} \to \infty$

由偏 C^0 估计 $\exists M \subset \mathbb{CP}^N$ 嵌入由 $H^0(M, K_M^{-l})$ 给出.

$\exists \sigma_i \in G$ s.t. $\psi_i = \varphi_{\sigma_i}$ $\|\psi_i - \varphi_i\|_{C^0} \le C$

Fact: $V_{\omega_0}(\varphi)=\frac{1}{V}\int_M \log\left(\frac{\omega_\varphi^n}{\omega_0^n}\right)\omega_\varphi^n+I_{\omega_0}(\varphi)-J_{\omega_0}(\varphi)+\frac{1}{V}\int_M h_0(\omega_0^n-\omega_\varphi^n)$

则 $V_{\omega_0}(\varphi_i)\geq V_{\omega_0}(\psi_i)+\frac{1}{V}\int_M \log\left(\frac{\omega_{\psi_i}^n}{\omega_0^n}\right)(\omega_{\varphi_i}^n-\omega_{\psi_i}^n)-C$

$\geq F(\sigma_i)+\frac{1}{V}\int_M(\varphi_i-\psi_i)(Ric(\omega_0)-Ric(\omega_{\psi_i}))\wedge\sum_{k=1}^{n-1}\omega_{\varphi_i}^k\wedge\omega_{\psi_i}^{n-k}-C$

$\geq F(\sigma_i)-C'$ $\quad$ ($Ric(\omega_{\psi_i})$ 有上界) $\quad$ (Δ)

再对"twisted" F 和 K:

$F_{\omega_0,\mu_i}(\varphi_i)=J_{\omega_0}(\varphi)-\frac{1}{V}\int_M\varphi\omega_0^n-\frac{1}{\mu_i}\log\left(\frac{1}{V}\int_M e^{h_0-t\varphi}\omega_0^n\right)$

$V_{\omega_0,\mu_i}(\varphi_i)=V_{\omega_0}(\varphi)+(1-\mu)(I_{\omega_0}(\varphi)-J_{\omega_0}(\varphi))+\frac{1-\beta}{V}\int_M\log\|S\|_0^2(\omega_\varphi^n-\omega_0^n)$

① $\frac{d}{ds}F_{\omega_0,s}(\varphi_s)=\frac{1}{s^2V}\left(\int_M\varphi_s(\omega_0+\sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi_s)^n\right)$

若 $s\geq s_0\Rightarrow Ric(\omega_{\varphi_s})\geq s_0\omega_{\varphi_s}$. $\quad$ σ_{φ_s} 一致有界

通过 Moser 迭代可证 $-\inf_M\varphi_s\leq-\frac{1}{V}\int_M\varphi_s(\omega_0+\sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi_s)^n+C'$

$\Rightarrow\frac{d}{ds}F_{\omega_0,s}(\varphi_s)\leq\frac{C'}{s_0}$

$\Rightarrow F_{\omega_0,s}(\varphi)\leq C''$

② $V_{\omega_0,\mu_i}(\varphi)=\mu_iF_{\omega_0,\mu_i}(\varphi)+\frac{1}{V}\int_M(h_0-(1-\beta_i)\log\|S\|_0^2+a_{\beta_i})\omega_0^n$

则结合①② $\Rightarrow V_{\omega_0,\mu_i}(\varphi_i)\leq C\overset{(\Delta)}{\Rightarrow}F(\sigma_i)$ 有界

$\xrightarrow{\text{CM稳定}}\psi_i$ 有界 $\Rightarrow\varphi_i$ 有界 矛盾!

#